Usos da Séries de Taylor – Identidade de Euler

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

Conteúdo

Identidade de Euler

Com os devidos cuidados todos os resultados sobre sequências e séries valem para os números complexos

$$z = a + bi \qquad \text{onde} \qquad a, b \in \mathbb{R} \qquad i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1 \qquad i^3 = -i \qquad i^4 = 1 \qquad i^5 = i \qquad \cdots$$

Identidade de Euler

Definições Formais para $z \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{sen}(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} - \cdots$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^8}{8!} - \cdots$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

Identidade de Euler

Escolhendo $z = i\theta$

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \cdots \\
&= 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \cdots \\
&= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) \\
&= \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta
\end{aligned}
$$

Identidade de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

"Todas as Constantes da Matemática"

$$e^{i\pi} \;=\; \cos\pi + i\operatorname{sen}\pi \;=\; -1 + i0 \;=\; -1$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Conteúdo