

Séries de Taylor

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries



<https://material-didatico.github.io/pages/is>

Conteúdo

Séries de Taylor

Coeficientes da Série de Taylor

Definição da Série de Taylor

Exemplos

Lista Mínima

Séries de Potência e Séries de Taylor

► Séries de Potências

Dada uma Série de Potências construímos uma função

► Séries de Taylor

Dada uma função construímos uma Série de Potências

Séries de Taylor e Séries de Maclaurin

- Séries de Taylor

Centrada em um ponto qualquer, $a \in \mathbb{R}$

- Séries de Maclaurin

Série de Taylor centrada na origem, $a = 0$

Conteúdo

Séries de Taylor

Coeficientes da Série de Taylor

Definição da Série de Taylor

Exemplos

Lista Mínima

Construção da Série de Taylor

Supomos que uma função pode ser escrita como uma Série de Potências

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$$

Construção da Série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$$

$$= \mathbf{c_0} + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots$$

$$f(a) = \mathbf{c_0}$$

$$\mathbf{c_0} = f(a) = \frac{f(a)}{0!}$$

Construção da Série de Taylor

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left[c_0 + \mathbf{c_1}(x - a) + c_2(x - a)^2 + \cdots \right]$$

$$= \mathbf{c_1} + 2c_2(x - a) + 3c_3(x - a)^2 + \cdots$$

$$f'(a) = \mathbf{c_1}$$

$$\mathbf{c_1} = f'(a) = \frac{f'(a)}{1!}$$

Construção da Série de Taylor

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \left[c_1 + 2\mathbf{c}_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots \right]$$

$$= (2 \times 1)\mathbf{c}_2 + (3 \times 2)c_3(x-a) + (4 \times 3)c_4(x-a)^2 + \cdots$$

$$f''(a) = (2 \times 1)\mathbf{c}_2$$

$$\mathbf{c}_2 = \frac{f''(a)}{2!}$$

Construção da Série de Taylor

$$\begin{aligned}f^{(3)}(x) &= \frac{d}{dx} \left[(2 \times 1)c_2 + (3 \times 2)\mathbf{c}_3(x-a) + (4 \times 3)c_4(x-a)^2 + \dots \right] \\&= (3 \times 2 \times 1)\mathbf{c}_3 + (4 \times 3 \times 2)c_4(x-a) + (5 \times 4 \times 3)c_5(x-a)^2 + \dots\end{aligned}$$

$$f^{(3)}(a) = (3 \times 2 \times 1)\mathbf{c}_3$$

$$\mathbf{c}_3 = \frac{f^{(3)}(a)}{3!}$$

Construção da Série de Taylor

$$f^{(4)}(x) = \frac{d}{dx} \left[(3 \times 2 \times 1)c_3 + (4 \times 3 \times 2)\mathbf{c}_4(x-a) + (5 \times 4 \times 3)c_5(x-a)^2 + \dots \right]$$

$$= (4 \times 3 \times 2 \times 1)\mathbf{c}_4 + (5 \times 4 \times 3 \times 2)c_5(x-a) + \dots$$

$$f^{(4)}(a) = (4 \times 3 \times 2 \times 1)\mathbf{c}_4$$

$$\mathbf{c}_4 = \frac{f^{(4)}(a)}{4!}$$

Construção da Série de Taylor

Generalizando

$$f^{(n)}(a) = n!c_n \qquad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$$\text{Se } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \quad \text{então} \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Conteúdo

Séries de Taylor

Coeficientes da Série de Taylor

Definição da Série de Taylor

Exemplos

Lista Mínima

Série de Taylor

Se f é uma função infinitamente derivável em $x = a$
sua **Série de Taylor** centrada em $x = a$ é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n =$$
$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Observe que **não** escrevemos que $f(x)$ é **igual** a sua série de Taylor

Série de Maclaurin

Uma Série de Maclaurin é uma Série de Taylor centrada em zero, $a = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Polinômios de Taylor

Se f é uma função com k derivadas em $x = a$
seu **Polinômio de Taylor** de ordem k centrado em $x = a$ é

$$\sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n = f(a) + f'(a)(x - a) + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

Conteúdo

Séries de Taylor

Coeficientes da Série de Taylor

Definição da Série de Taylor

Exemplos

Lista Mínima

Exemplo 1

Calcule a Série de Taylor da função $f(x) = e^x$ centrada em $a = 0$

Exemplo 1 – Derivadas

Derivando

$$f^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} e^x = e^x$$

Avaliando em $a = 0$

$$f^{(k)}(0) = e^0 = 1$$

Exemplo 1 – Calculando os Coeficientes

$$c_0 = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} = \frac{1}{0!} = 1$$

$$c_1 = \frac{f^{(1)}(0)}{1!} = \frac{1}{1!} = 1$$

$$c_2 = \frac{f^{(2)}(0)}{2!} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$$

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!}$$

Exemplo 1 – Construindo a Série

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

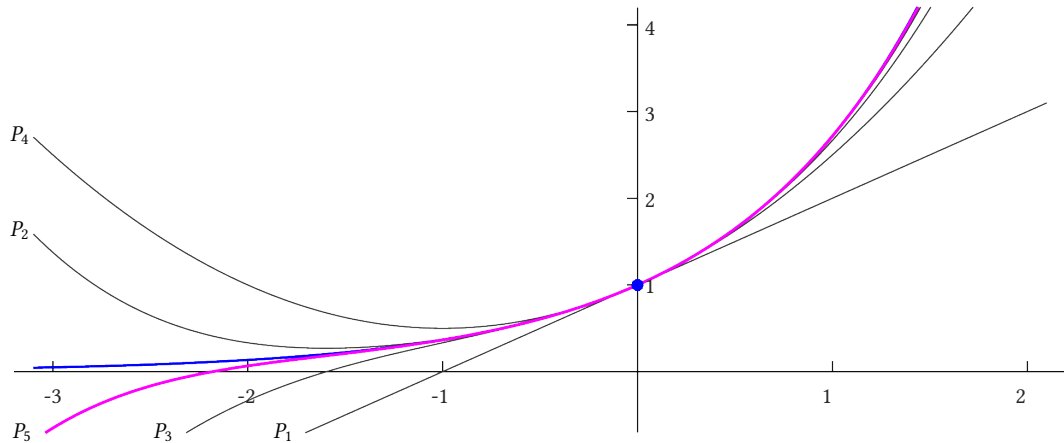
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Exemplo 1 – Convergência

- ▶ Vimos que a Série de Potências converge para todo $x \in \mathbb{R}$
- ▶ Mas a série converge para a função?

$$e^x \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Polinômios de Taylor a Função Exponencial



Exemplo 2

Calcule a série de Taylor do logaritmo natural, $\ln(x)$, centrada em 1

Exemplo 2– Derivadas

Derivando

$$f^{(0)}(x) = \ln(x)$$

$$f^{(1)}(x) = x^{-1}$$

$$f^{(2)}(x) = (-1)x^{-2}$$

$$f^{(3)}(x) = (-1)(-2)x^{-3}$$

$$f^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)x^{-4}$$

$$f^{(5)}(x) = (-1)(-2)(-3)(-4)x^{-5}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n} \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

Exemplo 2 – Derivadas

Avaliando as derivadas em $x = 1$

Para $n = 0$

$$f^{(0)}(1) = \ln(1) = 0$$

Para $n = 1, 2, 3, \dots$

$$f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1} (n-1)! 1^{-n} = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

Exemplo 2 – Calculando os Coeficientes

Calculando os coeficientes c_n

Para $n = 0$

$$c_0 = \frac{f^{(0)}(1)}{0!} = \frac{\ln(1)}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

Para $n = 1, 2, 3, \dots$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Exemplo 2 – Construindo a Série

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} \\ &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} + \dots \end{aligned}$$

Exemplo 3

Calcule a série de Taylor do cosseno, $\cos(x)$, centrada em 0

Exemplo 3– Derivadas

Derivando

$$f^{(0)}(x) = \cos(x)$$

$$f^{(1)}(x) = -\sin(x)$$

$$f^{(2)}(x) = -\cos(x)$$

$$f^{(3)}(x) = \sin(x)$$

$$f^{(4)}(x) = \cos(x)$$

$$f^{(5)}(x) = -\sin(x)$$

$$f^{(6)}(x) = -\cos(x)$$

Avaliando as derivadas em $x = 0$

$$f^{(0)}(0) = \cos(0) = 1$$

$$f^{(1)}(0) = -\sin(0) = 0$$

$$f^{(2)}(0) = -\cos(0) = -1$$

$$f^{(3)}(0) = \sin(0) = 0$$

$$f^{(4)}(0) = \cos(0) = 1$$

$$f^{(5)}(0) = -\sin(0) = 0$$

$$f^{(6)}(0) = -\cos(0) = -1$$

Exemplo 3 – Representando o padrão

Para n ímpar

$$f^{(n)}(0) = 0$$

Para n par

$$f^{(0)}(0) = 1$$

$$f^{(2)}(0) = -1$$

$$f^{(4)}(0) = 1$$

$$f^{(6)}(0) = -1$$

Para todo k , $n = 2k$ é sempre par

k	n	$f^{(2k)}(0)$
0	0	1
1	2	-1
2	4	1
3	6	-1
4	8	1

Assim $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$

Exemplo 3 – Calculando os Coeficientes

Calculando os coeficientes c_n

Para n ímpar

$$c_n = 0$$

Para n par, usamos $n = 2k$

$$c_n = c_{2k} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}$$

Exemplo 3 – Construindo a Série

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots$$

Exemplo 4

Encontre a série de Maclaurin para $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ e o raio de convergência da série de potências.

Exemplo 4 – Calculando as derivadas

$$f^{(0)}(x) = (1 - x)^{-2}$$

$$f^{(0)}(0) = 1$$

$$f^{(1)}(x) = (1 - x)^{-3} 2$$

$$f^{(1)}(0) = 2$$

$$f^{(2)}(x) = (1 - x)^{-4} 2 \cdot 3$$

$$f^{(2)}(0) = 3!$$

$$f^{(3)}(x) = (1 - x)^{-5} 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$f^{(3)}(0) = 4!$$

$$f^{(n)}(x) = (1 - x)^{-n-2} (n + 1)!$$

$$f^{(n)}(0) = (n + 1)!$$

Exemplo 4 – Série de Maclaurin

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) n!}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

Exemplo 4 – Analisando a convergência

Usando o teste da razão para determinar o Raio de Convergência

$$a_n = (n + 1)x^n$$

$$|a_n| = (n + 1)|x|^n$$

$$a_{n+1} = [(n + 1) + 1]x^{n+1} = (n + 2)x^{n+1}$$

$$|a_{n+1}| = (n + 2)|x|^{n+1}$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 2)|x|^{n+1}}{(n + 1)|x|^n} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2}{n + 1} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2/n}{1 + 1/n} = |x|$$

A série converge para $\rho = |x| < 1$ portanto $R = 1$

Conteúdo

Séries de Taylor

Coeficientes da Série de Taylor

Definição da Série de Taylor

Exemplos

Lista Mínima

Lista Mínima

Estudar a Seção 8.1 da Apostila

Exercícios: 1a-d, 2d-h, 3a-d, 5a-c

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações