

Integrais Indefinidas

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries



<https://material-didatico.github.io/pages/is>

Conteúdo

Integrais Indefinidas

Encontrando uma Primitiva

Propriedades

Exemplos

Lista Mínima

Integrais Indefinidas

Sinônimos

- ▶ Integral indefinida

Integrais Indefinidas

Sinônimos

- ▶ Integral indefinida
- ▶ Primitiva

Integrais Indefinidas

Sinônimos

- ▶ Integral indefinida
- ▶ Primitiva
- ▶ Antiderivada

Definição

Uma função F é a **Primitiva** da função f

Definição

Uma função F é a **Primitiva** da função f em um intervalo I

Definição

Uma função F é a **Primitiva** da função f em um intervalo I se

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$$

Definição

Uma função F é a **Primitiva** da função f em um intervalo I se

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$$

para todo $x \in I$

Primitiva Mais Geral

Se G é uma primitiva de f no intervalo I ,

Primitiva Mais Geral

Se G é uma primitiva de f no intervalo I , então a **primitiva mais geral** de f em I

Primitiva Mais Geral

Se G é uma primitiva de f no intervalo I , então a **primitiva mais geral** de f em I é

$$F(x) = G(x) + C$$

Primitiva Mais Geral

Se G é uma primitiva de f no intervalo I , então a **primitiva mais geral** de f em I é

$$F(x) = G(x) + C$$

onde C é uma **constante arbitrária**

Primitiva Mais Geral

Se G é uma primitiva de f no intervalo I , então a **primitiva mais geral** de f em I é

$$F(x) = G(x) + C$$

onde C é uma **constante arbitrária** (desconhecida)

Notação da Primitiva, Antiderivada e Integral Indefinida de uma função f

$$\int f(x) dx$$

Conteúdo

Integrais Indefinidas

Encontrando uma Primitiva

Propriedades

Exemplos

Lista Mínima

Calculando Inversas – Raízes Quadradas

$\sqrt{x}$ é a operação inversa de x^2 para $x \geq 0$

Calculando Inversas – Raízes Quadradas

$\sqrt{x}$ é a operação inversa de x^2 para $x \geq 0$

Sabemos calcular o quadrado

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 4$$

$$3^2 = 9$$

$$4^2 = 16$$

Calculando Inversas – Raízes Quadradas

$\sqrt{x}$ é a operação inversa de x^2 para $x \geq 0$

Sabemos calcular o quadrado

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 4$$

$$3^2 = 9$$

$$4^2 = 16$$

Valores conhecidos para raízes

$$\sqrt{1} = 1$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{16} = 4$$

Calculando Inversas – Raízes Quadradas

$\sqrt{x}$ é a operação inversa de x^2 para $x \geq 0$

Sabemos calcular o quadrado

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 4$$

$$3^2 = 9$$

$$4^2 = 16$$

Valores conhecidos para raízes

$$\sqrt{1} = 1$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{16} = 4$$

Para os demais valores precisamos de uma nova técnica

Exemplo 1

Encontrar a primitiva mais geral de $f(x) = \cos(x)$

Exemplo 1 – Solução

Sabemos que

$$G(x) = \sin(x)$$

é uma **primitiva** para f ,

Exemplo 1 – Solução

Sabemos que

$$G(x) = \sin(x)$$

é uma **primitiva** para f , pois

$$G'(x)$$

Exemplo 1 – Solução

Sabemos que

$$G(x) = \text{sen}(x)$$

é uma **primitiva** para f , pois

$$G'(x) = \frac{d}{dx} \text{sen}(x)$$

Exemplo 1 – Solução

Sabemos que

$$G(x) = \text{sen}(x)$$

é uma **primitiva** para f , pois

$$G'(x) = \frac{d}{dx} \text{sen}(x) = \cos(x)$$

Exemplo 1 – Solução

Sabemos que

$$G(x) = \text{sen}(x)$$

é uma **primitiva** para f , pois

$$G'(x) = \frac{d}{dx} \text{sen}(x) = \cos(x) = f(x)$$

Exemplo 1 – Solução

Sabemos que

$$G(x) = \text{sen}(x)$$

é uma **primitiva** para f , pois

$$G'(x) = \frac{d}{dx} \text{sen}(x) = \cos(x) = f(x)$$

Portanto, a **primitiva mais geral** de f é

Exemplo 1 – Solução

Sabemos que

$$G(x) = \text{sen}(x)$$

é uma **primitiva** para f , pois

$$G'(x) = \frac{d}{dx} \text{sen}(x) = \cos(x) = f(x)$$

Portanto, a **primitiva mais geral** de f é

$$F(x)$$

Exemplo 1 – Solução

Sabemos que

$$G(x) = \text{sen}(x)$$

é uma **primitiva** para f , pois

$$G'(x) = \frac{d}{dx} \text{sen}(x) = \cos(x) = f(x)$$

Portanto, a **primitiva mais geral** de f é

$$F(x) = \int \cos(x) \, dx$$

Exemplo 1 – Solução

Sabemos que

$$G(x) = \text{sen}(x)$$

é uma **primitiva** para f , pois

$$G'(x) = \frac{d}{dx} \text{sen}(x) = \cos(x) = f(x)$$

Portanto, a **primitiva mais geral** de f é

$$F(x) = \int \cos(x) dx = G(x) + C$$

Exemplo 1 – Solução

Sabemos que

$$G(x) = \text{sen}(x)$$

é uma **primitiva** para f , pois

$$G'(x) = \frac{d}{dx} \text{sen}(x) = \cos(x) = f(x)$$

Portanto, a **primitiva mais geral** de f é

$$F(x) = \int \cos(x) dx = G(x) + C = \text{sen}(x) + C$$

Tabela de Primitivas

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

Tabela de Primitivas

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

Tabela de Primitivas

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

Tabela de Primitivas

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x) + c$$

Tabela de Primitivas

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x) + c$$

$$\int \cos(x) dx = \operatorname{sen}(x) + c$$

Tabela de Primitivas

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

$$\int \sec^2(x) dx = \operatorname{tg}(x) + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x) + c$$

$$\int \cos(x) dx = \operatorname{sen}(x) + c$$

Tabela de Primitivas

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x) + c$$

$$\int \cos(x) dx = \operatorname{sen}(x) + c$$

$$\int \sec^2(x) dx = \operatorname{tg}(x) + c$$

$$\int \sec(x) \operatorname{tg}(x) dx = \sec(x) + c$$

Tabela de Primitivas

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x) + c$$

$$\int \cos(x) dx = \operatorname{sen}(x) + c$$

$$\int \sec^2(x) dx = \operatorname{tg}(x) + c$$

$$\int \sec(x) \operatorname{tg}(x) dx = \sec(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen}(x) + c$$

Tabela de Primitivas

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x) + c$$

$$\int \cos(x) dx = \operatorname{sen}(x) + c$$

$$\int \sec^2(x) dx = \operatorname{tg}(x) + c$$

$$\int \sec(x) \operatorname{tg}(x) dx = \sec(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen}(x) + c$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arccos}(x) + c$$

Tabela de Primitivas

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x) + c$$

$$\int \cos(x) dx = \operatorname{sen}(x) + c$$

$$\int \sec^2(x) dx = \operatorname{tg}(x) + c$$

$$\int \sec(x) \operatorname{tg}(x) dx = \sec(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen}(x) + c$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arccos}(x) + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg}(x) + c$$

Conteúdo

Integrais Indefinidas

Encontrando uma Primitiva

Propriedades

Exemplos

Lista Mínima

Linearidade da Integral Indefinida

Sejam f e g integráveis e k uma constante

Linearidade da Integral Indefinida

Sejam f e g integráveis e k uma constante

$$\int f(x) + g(x) dx$$

Linearidade da Integral Indefinida

Sejam f e g integráveis e k uma constante

$$\int f(x) + g(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

Linearidade da Integral Indefinida

Sejam f e g integráveis e k uma constante

$$\int f(x) + g(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

$$\int k f(x) \, dx$$

Linearidade da Integral Indefinida

Sejam f e g integráveis e k uma constante

$$\int f(x) + g(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

$$\int kf(x) \, dx = k \int f(x) \, dx$$

Exemplo 2

Encontre a primitiva mais geral da função $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$

Exemplo 2 – Solução

$$F(x) = \int f(x) dx$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx \\ &= \int 3x^2 + 2x + 5 \, dx \end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx \\ &= \int 3x^2 + 2x + 5 dx \\ &= \int 3x^2 dx + \int 2x dx + \int 5 dx \end{aligned} \quad \text{(Linearidade)}$$

Exemplo 2 – Solução

$$F(x) = \int f(x) dx$$

$$= \int 3x^2 + 2x + 5 dx$$

$$= \int 3x^2 dx + \int 2x dx + \int 5 dx \quad (\text{Linearidade})$$

$$= 3 \int x^2 dx + 2 \int x dx + 5 \int dx \quad (\text{Linearidade})$$

Exemplo 2 – Solução

$$F(x) = \int f(x) dx$$

$$= \int 3x^2 + 2x + 5 dx$$

$$= \int 3x^2 dx + \int 2x dx + \int 5 dx \quad (\text{Linearidade})$$

$$= 3 \int x^2 dx + 2 \int x dx + 5 \int dx \quad (\text{Linearidade})$$

$$= 3 \frac{x^{2+1}}{2+1} + 2 \frac{x^{1+1}}{1+1} + 5 \frac{x^{0+1}}{0+1} + C \quad (\text{Tabela})$$

Exemplo 2 – Solução

$$F(x) = \int f(x) dx$$

$$= \int 3x^2 + 2x + 5 dx$$

$$= \int 3x^2 dx + \int 2x dx + \int 5 dx \quad (\text{Linearidade})$$

$$= 3 \int x^2 dx + 2 \int x dx + 5 \int dx \quad (\text{Linearidade})$$

$$= 3 \frac{x^{2+1}}{2+1} + 2 \frac{x^{1+1}}{1+1} + 5 \frac{x^{0+1}}{0+1} + C \quad (\text{Tabela})$$

$$= x^3 + x^2 + 5x + C$$

Multiplicação da Variável por Constante

Qual a Primitiva da função $f(ax + b)$, onde a e b são constantes?

Multiplicação da Variável por Constante

Qual a Primitiva da função $f(ax + b)$, onde a e b são constantes?

Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$

Multiplicação da Variável por Constante

Qual a Primitiva da função $f(ax + b)$, onde a e b são constantes?

Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$

$$\frac{d}{dx}F(ax + b)$$

Multiplicação da Variável por Constante

Qual a Primitiva da função $f(ax + b)$, onde a e b são constantes?

Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$

$$\frac{d}{dx}F(ax + b) = F'(ax + b) \frac{d}{dx}(ax + b)$$

Multiplicação da Variável por Constante

Qual a Primitiva da função $f(ax + b)$, onde a e b são constantes?

Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$

$$\frac{d}{dx}F(ax + b) = F'(ax + b) \frac{d}{dx}(ax + b) = f(ax + b)a$$

Multiplicação da Variável por Constante

Qual a Primitiva da função $f(ax + b)$, onde a e b são constantes?

Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$

$$\frac{d}{dx}F(ax + b) = F'(ax + b) \frac{d}{dx}(ax + b) = f(ax + b)a$$

$$\frac{d}{dx} \frac{F(ax + b)}{a} = f(ax + b)$$

Multiplicação da Variável por Constante

Qual a Primitiva da função $f(ax + b)$, onde a e b são constantes?

Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$

$$\frac{d}{dx}F(ax + b) = F'(ax + b) \frac{d}{dx}(ax + b) = f(ax + b)a$$

$$\frac{d}{dx} \frac{F(ax + b)}{a} = f(ax + b)$$

Então

$$\int f(ax + b)dx = \frac{F(ax + b)}{a} + C$$

Conteúdo

Integrais Indefinidas

Encontrando uma Primitiva

Propriedades

Exemplos

Lista Mínima

Exemplo 3

Calcule $\int \cos(3\pi x) - \sqrt{x} \, dx$

Exemplo 3 – Solução

$$F(x)$$

Exemplo 3 – Solução

$$F(x) = \int \cos(3\pi x) - \sqrt{x} \, dx$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \cos(3\pi x) - \sqrt{x} \, dx \\ &= \int \cos(3\pi x) \, dx - \int \sqrt{x} \, dx \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \cos(3\pi x) - \sqrt{x} \, dx \\ &= \int \cos(3\pi x) \, dx - \int \sqrt{x} \, dx \\ &= \int \cos(3\pi x) \, dx - \int x^{1/2} \, dx \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \cos(3\pi x) - \sqrt{x} \, dx \\ &= \int \cos(3\pi x) \, dx - \int \sqrt{x} \, dx \\ &= \int \cos(3\pi x) \, dx - \int x^{1/2} \, dx \\ &= \frac{\text{sen}(3\pi x)}{3\pi} - \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + C \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \cos(3\pi x) - \sqrt{x} \, dx \\ &= \int \cos(3\pi x) \, dx - \int \sqrt{x} \, dx \\ &= \int \cos(3\pi x) \, dx - \int x^{1/2} \, dx \\ &= \frac{\text{sen}(3\pi x)}{3\pi} - \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + C \\ &= \frac{\text{sen}(3\pi x)}{3\pi} - \frac{2x^{3/2}}{3} + C \end{aligned}$$

Exemplo 4

Encontre todas as funções g , tais que

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen}(x) + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$$

Exemplo 4 – Solução

Queremos as primitivas de g'

Exemplo 4 – Solução

Queremos as primitivas de g'

Reescrevemos g' como

Exemplo 4 – Solução

Queremos as primitivas de g'

Reescrevemos g' como

$$g'(x)$$

Exemplo 4 – Solução

Queremos as primitivas de g'

Reescrevemos g' como

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen}(x) + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$$

Exemplo 4 – Solução

Queremos as primitivas de g'

Reescrevemos g' como

$$\begin{aligned} g'(x) &= 4 \operatorname{sen}(x) + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x} \\ &= 4 \operatorname{sen}(x) + \frac{2x^5}{x} - \frac{x^{1/2}}{x} \end{aligned}$$

Exemplo 4 – Solução

Queremos as primitivas de g'

Reescrevemos g' como

$$\begin{aligned} g'(x) &= 4 \operatorname{sen}(x) + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x} \\ &= 4 \operatorname{sen}(x) + \frac{2x^5}{x} - \frac{x^{1/2}}{x} \\ &= 4 \operatorname{sen}(x) + 2x^4 - x^{-1/2} \end{aligned}$$

Exemplo 4 – Solução

$$g(x)$$

Exemplo 4 – Solução

$$g(x) = \int g'(x) dx$$

Exemplo 4 – Solução

$$\begin{aligned} g(x) &= \int g'(x) dx \\ &= \int 4 \operatorname{sen}(x) + 2x^4 - x^{-1/2} dx \end{aligned}$$

Exemplo 4 – Solução

$$\begin{aligned} g(x) &= \int g'(x) dx \\ &= \int 4 \operatorname{sen}(x) + 2x^4 - x^{-1/2} dx \\ &= 4 \int \operatorname{sen}(x) dx + 2 \int x^4 dx - \int x^{-1/2} dx \end{aligned}$$

Exemplo 4 – Solução

$$\begin{aligned}g(x) &= \int g'(x) dx \\&= \int 4 \operatorname{sen}(x) + 2x^4 - x^{-1/2} dx \\&= 4 \int \operatorname{sen}(x) dx + 2 \int x^4 dx - \int x^{-1/2} dx \\&= 4(-\cos(x)) + 2\frac{x^5}{5} - \frac{x^{1/2}}{1/2} + C\end{aligned}$$

Exemplo 4 – Solução

$$\begin{aligned}g(x) &= \int g'(x) dx \\&= \int 4 \operatorname{sen}(x) + 2x^4 - x^{-1/2} dx \\&= 4 \int \operatorname{sen}(x) dx + 2 \int x^4 dx - \int x^{-1/2} dx \\&= 4(-\cos(x)) + 2 \frac{x^5}{5} - \frac{x^{1/2}}{1/2} + C \\&= -4 \cos(x) + \frac{2}{5} x^5 - 2\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

Exemplo 5

Encontre f tal que

$$f'(x) = e^x + 20(1 + x^2)^{-1}$$

$$\text{e } f(0) = -2$$

Exemplo 5 – Solução

Primeiro vamos encontrar a família de funções f que são primitivas de f'

Exemplo 5 – Solução

Primeiro vamos encontrar a família de funções f que são primitivas de f'

Depois usamos a condição $f(0) = -2$ para encontrar a primitiva solicitada

Exemplo 5 – Solução

Primitiva mais geral

Exemplo 5 – Solução

Primitiva mais geral

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

Exemplo 5 – Solução

Primitiva mais geral

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int e^x + 20 (1 + x^2)^{-1} dx \end{aligned}$$

Exemplo 5 – Solução

Primitiva mais geral

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int e^x + 20 (1 + x^2)^{-1} dx \\ &= \int e^x + 20 \frac{1}{1 + x^2} dx \end{aligned}$$

Exemplo 5 – Solução

Primitiva mais geral

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int e^x + 20 (1 + x^2)^{-1} dx \\ &= \int e^x + 20 \frac{1}{1 + x^2} dx \\ &= \int e^x dx + 20 \int \frac{1}{1 + x^2} dx \end{aligned}$$

Exemplo 5 – Solução

Primitiva mais geral

$$\begin{aligned}f(x) &= \int f'(x) dx \\&= \int e^x + 20 (1 + x^2)^{-1} dx \\&= \int e^x + 20 \frac{1}{1 + x^2} dx \\&= \int e^x dx + 20 \int \frac{1}{1 + x^2} dx \\&= e^x + 20 \operatorname{arctg}(x) + C\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Solução

Vamos determinar o valor de C usando $f(0) = -2$

Exemplo 5 – Solução

Vamos determinar o valor de C usando $f(0) = -2$

$$f(0) = -2$$

Exemplo 5 – Solução

Vamos determinar o valor de C usando $f(0) = -2$

$$f(0) = -2$$

$$e^0 + 20 \operatorname{arctg}(0) + C = -2$$

Exemplo 5 – Solução

Vamos determinar o valor de C usando $f(0) = -2$

$$f(0) = -2$$

$$e^0 + 20 \operatorname{arctg}(0) + C = -2$$

$$C = -2 - e^0 - 20 \operatorname{arctg}(0)$$

Exemplo 5 – Solução

Vamos determinar o valor de C usando $f(0) = -2$

$$f(0) = -2$$

$$e^0 + 20 \operatorname{arctg}(0) + C = -2$$

$$C = -2 - e^0 - 20 \operatorname{arctg}(0)$$

$$= -2 - 1 - 0$$

Exemplo 5 – Solução

Vamos determinar o valor de C usando $f(0) = -2$

$$f(0) = -2$$

$$e^0 + 20 \operatorname{arctg}(0) + C = -2$$

$$C = -2 - e^0 - 20 \operatorname{arctg}(0)$$

$$= -2 - 1 - 0$$

$$= -3$$

Exemplo 5 – Solução

Vamos determinar o valor de C usando $f(0) = -2$

$$f(0) = -2$$

$$e^0 + 20 \operatorname{arctg}(0) + C = -2$$

$$C = -2 - e^0 - 20 \operatorname{arctg}(0)$$

$$= -2 - 1 - 0$$

$$= -3$$

Portanto

$$f(x) = e^x + 20 \operatorname{arctg}(x) - 3$$

Conteúdo

Integrais Indefinidas

Encontrando uma Primitiva

Propriedades

Exemplos

Lista Mínima

Lista Mínima

Estudar a Seção 2.2 da Apostila

Exercícios: 1a-f, 2, 3

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações