

Séries Numéricas – Teste da Integral

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries



<https://material-didatico.github.io/pages/is>

Conteúdo

Recapitulando

Série com Termos Não-Negativos

Teste da Integral

Estimativa de Erro

Exemplos

Lista Mínima

Recapitulando

Sequências numéricas

$$(a_k)_{k=1}^{\infty} \quad a_1, a_2, a_3, \dots$$

Séries numéricas

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k + \dots$$

Somas parciais

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Conteúdo

Recapitulando

Série com Termos Não-Negativos

Teste da Integral

Estimativa de Erro

Exemplos

Lista Mínima

Série com Termos Não-Negativos

Caso particular de séries onde $a_n \geq 0 \quad \forall n$

Uma série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{com} \quad a_n \geq 0$$

é **convergente** se, e somente se, sua sequência de somas parciais, S_n , é uma sequência **limitada superiormente**.

Conteúdo

Recapitulando

Série com Termos Não-Negativos

Teste da Integral

Estimativa de Erro

Exemplos

Lista Mínima

Teste da Integral

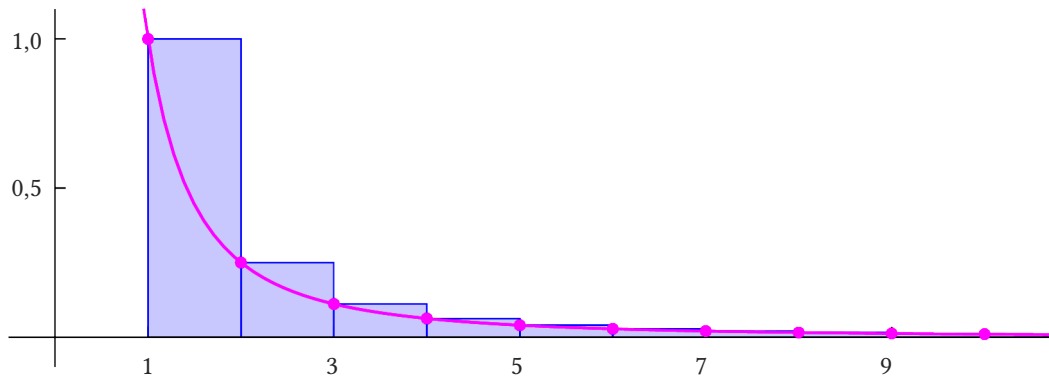
- ▶ Trocamos o problema de verificar se uma série converge para o de verificar se uma integral converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge?} \quad \text{por} \quad \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ converge?}$$

- ▶ O valor da integral **não é** uma boa aproximação para a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \not\approx \int_1^{\infty} f(x) dx$$

Diferença Entre a Integral e a Série



Teste da Integral

Seja (a_n) uma sequência tal que

1. seus termos são positivos, $a_n > 0$
2. $a_n = f(n)$
3. f é contínua, positiva e decrescente para todo $x \geq N$

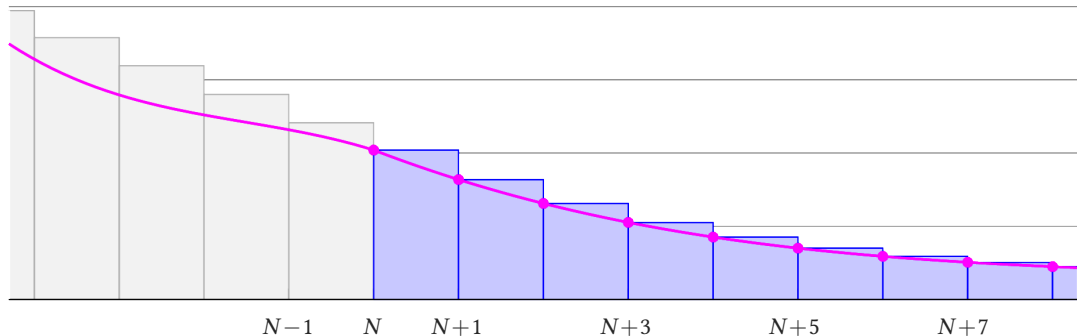
Então, a série

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \quad \text{converge}$$

se, e somente se, a integral

$$\int_N^{\infty} f(x) dx \quad \text{converge}$$

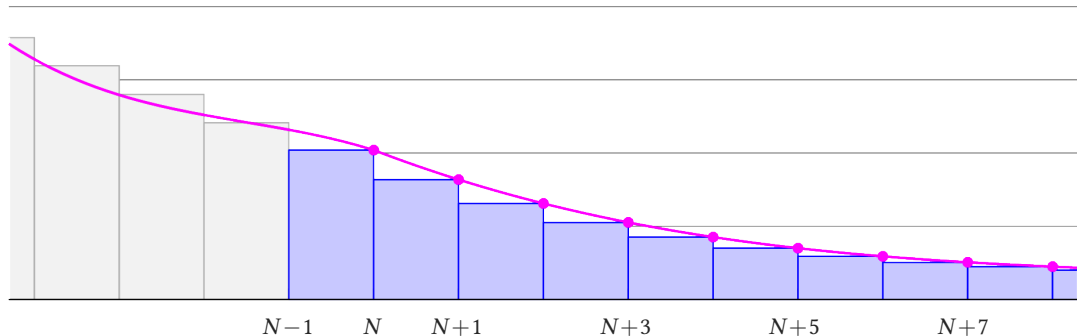
Ilustração do Teste da Integral – 1



A série é “maior” do que a integral

$$\int_N^{\infty} f(x) \, dx \leq \sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

Ilustração do Teste da Integral – 2



A série é “menor” do que a integral

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_k \leq a_N + \int_N^{\infty} f(x) dx$$

Comparação entre a Série e a Integral

Temos portanto as relações

$$\int_N^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=N}^{\infty} a_k \leq a_N + \int_N^{\infty} f(x) dx$$

Lembrando como Calcular uma Integral Imprópria

$$\int_a^\infty f(x) \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(F(x) \Big|_a^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} (F(b) - F(a))$$

Série p

Série p ou p -série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \dots$$

onde p é uma constante real

Não confundir com a série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha r^n = \alpha + \alpha r + \alpha r^2 + \alpha r^3 + \alpha r^4 + \dots$$

Série Harmônica ($p = 1$)

Série Harmônica é um caso particular da série p com $p = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

Essa série passa no teste da divergência pois $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$

mas mesmo assim diverge

Somas Parciais da Série Harmônica

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2}$$

$$S_8 = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} > \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$S_{16} = S_8 + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} > S_8 + \frac{8}{16} > \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2}$$

Somas Parciais da Série Harmônica

Considerando os termos $n = 2^k$ da sequência de somas parciais observamos que

$$S_{2^k} \geq \frac{2 + k}{2}$$

portanto $S_n \rightarrow \infty$ e a série harmônica diverge

Aplicando o Teste da Integral para $p \neq 1$

Observamos que

$$a_n = \frac{1}{n^p} = f(n) \quad \text{para} \quad f(x) = \frac{1}{x^p}$$

Para $x \in [1, \infty)$ a função $f(x)$ é decrescente, contínua e positiva, pelo Teste da Integral, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx \text{ converge}$$

Calculando a Integral

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-p} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^b \right] \\ &= \frac{1}{1-p} \lim_{b \rightarrow \infty} (b^{1-p} - 1)\end{aligned}$$

A convergência de $\lim_{b \rightarrow \infty} b^{1-p}$ depende do valor de p

Convergência

Se $p > 1$

$$1 - p < 0$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} b^{1-p} = 0$$

Se $p < 1$

$$1 - p > 0$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} b^{1-p} \text{ diverge}$$

Convergência da Série p

A série- p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \dots$$

converge para $p > 1$ e diverge caso contrário

Exemplo – 1

Use o teste da integral para determinar se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge ou diverge

Certifique-se de que as condições do teste da integral sejam satisfeitas

Exemplo – 1

Podemos aplicar o teste da integral pois a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ é **positiva**, **contínua** e **decrescente** para $x \geq 1$

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 1\end{aligned}$$

Como a integral converge a série também converge

Exemplo – 1

Note que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,6449 \neq 1$$

O cálculo da soma da série está na Seção 9.6 – Problema de Basileia

Conteúdo

Recapitulando

Série com Termos Não-Negativos

Teste da Integral

Estimativa de Erro

Exemplos

Lista Mínima

Convergência da Série p

Não temos uma fórmula para a soma da série

Podemos usar as somas parciais para aproximar a soma

Quantos termos precisamos?

Resto ou Erro

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \\ &= \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \\ &= S_n + R_n \end{aligned}$$

R_n é o **resto da série**, isso é, o que faltou ser calculado

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

Estimativa de Erro

Se uma série é **convergente pelo teste da integral** podemos estimar o resto

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \cdots$$

comparando a área dos retângulos com a da integral temos

$$R_n \geq \int_{n+1}^{\infty} f(x) dx$$

$$R_n \leq \int_n^{\infty} f(x) dx$$

Limitantes para o resto no teste da integral

Se a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

converge segundo o teste da integral, então o resto satisfaz

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x) dx \leq R_n \leq \int_n^{\infty} f(x) dx$$

Conteúdo

Recapitulando

Série com Termos Não-Negativos

Teste da Integral

Estimativa de Erro

Exemplos

Lista Mínima

Exemplo – 2

Use o teste da integral para determinar se a série converge ou diverge. Certifique-se de que as condições do teste da integral sejam satisfeitas.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 4}$$

Exemplo – 2

A função $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$ é **positiva** e **contínua** para $x \geq 1$

Para verificar que ela é **decrecente**, calculamos sua derivada

$$f'(x) = \frac{1(x^2 + 4) - x(2x)}{(x^2 + 4)^2} = \frac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2}$$

$f'(x) < 0$, e portanto f é decrescente, para todo $x > 2$

Precisamos de um N inteiro a partir do qual f seja decrescente

Escolhemos $N = 3$

Exemplo – 2

Podemos, agora, aplicar o teste da integral

Primeiro calculamos a primitiva de $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$ usando substituição

$$u = x^2 + 4 \quad \text{e} \quad du = 2x dx$$

$$F(x) = \int \frac{x}{x^2 + 4} dx = \int \frac{1}{2u} du$$

$$= \frac{1}{2} \ln u + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln (x^2 + 4) + C$$

Exemplo – 2

Calculando a integral imprópria temos

$$\begin{aligned}\int_3^{\infty} \frac{x}{x^2 + 4} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_3^b \frac{x}{x^2 + 4} dx \\&= \lim_{b \rightarrow \infty} [F(x)] \Big|_3^b \\&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) \right] \Big|_3^b \\&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{\ln(b^2 + 4) - \ln(3^2 + 4)}{2} \right] = \infty\end{aligned}$$

Como a integral diverge a série também diverge

Exemplo – 3

Sabemos que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge, pois é uma série p , com $p = 2$

Descubra n tal que o resto R_n da aproximação S_n seja menor que 0,01

Exemplo – 3

Sabemos que o Teste da Integral pode ser aplicado, pois

$$\int_n^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{b} + \frac{1}{n} \right] = \frac{1}{n}$$

Assim

$$\frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}$$

Exemplo – 3

Para garantir que $R_n < 0,01$ impomos que

$$\frac{1}{n} < 0,01$$

isolando n obtemos $n > 100$

A aproximação S_{100} tem um erro menor do que 0,01

Conteúdo

Recapitulando

Série com Termos Não-Negativos

Teste da Integral

Estimativa de Erro

Exemplos

Lista Mínima

Lista Mínima

Estudar as Seção 6.4 da Apostila

Exercícios: 3, 7a, 8, 9, 10

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações