

# Séries Numéricas – Definição

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries



Definição

Lista Mínima

# Séries

Uma **Série Infinita** é a soma dos termos de uma **Sequência Infinita**  $(a_n)$

Se existir, essa **soma** pode ser escrita como

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = S$$

Cada valor  $a_n$  é chamado de **Termo da Série**

# Sequência de Somas Parciais

Soma dos primeiros  $n$  termos de uma sequência  $(a_k)$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Temos agora uma nova sequência: Somas Parciais  $(S_n)$

Podemos usar as técnicas definidas para sequências

# Convergência de uma Série

A soma da série é  $S$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

quando a sequência de somas parciais ( $S_n$ ) converge para  $S$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = S$$

Se sequência de somas parciais diverge a série **diverge**

# Exemplo

Somar os termos da sequência

$$a_k = \frac{1}{2^k}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{1}{4} \quad a_3 = \frac{1}{8} \quad a_4 = \frac{1}{16} \quad a_5 = \frac{1}{32} \quad \dots$$

# Somas Parciais

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad S_1 = \frac{1}{2} \qquad = 1 - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{4} \qquad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \qquad = 1 - \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{8} \qquad S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \qquad = 1 - \frac{1}{8}$$

$$a_4 = \frac{1}{16} \qquad S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \qquad = 1 - \frac{1}{16}$$

$$a_n = \frac{1}{2^n} \qquad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \qquad = 1 - \frac{1}{2^n} \quad (\text{Conjectura})$$

# Demonstração por Indução Finita

## Demonstração por Indução Finita

Para mostrar que uma afirmação é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$  devemos provar que

1. ela é verdadeira para  $n = 1$
2. se ela for verdadeira para  $n$  então também será para  $n + 1$

# Demonstração da Fórmula das Somas Parciais

Assumimos por **indução finita**  
que

$$S_{n-1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

para um  $n$  qualquer

Queremos mostrar que

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \\ &= \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) + \frac{1}{2^n} \\ &= S_{n-1} + \frac{1}{2^n} \\ &= 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \\ &= 1 - \frac{2}{2^n} + \frac{1}{2^n} \\ &= 1 - \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

# Calculando o Limite das Somas Parciais

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right)$$

$$= \lim 1 - \lim \left( \frac{1}{2} \right)^n$$

$$= 1 - 0$$

$$= 1$$

Portanto a série converge e podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

Definição

Lista Mínima

# Lista Mínima

Estudar as Seção 6.1 da Apostila

Exercícios: 1, 2, 4a-c, 6a-b

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações