

Convergência das Séries de Taylor

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries



Convergência da Série de Taylor

Teorema de Taylor

Exemplos

Lista Mínima

Polinômios e Séries de Taylor

Se f é k -derivável, em $x = a$, temos o **Polinômio de Taylor**

$$P_k(x) = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

Se f é infinitamente derivável, em $x = a$, temos a **Série de Taylor**

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

Questões

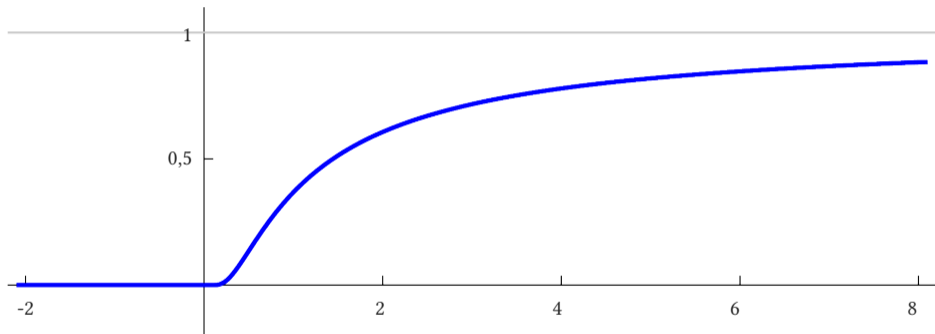
- ▶ Quão próximo o polinômio $P_k(x)$ está da função $f(x)$?
- ▶ A série converge, isso é, $S(x)$ existe?
- ▶ Se $S(x)$ existe, qual sua relação com $f(x)$?

Contraexemplo

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-1/x} & x > 0 \end{cases}$$

Contraexemplo



Contraexemplo

Suas derivadas em $x = 0$ são zero

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Sua Série de Taylor converge para

$$T(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Conteúdo

Convergência da Série de Taylor

Teorema de Taylor

Exemplos

Lista Mínima

Teorema de Taylor

Sejam

- ▶ $f: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com $n + 1$ derivadas contínuas em \mathcal{I}
- ▶ $a, x \in \mathcal{I}$

Então existe c entre a e x tal que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad \text{onde} \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

$R_n(x)$ é o Resto (ou Erro) de Ordem n

Convergência da Série de Taylor

Se $R_n(x) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ para todo $x \in \mathcal{I}$

A Série de Taylor de f converge para f no intervalo \mathcal{I}

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

Uma função igual a sua Série de Taylor é chamada **Analítica**

Estimativa de Erro

Se existir M tal que $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ para todo t entre x e a , inclusive

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Conteúdo

Convergência da Série de Taylor

Teorema de Taylor

Exemplos

Lista Mínima

Exemplo 1

Estimar o erro ao aproximar e^x , no intervalo $[-1, 1]$, por seu Polinômio de Taylor centrado em zero

Exemplo 1

Série de Taylor da exponencial

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Erro após a soma de n termos, $P_n(x)$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Para algum c entre zero e x

Exemplo 1

Não temos como saber o valor de c , mas sabemos que

$$f^{(n+1)}(c) = e^c \leq e \quad \text{pois} \quad c \leq 1$$

Portanto

$$|R_n(x)| < e \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!}$$

Exemplo 2

Mostre que a Série de Taylor de e^x converge para a e^x para todo $x \in [-1, 1]$

Exemplo 2

Verificamos que para qualquer $x \in [-1, 1]$

$$|R_n(x)| < \frac{e}{(n+1)!} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{(n+1)!} = 0$$

O **Teorema do Confronto** garante que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$

A Série de Taylor da exponencial converge para a exponencial para $x \in [-1, 1]$

Exemplo 3

Mostre que a Série de Taylor de e^x converge para a e^x para todo $x \in \mathbb{R}$

Sabemos que $f^{(n+1)}(c) = e^c$ para c entre x e 0

Se $x > 0$, $c \in [0, x]$ e $f^{(n+1)}(c) = e^c \leq e^x$

Se $x < 0$, $c \in [x, 0]$ e $f^{(n+1)}(c) = e^c \leq e^0 \leq e^{|x|}$

Portanto

$$\left| f^{(n+1)}(c) \right| \leq e^{|x|} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Exemplo 3

Para qualquer $x \in \mathbb{R}$

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} = e^{|x|} |x|^{n+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)!} = 0$$

o **Teorema do Confronto** garante que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$

A Série de Taylor da exponencial converge para a exponencial para $x \in \mathbb{R}$

Exemplo 4

Mostre que a Série de Taylor de $\cos(x)$ centrada em zero converge para a $\cos(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Exemplo 4

Série de Taylor da função $\cos(x)$

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Erro após a soma de n termos, $P_n(x)$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Para algum c entre zero e x

Exemplo 4

Sabemos que

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \cos(x) = \begin{cases} \pm \operatorname{sen}(x) \\ \pm \operatorname{cos}(x) \end{cases} \quad \text{ou}$$

Portanto

$$\left| f^{(n+1)}(c) \right| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

Exemplo 4

Assim

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

o **Teorema do Confronto** garante que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$

A Série de Taylor do cosseno converge para o cosseno para $x \in \mathbb{R}$

Exemplo 5

Qual o grau do Polinômio de Taylor necessário para aproximar $\cos(x)$ no intervalo $[-1, 1]$ com erro menor do que 10^{-6}

Exemplo 5

Já verificamos que

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Como $x \in [-1, 1]$

$$|R_n(x)| \leq \frac{1^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

Precisamos que

$$\frac{1}{(n+1)!} < 10^{-6}$$

$$(n+1)! > 10^6$$

Como $10! = 3\,628\,800$ temos

$$n = 9$$

Conteúdo

Convergência da Série de Taylor

Teorema de Taylor

Exemplos

Lista Mínima

Lista Mínima

Estudar a Seção 8.2 da Apostila

Exercício: 2

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações