

Séries de Potências – Manipulações

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries



<https://material-didatico.github.io/pages/is>

Conteúdo

Função Definida por Série de Potências

Derivada da Série

Integral da Série

Lista Mínima

Função Definida por Série de Potências

Se

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$$

possui um raio de convergência $R > 0$, então a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$$

está definida no intervalo $(a - R, a + R)$

é infinitamente derivável nesse intervalo

Manipulando Funções Definidas por Séries

Podemos fazer mudanças de variáveis e somar as séries

Desde que estejamos atentos ao intervalo de convergência

Exemplo 1

Escreva $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ como uma série de potências

Sabemos que

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots + u^n + \cdots$$

para $|u| < 1$

Exemplo 1

Fazendo $u = x^2$, temos

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots + u^n + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \cdots$$

Analisando o intervalo de convergência

$$|u| < 1$$

$$x^2 < 1$$

$$|x| < \sqrt{1}$$

$$-1 < x < 1$$

Exemplo 2

Escreva $f(x) = \frac{1}{x+2}$ como uma série de potências

Sabemos que

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots + u^n + \cdots$$

para $|u| < 1$

Exemplo 2

Precisamos manipular f

$$f(x) = \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left[1-\left(-\frac{x}{2}\right)\right]}$$

Fazendo $u = -\frac{x}{2}$, temos

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{(-1)^n x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n$$

Exemplo 2

Analisando o intervalo de convergência

$$|u| < 1$$

$$\left| -\frac{x}{2} \right| < 1$$

$$\frac{|x|}{2} < 1$$

$$|x| < 2$$

A série converge para $x \in (-2, 2)$

Conteúdo

Função Definida por Série de Potências

Derivada da Série

Integral da Série

Lista Mínima

Derivação Termo a Termo

Podemos calcular a derivada de $f(x)$ construindo a série

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(c_n (x-a)^n \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n n (x-a)^{n-1}$$

Note que o índice dessa série começa em **1**

que converge em $(a-R, a+R)$

Exemplo 3

Calcule a derivada da função de Bessel

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$$

Exemplo 3

$$\begin{aligned} J'_0(x) &= \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} \frac{d}{dx} (x^{2n}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J'_0(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} 2n x^{2n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{2n-1}}{(n!)^2 2^{2n-1}} \end{aligned}$$

Exemplo 4

Qual a inclinação da reta tangente ao gráfico da função de Bessel em $x = 2$?

Exemplo 4

Já verificamos que

$$J'_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{2n-1}}{2^{2n-1} (n!)^2}$$

Avaliando a derivada em $x = 2$, temos

$$J'_0(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{2n-1}}{2^{2n-1} (n!)^2} \Big|_{x=2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n!)^2} \frac{2^{2n-1}}{2^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n!)^2}$$

Exemplo 5

Determine a inclinação da reta tangente ao gráfico da função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \quad |x| < 1$$

$$\text{em } x = \frac{1}{4}$$

Exemplo 6

Calculando a derivada de f , temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} \frac{d}{dx} (x^{2n+1}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} (2n+1) x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^{2n} \end{aligned}$$

Exemplo 6

$$f' \left(\frac{1}{4} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^{2n} \Big|_{x=1/4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{1}{4^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^{3n} (n!)^2}$$

Conteúdo

Função Definida por Série de Potências

Derivada da Série

Integral da Série

Lista Mínima

Integração Termo a Termo

Para calcularmos a integral de f construímos a série

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \right) dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int c_n (x-a)^n dx \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C\end{aligned}$$

que também converge em $(a-R, a+R)$

Exemplo 7

Calcule a integral da função de Bessel

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$$

Exemplo 7

$$\begin{aligned}\int J_0(x) dx &= \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \right) dx \\&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} dx \right) \\&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} \int x^{2n} dx \\&= C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{2n} (2n+1) (n!)^2}\end{aligned}$$

Exemplo 8

Calcule a integral da função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \quad |x| < 1$$

Exemplo 8

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \right) dx \\&= \sum_{n=0}^{\infty} \int \left(\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \right) dx \\&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} \int x^{2n+1} dx \\&= C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} \frac{x^{2n+2}}{2n+2} = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! x^{2n+2}}{4^n (n!)^2 (2n+2)(2n+1)}\end{aligned}$$

Conteúdo

Função Definida por Série de Potências

Derivada da Série

Integral da Série

Lista Mínima

Lista Mínima

Estudar a Seção 7.2 da Apostila

Exercícios: 1a-b, 2

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações