# Séries Numéricas – Teste da Série Alternada

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

# Conteúdo

# Séries Alternadas

Os termos trocam de sinal alternando entre um positivo e um negativo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

com $a_n > 0$ para todo $n$

# Série Harmônica Alternada

Exemplo, Série Harmônica Alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

# Teste da Série Alternada – Teste de Leibniz

Seja $a_n$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

1. $a_n > 0$ — $a_n$ são os módulos dos termos da série
2. $a_n \geq a_{n+1}$ — os termos são decrescentes em módulo
3. $a_n \to 0$ — os termos tendem a zero

Então, a série alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ converge

# Exemplo 1

Vamos analisar a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{n-1}}$$

Percebemos que

- a série é alternada
- o módulo do termo geral é $\quad a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$
- $a_n \geq a_{n+1}$
- $a_n \to 0$

Portanto a série converge pelo Teste da Série Alternada

# Exemplo 1

Por outro lado

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^2(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Série geométrica com $a = 1$ e $r = -\dfrac{1}{2}$

Como $|r| < 1$ ela converge

sua soma é $\quad S = \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{1}{1+{}^1\!/_2} = \dfrac{2}{3}$

# Conteúdo

# Estimativa do Erro

Dada uma série que satisfaz as condições do teste da série alternada

$$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n$$

converge para a soma da série $S$

- $|R_n| < a_{n+1}$
- $S$ está entre $S_n$ e $S_{n+1}$
- $R_n = S - S_n$ tem o mesmo sinal do primeiro termo não utilizado

# Conteúdo

# Exemplo 2

Use o Teste de Leibniz para mostrar que a série a seguir converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

# Exemplo 2 – Condição 1: $a_n > 0$

Como $1 + \dfrac{1}{n} > 1$ para todo $n \geq 1$

Podemos escolher

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

que garante $a_n > 0$

# Exemplo 2 – Condição 2: $a_n \geq a_{n+1}$

Considerando a função

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln\left(1 + x^{-1}\right)$$

temos

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^{-1}}\left(-x^{-2}\right) = \frac{-1}{\left(1 + x^{-1}\right)x^2} = \frac{-1}{x^2 + x} < 0 \qquad \forall x \geq 1$$

Portanto $a_n$ é decrescente $a_n > a_{n+1}$

# Exemplo 2 – Condição 3: $a_n \to 0$

Observando que

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

e a função $\ln(x)$ é contínua em $1$

$$\lim a_n = \lim \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0$$

O Teste de Leibniz garante que a série converge

# Exemplo 3

Use o Teste de Leibniz para mostrar que a série a seguir converge

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{(\ln n)^2}$$

# Exemplo 3 – Condição 1: $a_n > 0$

Vemos que $a_n = \dfrac{4}{(\ln n)^2} > 0$ para todo $n \geq 2$

# Exemplo 3 – Condição 2: $a_n \geq a_{n+1}$

Como $\ln n$ é crescente,

$$a_n = \frac{4}{(\ln n)^2}$$

é decrescente

# Exemplo 3 – Condição 3: $a_n \to 0$

$a_n \to 0$, pois

$$(\ln n)^2 \to \infty$$

O teste de Leibniz garante que a série converge

# Exemplo 4

Use o teste de Leibniz para mostrar que a série a seguir converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{10^n}{(n+1)!}$$

# Exemplo 4 – Condição 1: $a_n > 0$

$$a_n = \frac{10^n}{(n+1)!} \text{ é positivo para } n \geq 1$$

# Exemplo 4 – Condição 2: $a_n \geq a_{n+1}$

$$n \geq 8$$

$$n + 2 \geq 10$$

$$1 \geq \frac{10}{n+2}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{10^{n+1}}{(n+2)!} \\ &= \frac{10}{(n+2)} \frac{10^n}{(n+1)!} \\ &\leq \frac{10^n}{(n+1)!} \\ &= a_n \end{aligned}$$

Portanto, $a_n$ é decrescente para $n \geq 8$

# Exemplo 4 – Condição 3: $a_n \to 0$

Para $n > 10$

$$(n+1)! = 1 \times 2 \times \cdots \times 9 \times 10 \times 11 \times \cdots \times n \times (n+1)$$

$$\geq 10!\, 10^{n-10}\,(n+1)$$

Dessa forma

$$\frac{10^n}{(n+1)!} \leq \frac{10^n}{10!\, 10^{n-10}\,(n+1)} = \frac{10^{10}}{10!}\,\frac{1}{(n+1)} \to 0$$

Como $0 < \dfrac{10^n}{(n+1)!} \leq \dfrac{10^{10}}{10!}\,\dfrac{1}{(n+1)}$

o Teorema do Confronto garante que $a_n \to 0$

# Exemplo 4

O teste de Leibniz garante que a série converge

# Exemplo 5

Estime o erro cometido quando aproximamos o valor da soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

pela soma dos seus quatro primeiros termos

# Exemplo 5

A série converge pelo teste da série alternada, portanto

$$|R_n| < a_{n+1}$$

Como somamos quatro quatro termos ( $S_4$ ), temos que

$$|R_4| < a_5 = \frac{1}{5}$$

# Exemplo 6

Determine quantos termos devem ser somados para aproximar a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+3}$$

com erro menor do que 0,0001

# Exemplo 6

A série converge pelo teste da série alternada, portanto

$$|R_n| < a_{n+1}$$

Para garantir que o erro é menor do que 0,001 devemos impor que

$$a_{n+1} < 10^{-4}$$

$$\frac{1}{n^2+3} < 10^{-4}$$

$$\frac{1}{10^{-4}} < n^2 + 3$$

$$n^2 > 10^4 - 3$$

$$n^2 > 10^4$$

$$n > 10^2$$

# Conteúdo

# Lista Mínima

Estudar a Seção ? da Apostila

Exercícios:

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações