Série-p

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

Conteúdo

Série-p

Série-p ou p-série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \cdots$$

onde p é uma constante real

Não confundir com a Série Geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^n = ar^0 + ar^1 + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots$$

Série Harmônica

Série Harmônica é um caso particular da série-p com $p = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

Essa série passa no teste da divergência, pois, $\quad a_n = \dfrac{1}{n} \to 0$

mas mesmo assim diverge

Somas Parciais da Série Harmônica

$$S_2 \;=\; 1 + \frac{1}{2} \;=\; \frac{3}{2}$$

$$S_4 \;=\; S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \;>\; S_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \;=\; \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \;=\; \frac{4}{2}$$

$$S_8 \;=\; S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \;>\; S_4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \;>\; \frac{4}{2} + \frac{1}{2} \;=\; \frac{5}{2}$$

$$S_{16} \;=\; S_8 + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} \;>\; S_8 + \frac{8}{16} \;>\; \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \;=\; \frac{6}{2}$$

$$S_{2^k} \;\geq\; \frac{2+k}{2}$$

Somas Parciais da Série Harmônica

Considerando os termos $n = 2^k$ da sequência de somas parciais observamos que

$$S_{2^k} \geq \frac{2+k}{2}$$

portanto, $S_n \to \infty$ e a série harmônica diverge

Conteúdo

Exemplo 1

Utilize o teste da integral para verificar a convergência da série p com $p \neq 1$

Exemplo 1 – Teste da Integral

Observamos que

$$a_n = \frac{1}{n^p} = f(n) \qquad \text{para} \qquad f(x) = \frac{1}{x^p}$$

Para $x \in [1, \infty)$ a função $f(x)$ é decrescente, contínua e positiva

Pelo Teste da Integral

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \text{converge} \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx \quad \text{converge}$$

Exemplo 1 – Calculando a Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-p}\,dx \qquad p \neq 1$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^b\right]$$

$$= \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}\left(b^{1-p}-1\right)$$

A convergência de $\lim\limits_{b\to\infty} b^{1-p}$ depende do valor de p

Exemplo 1 – Convergência

Se $p > 1$

$$1 - p < 0 \qquad \lim_{b \to \infty} b^{1-p} = 0$$

Se $p < 1$

$$1 - p > 0 \qquad \lim_{b \to \infty} b^{1-p} \quad \text{diverge}$$

Conteúdo

Convergência da Série-p

A série-p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \cdots$$

converge para $p > 1$ e diverge caso contrário

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar as Seção 6.4 da Apostila

Exercícios:

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações