

Integração por Substituição Simples

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries



<https://material-didatico.github.io/pages/is>

Conteúdo

Integração por Substituição Simples

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Exemplo 4

Exemplo 5

Lista Mínima

Justificativa

Assumindo que $F'(x) = f(x)$ e $g'(x)$ é a derivada e $g(x)$

temos

$$\left(F(g(x))\right)' = f(g(x))g'(x)$$

$$\int \left(F(g(x))\right)' dx = \int f(g(x))g'(x) dx$$

$$F(g(x)) = \int f(g(x))g'(x) dx$$

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) = \int f(u) du$$

onde fizemos $u = g(x)$ e $du = g'(x) dx$

Integração por Substituição Simples

Regra

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du$$

onde $u = g(x)$ e $du = g'(x) dx$

Integrais definidas

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du$$

Casos Particulares

Se $\int f(x)dx = F(x) + C$ e k é uma constante

$$\int f(kx)dx = \frac{1}{k}F(kx) + C$$

$$\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k}F(kx + b) + C$$

Conteúdo

Integração por Substituição Simples

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Exemplo 4

Exemplo 5

Lista Mínima

Exemplo 1

$$\text{Encontre } \int 4x^3 \cos(x^4 + 2) dx = \int \cos(x^4 + 2) 4x^3 dx$$

Identificando as funções

$$f = \cos(x^4 + 2)$$

$$= \cos(g(x))$$

$$g = x^4 + 2$$

$$g' = 4x^3$$

Exemplo 1

Nova variável

$$u = x^4 + 2 \quad \text{e} \quad du = 4x^3 dx$$

$$\begin{aligned} \int \cos(x^4 + 2) 4x^3 dx &= \int \cos(u) du \\ &= \text{sen}(u) + C \\ &= \text{sen}(x^4 + 2) + C \end{aligned}$$

Conteúdo

Integração por Substituição Simples

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Exemplo 4

Exemplo 5

Lista Mínima

Exemplo 2

Calcule $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \int (1-4x^2)^{-1/2} x dx$

Identificando as funções

$$f = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} = (1-4x^2)^{-1/2}$$

$$= (g(x))^{-1/2}$$

$$g = 1 - 4x^2$$

$$g' = -8x$$

Exemplo 2

Substituição

$$u = 1 - 4x^2 \quad \text{e} \quad du = -8xdx \quad \Leftrightarrow \quad xdx = -\frac{1}{8}du$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx &= -\frac{1}{8} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du \\ &= -\frac{1}{8} \int u^{-1/2} du \\ &= -\frac{1}{8} (2\sqrt{u}) + C \\ &= -\frac{1}{4} \sqrt{1-4x^2} + C \end{aligned}$$

Conteúdo

Integração por Substituição Simples

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Exemplo 4

Exemplo 5

Lista Mínima

Exemplo 3

$$\text{Calcule } \int \operatorname{tg}(x) dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} dx = \int (\cos(x))^{-1} \operatorname{sen}(x) dx$$

Identificando as funções

$$f = (\cos(x))^{-1}$$

$$= (g(x))^{-1}$$

$$g = \cos(x)$$

$$g' = -\operatorname{sen}(x)$$

Exemplo 3

Substituição

$$u = \cos(x) \quad \text{e} \quad du = -\sin(x) dx \quad \Leftrightarrow \quad -du = \sin(x) dx$$

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \int (\cos(x))^{-1} \sin(x) dx$$

$$= \int u^{-1}(-du)$$

$$= - \int u^{-1} du$$

$$= -\ln|u| + C$$

$$= -\ln|\cos(x)| + C$$

Conteúdo

Integração por Substituição Simples

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Exemplo 4

Exemplo 5

Lista Mínima

Exemplo 4

Encontre o valor médio de $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ no intervalo $[1, e]$

Valor médio

$$f_{\text{médio}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Exemplo 4 – Integral Indefinida

Calcular $\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \int \ln(x) x^{-1} dx$

Substituição $u = \ln(x)$ e $du = x^{-1} dx$

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \int u du$$

$$= \frac{u^2}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2} (\ln(x))^2 + C$$

Exemplo 4 – Integral Definida

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx &= \frac{1}{2} (\ln(x))^2 \Big|_1^e \\ &= \frac{(\ln(e))^2}{2} - \frac{(\ln(1))^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Exemplo 4 – Valor Médio

$$f_{\text{médio}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

$$= \frac{1}{e-1} \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx$$

$$= \frac{1}{e-1} \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2(e-1)}$$

Conteúdo

Integração por Substituição Simples

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Exemplo 4

Exemplo 5

Lista Mínima

Exemplo 5

Determine se a integral $\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^4} dx$ é convergente ou divergente

Integral Imprópria

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^4} dx = \lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^0 x^3 e^{-x^4} dx + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s x^3 e^{-x^4} dx$$

Exemplo 5 – Integral Indefinida

Calcular $\int x^3 e^{-x^4} dx$

Substituição $u = -x^4$ e $du = -4x^3 dx \Leftrightarrow x^3 dx = \frac{du}{-4}$

$$\int x^3 e^{-x^4} dx = \int e^u \left(-\frac{du}{4} \right)$$

$$= -\frac{1}{4} \int e^u du$$

$$= -\frac{1}{4} e^u + C$$

$$= -\frac{1}{4} e^{-x^4} + C$$

Exemplo 5 – Integral Imprópria 1

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 x^3 e^{-x^4} dx &= \lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^0 x^3 e^{-x^4} dx \\&= \lim_{s \rightarrow -\infty} \left(-\frac{e^{-x^4}}{4} \right) \Big|_r^0 \\&= \lim_{r \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{4} (e^0 - e^{-r^4}) \right) \\&= -\frac{1}{4} \left(1 - \lim_{r \rightarrow -\infty} e^{-r^4} \right) \\&= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Integral Imprópria 2

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^4} dx &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s x^3 e^{-x^4} dx \\&= \lim_{s \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{-x^4}}{4} \right) \Big|_0^s \\&= \lim_{s \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{4} (e^{-s^4} - e^0) \right) \\&= -\frac{1}{4} \left(\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-s^4} - 1 \right) \\&= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Conclusão

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^4} dx &= \lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^0 x^3 e^{-x^4} dx + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s x^3 e^{-x^4} dx \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= 0\end{aligned}$$

A integral converge para zero

Conteúdo

Integração por Substituição Simples

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Exemplo 4

Exemplo 5

Lista Mínima

Lista Mínima

Estudar a Seção 4.2 da Apostila

Exercícios: 1a-f, 2, 4, 5a-f

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações