

Séries de Potências – Convergência

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries



<https://material-didatico.github.io/pages/is>

Conteúdo

Convergência Ponto a Ponto

Convergência de uma Série de Potências

Lista Mínima

Convergência das Séries de Potências

Convergência Trivial

Toda Série de Potências converge em seu centro

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

Avaliando em $x = a$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0$$

Convergência

Para $x \neq a$, tipicamente empregamos o Teste da **Razão** ou o da **Raiz**

Exemplo 1

Analise a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots \quad a = 0 \quad c_n = \frac{1}{n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Aplicando o teste da razão, para $x \neq 0$, $u_n = \frac{x^n}{n}$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^{n+1}|}{n+1} \frac{n}{|x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} |x| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = |x|$$

Exemplo 1

$$\rho = |x|$$

$\rho < 1$ $x \in (-1, 1)$ a série converge absolutamente

$\rho > 1$ $x < -1$ ou $1 < x$ a série diverge

$\rho = 1$ $x = -1$ ou $1 = x$ o teste é inconclusivo

Exemplo 2

Analise a convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \quad a = 0 \quad c_n = \frac{1}{n!} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Aplicando o teste da razão para $x \neq 0$, $u_n = \frac{x^n}{n!}$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} \frac{n!}{|x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} |x| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Exemplo 2

$$\rho = 0$$

$\rho < 1$ $x \in \mathbb{R}$ a série converge absolutamente

$\rho > 1$ $\nexists x$ a série diverge

$\rho = 1$ $\nexists x$ o teste é inconclusivo

Conteúdo

Convergência Ponto a Ponto

Convergência de uma Série de Potências

Lista Mínima

Convergência de uma Série de Potências

Sobre a convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$

1. Existe um número $R > 0$ tal que a série

converge absolutamente para $|x-a| < R$

diverge para $|x-a| > R$

2. A série converge para todo x , nesse caso escrevemos $R = \infty$

3. A série diverge para todo $x \neq a$, nesse caso $R = 0$

Raio e Intervalo de Convergência

- ▶ R é o de Raio de Convergência
- ▶ o Intervalo de Convergência é o intervalo centrado em a com raio R

$$I = (a - R, a + R)$$

Os extremos do intervalo de convergência, $x = a \pm R$, podem ser abertos ou fechados

Testando a Convergência

1. Utilize o teste da **razão** (ou da **raiz**) para determinar o **raio de convergência**
2. Se R for finito teste os extremos do intervalo
 - ▶ teste da comparação
 - ▶ teste da integral
 - ▶ teste da série alternada

Exemplo 3

Analise a convergência da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}$$

Exemplo 3

Termo geral da série $u_n = \frac{(x-2)^n}{10^n}$ $|u_n| = \left| \frac{(x-2)^n}{10^n} \right|$

Aplicando o Teste da Raiz, para $x \neq 2$,

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{\left| \frac{(x-2)^n}{10^n} \right|} = \sqrt[n]{\left| \frac{x-2}{10} \right|^n} = \frac{|x-2|}{10}$$

Calculando o limite

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-2|}{10} = \frac{|x-2|}{10}$$

Exemplo 3

A série converge quando

$$\rho < 1$$

$$\frac{|x - 2|}{10} < 1$$

$$|x - 2| < 10$$

Centro do Intervalo de Convergência

$$x = 2$$

Raio de Convergência

$$R = 10$$

Interior do Intervalo de Convergência

$$(-8, 12)$$

Falta analisar os extremos

Exemplo 3

Considerando $x = -8$, isto é, $x - 2 = -10$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n} \Big|_{x=-8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-10)^n}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

Diverge pelo Teste da Divergência

Exemplo 3

Considerando $x = 12$, isto é, $x - 2 = 10$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n} \Big|_{x=12} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1$$

Diverge pelo Teste da Divergência

Exemplo 3

Centro do Intervalo de Convergência

$$x = 2$$

Raio de Convergência

$$R = 10$$

Intervalo de Convergência

$$I = (-8, 12)$$

Exemplo 4

Analise a convergência da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}$$

Exemplo 4

Teste da Razão, para $x \neq 0$

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{(-x)^n} \right| = \frac{|(-x)^{n+1}|}{(n+1)!} \frac{n!}{|(-x)|^n} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)n!} \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1}$$

Calculando o limite

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Portanto a série converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$

Raio de Convergência $R = \infty$

Exemplo 5

Analise a convergência da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$$

Exemplo 5

Teste da Raiz, para $x \neq 0$

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{|n^n x^n|} = \sqrt[n]{|n|^n |x|^n} = \sqrt[n]{|n|^n} \sqrt[n]{|x|^n} = n|x|$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n|x| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

A série diverge para todo $x \neq 0$

Raio de Convergência é $R = 0$

Conteúdo

Convergência Ponto a Ponto

Convergência de uma Série de Potências

Lista Mínima

Lista Mínima

Estudar a Seção 7.1 da Apostila

Exercícios: 1a-d, 1i-k, 1v-x

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações