

Integração por Partes

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries



<https://material-didatico.github.io/pages/is>

Conteúdo

Integração por Partes

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Exemplo 4

Exemplo 5

Lista Mínima

Justificativa

Assumindo que

$$F'(x) = f(x) \qquad G'(x) = g(x)$$

temos

$$(F(x)G(x))' = f(x)G(x) + F(x)g(x)$$

$$F(x)g(x) = (F(x)G(x))' - f(x)G(x)$$

$$\int F(x)g(x) dx = \int (F(x)G(x))' dx - \int f(x)G(x) dx$$

$$\int F(x)g(x) dx = F(x)G(x) - \int G(x)f(x) dx$$

Escolhendo as Funções

$$\int F(x) g(x) dx = F(x) G(x) - \int G(x) f(x) dx$$

Integramos $g(x)$ – essa função não deve “complicar” ao ser integrada

Derivamos $F(x)$ – essa função deve “simplificar” ao ser derivada

Integração por Partes

Mnemônico

$$\int u \, dv = u \, v - \int v \, du$$

usamos $u = F(x)$ e $dv = g(x)dx$

Integrais definidas

$$\int_a^b u \, dv = u \, v \Big|_a^b - \int_a^b v \, du$$

Conteúdo

Integração por Partes

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Exemplo 4

Exemplo 5

Lista Mínima

Exemplo 1

Calcule a integral $\int x \operatorname{sen}(x) dx$

Usando $\int u dv = uv - \int v du$, escolhemos

$$u = x$$

$$dv = \operatorname{sen}(x) dx$$

$$du = dx$$

$$v = \int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x)$$

Temos

$$\int x \operatorname{sen}(x) dx = x(-\cos(x)) - \int (-\cos(x)) dx$$

Exemplo 1

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen}(x) dx &= uv - \int v du \\&= x(-\cos(x)) - \int (-\cos(x)) dx \\&= -x \cos(x) + \int \cos(x) dx \\&= -x \cos(x) + \operatorname{sen}(x) + C\end{aligned}$$

Conteúdo

Integração por Partes

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Exemplo 4

Exemplo 5

Lista Mínima

Exemplo 2

Calcule a integral $\int \ln(x) dx = \int \ln(x) \cdot 1 dx$

Usando $\int u dv = uv - \int v du$, escolhemos

$$u = \ln(x) \qquad dv = 1 dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = \int dx = x$$

Temos

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - \int x \frac{1}{x} dx$$

Exemplo 2

$$\begin{aligned}\int \ln(x) dx &= uv - \int v du \\&= x \ln(x) - \int x \frac{1}{x} dx \\&= x \ln(x) - \int dx \\&= x \ln(x) - x + C\end{aligned}$$

Conteúdo

Integração por Partes

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Exemplo 4

Exemplo 5

Lista Mínima

Exemplo 3

Calcule a integral $\int t^2 e^t dt$

Usando $\int u dv = uv - \int v du$, escolhemos

$$u = t^2$$

$$dv = e^t dt$$

$$du = 2t dt$$

$$v = \int e^t dt = e^t$$

Temos

$$\int t^2 e^t dt = t^2 e^t - 2 \int t e^t dt$$

Exemplo 3

Temos que integrar $\int te^t dt$

Usando $\int u dv = uv - \int v du$, escolhemos

$$u = t$$

$$dv = e^t dt$$

$$du = dt$$

$$v = \int e^t dt = e^t$$

Temos

$$\int te^t dt = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C$$

Exemplo 3

Substituindo na expressão anterior

$$\begin{aligned}\int t^2 e^t dt &= t^2 e^t - 2 \int t e^t dt \\ &= t^2 e^t - 2 (t e^t - e^t + C) \\ &= t^2 e^t - 2 t e^t + 2 e^t - 2 C \\ &= (t^2 - 2 t + 2) e^t + C_1\end{aligned}$$

Conteúdo

Integração por Partes

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Exemplo 4

Exemplo 5

Lista Mínima

Exemplo 4

Calcule a integral $\int e^x \operatorname{sen}(x) dx$

Usando $\int u dv = uv - \int v du$, escolhemos

$$u = e^x \quad dv = \operatorname{sen}(x) dx$$

$$du = e^x dx \quad v = \int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x)$$

Temos

$$\int e^x \operatorname{sen}(x) dx = -e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x) dx$$

Exemplo 4 – Andando em Círculos

Calcule a integral $\int e^x \cos(x) dx$

Usando $\int u dv = uv - \int v du$, escolhemos

$$u = e^x \qquad dv = \cos(x) dx$$

$$du = e^x dx \qquad v = \int \cos(x) dx = \text{sen}(x)$$

Temos

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \text{sen}(x) - \int e^x \text{sen}(x) dx$$

Exemplo 4

$$\int e^x \operatorname{sen}(x) dx = -e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x) dx \quad (1)$$

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \operatorname{sen}(x) - \int e^x \operatorname{sen}(x) dx \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1)

$$\int e^x \operatorname{sen}(x) dx = -e^x \cos(x) + e^x \operatorname{sen}(x) - \int e^x \operatorname{sen}(x) dx$$

Exemplo 4

$$\int e^x \operatorname{sen}(x) dx = -e^x \cos(x) + e^x \operatorname{sen}(x) - \int e^x \operatorname{sen}(x) dx$$

$$2 \int e^x \operatorname{sen}(x) dx = -e^x \cos(x) + e^x \operatorname{sen}(x)$$

$$\int e^x \operatorname{sen}(x) dx = \frac{e^x}{2} (\operatorname{sen}(x) - \cos(x)) + C$$

Conteúdo

Integração por Partes

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Exemplo 4

Exemplo 5

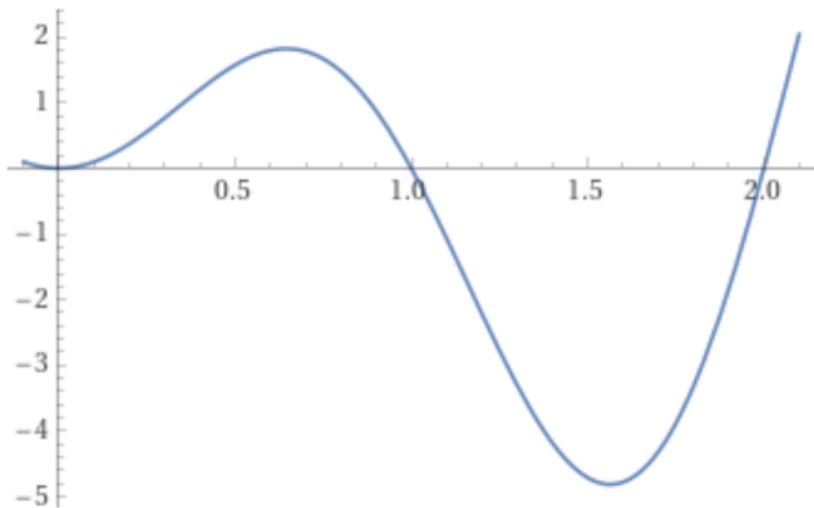
Lista Mínima

Exemplo 5

Considere a região do primeiro quadrante delimitada pelo eixo $y = 0$ e pela curva $f(x) = x \sin(x)$, $0 \leq x \leq \pi$.

1. Encontre a área dessa região
2. Encontre o volume do sólido de revolução gerado pela rotação dessa região em torno do eixo y

Exemplo 5



Exemplo 5 – Cálculo da Área

Área

$$A = \int_a^b f(x) \, dx = \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(x) \, dx$$

Precisamos da primitiva

$$\int x \operatorname{sen}(x) \, dx = -x \cos(x) + \operatorname{sen}(x) + C$$

Exemplo 5 – Cálculo da Área

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo - parte 2

$$\begin{aligned} A &= \left(-x \cos(x) + \sin(x) \right) \Big|_0^{\pi} \\ &= \left(-\pi \cos(\pi) + \sin(\pi) \right) - \left(-0 \cos(0) + \sin(0) \right) \\ &= \left(-\pi(-1) + 0 \right) - \left(-0 + 0 \right) \\ &= \pi \end{aligned}$$

Exemplo 5 – Volume rotação no eixo y

Método de cascas cilíndricas com

Raio $r(x) = x$

Altura $h(x) = f(x)$

Região de $x = 0$ até $x = \pi$

Exemplo 5 – Volume rotação no eixo y

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b 2\pi r(x) h(x) dx \\ &= \int_0^\pi 2\pi x (x \operatorname{sen}(x)) dx \\ &= 2\pi \int_0^\pi x^2 \operatorname{sen}(x) dx \end{aligned}$$

Exemplo 5 – Volume rotação no eixo y

Calcular $\int x^2 \operatorname{sen}(x) \, dx$

Usando $\int u \, dv = uv - \int v \, du$, escolhemos

$$u = x^2 \qquad dv = \operatorname{sen}(x) \, dx$$

$$du = 2x \, dx \qquad v = \int \operatorname{sen}(x) \, dx = -\cos(x)$$

Temos

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x) \, dx = -x^2 \cos(x) + 2 \int x \cos(x) \, dx$$

Exemplo 5 – Volume rotação no eixo y

Calcular $\int x \cos(x) dx$

Usando $\int u dv = uv - \int v du$, escolhemos

$$u = x \qquad dv = \cos(x) dx$$

$$du = dx \qquad v = \int \cos(x) dx = \sin(x)$$

Temos

$$\int x \cos(x) dx = x \sin(x) - \int \sin(x) dx = x \sin(x) + \cos(x) + C$$

Exemplo 5 – Volume rotação no eixo y

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x) \, dx = -x^2 \cos(x) + 2 \int x \cos(x) \, dx$$

$$\int x \cos(x) \, dx = x \operatorname{sen}(x) + \cos(x) + C$$

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x) \, dx = -x^2 \cos(x) + 2x \operatorname{sen}(x) + 2 \cos(x) + C$$

Exemplo 5

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo - parte 2

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen}(x) \, dx \\ &= 2\pi \left(-x^2 \cos(x) + 2x \operatorname{sen}(x) + 2 \cos(x) \right) \Big|_0^{\pi} \\ &= 2\pi \left[\left(-\pi^2 \cos(\pi) + 2\pi \operatorname{sen}(\pi) + 2 \cos(\pi) \right) - \left(0 + 0 + 2 \cos(0) \right) \right] \end{aligned}$$

Como $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi) = -1$ e $\operatorname{sen}(\pi) = 0$

$$V = 2\pi \left[\left(\pi^2 + 0 - 2 \right) - 2 \right] = 2\pi \left(\pi^2 - 4 \right) = 2\pi^3 - 8\pi$$

Conteúdo

Integração por Partes

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Exemplo 4

Exemplo 5

Lista Mínima

Lista Mínima

Estudar a Seção 4.1 da Apostila

Exercícios: 1a-f, 2, 3, 9

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações