Séries de Potências – Convergência

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

Conteúdo

Convergência das Séries de Potências

Convergência Trivial

Toda Série de Potências converge em seu centro

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

Avaliando em $x = a$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0$$

Convergência

Para $x \neq a$, tipicamente empregamos o Teste da Razão ou o da Raiz

Exemplo 1

Analise a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots \qquad a = 0 \qquad c_n = \frac{1}{n} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Aplicando o teste da razão, para $x \neq 0$, $\qquad u_n = \dfrac{x^n}{n}$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}|}{n+1} \frac{n}{|x^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} |x| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x|$$

Exemplo 1

$\rho = |x|$

$\rho < 1$	$x \in (-1, 1)$	a série converge absolutamente
$\rho > 1$	$x < -1$ ou $1 < x$	a série diverge
$\rho = 1$	$x = -1$ ou $1 = x$	o teste é inconclusivo

Exemplo 2

Analise a convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \qquad a = 0 \qquad c_n = \frac{1}{n!} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Aplicando o teste da razão para $x \neq 0$, $\qquad u_n = \dfrac{x^n}{n!}$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} \frac{n!}{|x^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}|x| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Exemplo 2

$\rho = 0$

$\rho < 1$	$x \in \mathbb{R}$	a série converge absolutamente
$\rho > 1$	$\nexists\, x$	a série diverge
$\rho = 1$	$\nexists\, x$	o teste é inconclusivo

Conteúdo

Convergência de uma Série de Potências

Sobre a convergência de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$

1. Existe um número $R > 0$ tal que a série

   converge absolutamente para $|x-a| < R$

   diverge para $|x-a| > R$

2. A série converge para todo x, nesse caso escrevemos $R = \infty$

3. A série diverge para todo $x \neq a$, nesse caso $R = 0$

Raio e Intervalo de Convergência

- R é o de Raio de Convergência
- o Intervalo de Convergência é o intervalo centrado em a com raio R

$$I = \left(a - R, a + R\right)$$

Os extremos do intervalo de convergência, $x = a \pm R$, podem ser abertos ou fechados

Testando a Convergência

1. Utilize o teste da razão (ou da raiz) para determinar o raio de convergência
2. Se R for finito teste os extremos do intervalo
   - teste da comparação
   - teste da integral
   - teste da série alternada

Exemplo 3

Analise a convergência da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}$$

Exemplo 3

Termo geral da série $u_n = \dfrac{(x-2)^n}{10^n}$ $\qquad |u_n| = \left|\dfrac{(x-2)^n}{10^n}\right|$

Aplicando o Teste da Raiz, para $x \neq 2$,

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{(x-2)^n}{10^n}\right|} = \sqrt[n]{\left|\frac{x-2}{10}\right|^n} = \frac{|x-2|}{10}$$

Calculando o limite

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-2|}{10} = \frac{|x-2|}{10}$$

Exemplo 3

A série converge quando

$$\rho < 1$$

$$\frac{|x-2|}{10} < 1$$

$$|x-2| < 10$$

Centro do Intervalo de Convergência

$$x = 2$$

Raio de Convergência

$$R = 10$$

Interior do Intervalo de Convergência

$$(-8, 12)$$

Falta analisar os extremos

Exemplo 3

Considerando $x = -8$, isto é, $x - 2 = -10$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}\bigg|_{x=-8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-10)^n}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

Diverge pelo Teste da Divergência

Exemplo 3

Considerando $x = 12$, isto é, $x - 2 = 10$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}\bigg|_{x=12} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1$$

Diverge pelo Teste da Divergência

Exemplo 3

Centro do Intervalo de Convergência

$$x = 2$$

Raio de Convergência

$$R = 10$$

Intervalo de Convergência

$$I = (-8, 12)$$

Exemplo 4

Analise a convergência da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}$$

Exemplo 4

Teste da Razão, para $x \neq 0$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{(-x)^n}\right| = \frac{|(-x)^{n+1}|}{(n+1)!}\,\frac{n!}{|(-x)|^n} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)n!}\,\frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1}$$

Calculando o limite

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Portanto a série converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$

Raio de Convergência $R = \infty$

Exemplo 5

Analise a convergência da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$$

Exemplo 5

Teste da Raiz, para $x \neq 0$

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{|n^n x^n|} = \sqrt[n]{|n|^n |x|^n} = \sqrt[n]{|n|^n}\,\sqrt[n]{|x|^n} = n|x|$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} n|x| = |x| \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

A série diverge para todo $x \neq 0$

Raio de Convergência é $R = 0$

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar a Seção 7.1 da Apostila

Exercícios: 1a-d, 1i-k, 1v-x

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações