

Integrais Definidas

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries



<https://material-didatico.github.io/pages/is>

Conteúdo

Integrais Definidas

Propriedades da integral definida

Exemplos

Lista Mínima

Fórmulas para o cálculo de áreas

Figuras regulares

Fórmulas para o cálculo de áreas

Figuras regulares

Área de um Retângulo $A = (\text{base}) \times (\text{altura}) = bh$

Fórmulas para o cálculo de áreas

Figuras regulares

Área de um Retângulo $A = (\text{base}) \times (\text{altura}) = bh$

Área de um Triângulo $A = \frac{(\text{base}) \times (\text{altura})}{2} = \frac{bh}{2}$

Fórmulas para o cálculo de áreas

Figuras regulares

Área de um Retângulo $A = (\text{base}) \times (\text{altura}) = bh$

Área de um Triângulo $A = \frac{(\text{base}) \times (\text{altura})}{2} = \frac{bh}{2}$

Área de um Círculo $A = \pi(\text{raio})^2 = \pi r^2$

Fórmulas para o cálculo de áreas

Figuras regulares

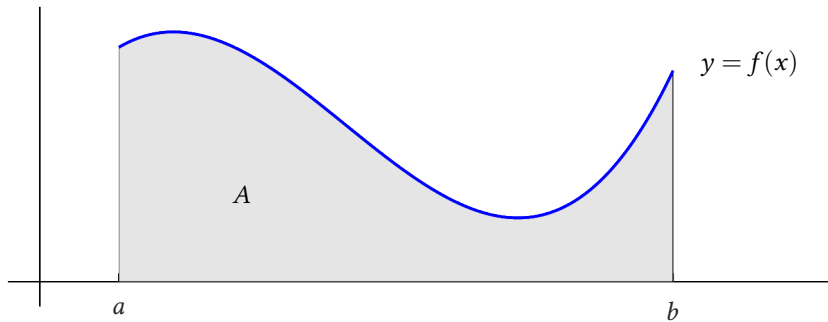
Área de um Retângulo $A = (\text{base}) \times (\text{altura}) = bh$

Área de um Triângulo $A = \frac{(\text{base}) \times (\text{altura})}{2} = \frac{bh}{2}$

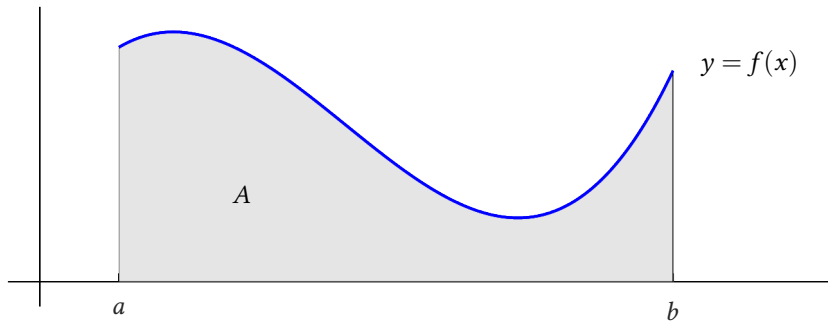
Área de um Círculo $A = \pi(\text{raio})^2 = \pi r^2$

O que fazer com as figuras irregulares?

Área entre o gráfico de uma função e o eixo x

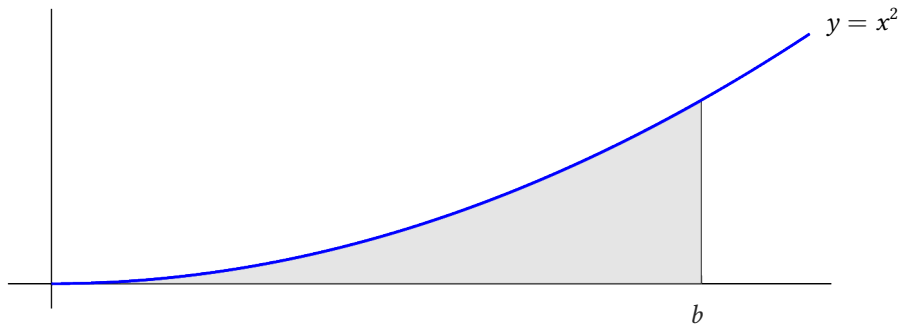


Área entre o gráfico de uma função e o eixo x

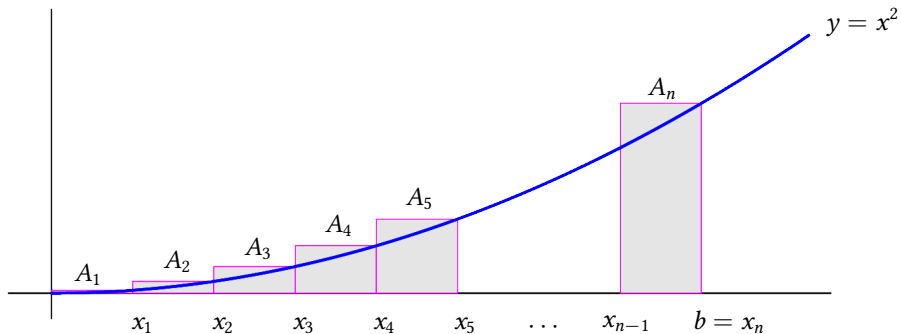


Como calcular a área?

Exemplo: área sob o gráfico de x^2 entre 0 e b



Aproximando a área sob o gráfico



Aproximando a área sob o gráfico

Partição do intervalo $[0, b]$ em n subintervalos iguais

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Aproximando a área sob o gráfico

Partição do intervalo $[0, b]$ em n subintervalos iguais

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Tamanho de cada subintervalo

$$\Delta x$$

Aproximando a área sob o gráfico

Partição do intervalo $[0, b]$ em n subintervalos iguais

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Tamanho de cada subintervalo

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i$$

Aproximando a área sob o gráfico

Partição do intervalo $[0, b]$ em n subintervalos iguais

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Tamanho de cada subintervalo

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{b}{n}$$

Aproximando a área sob o gráfico

Partição do intervalo $[0, b]$ em n subintervalos iguais

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Tamanho de cada subintervalo

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{b}{n}$$

Valor de x_i

$$x_i$$

Aproximando a área sob o gráfico

Partição do intervalo $[0, b]$ em n subintervalos iguais

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Tamanho de cada subintervalo

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{b}{n}$$

Valor de x_i

$$x_i = i\Delta x$$

Aproximando a área sob o gráfico

Partição do intervalo $[0, b]$ em n subintervalos iguais

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Tamanho de cada subintervalo

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{b}{n}$$

Valor de x_i

$$x_i = i\Delta x = i\frac{b}{n}$$

Aproximando a área sob o gráfico

Partição do intervalo $[0, b]$ em n subintervalos iguais

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Tamanho de cada subintervalo

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{b}{n}$$

Valor de x_i

$$x_i = i\Delta x = i\frac{b}{n}$$

Área de cada retângulo

$$A_i$$

Aproximando a área sob o gráfico

Partição do intervalo $[0, b]$ em n subintervalos iguais

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Tamanho de cada subintervalo

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{b}{n}$$

Valor de x_i

$$x_i = i\Delta x = i\frac{b}{n}$$

Área de cada retângulo

$$A_i = f(x_i)\Delta x$$

Aproximando a área sob o gráfico

Partição do intervalo $[0, b]$ em n subintervalos iguais

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Tamanho de cada subintervalo

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{b}{n}$$

Valor de x_i

$$x_i = i\Delta x = i\frac{b}{n}$$

Área de cada retângulo

$$A_i = f(x_i)\Delta x = x_i^2\Delta x$$

Aproximando a área sob o gráfico

Partição do intervalo $[0, b]$ em n subintervalos iguais

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Tamanho de cada subintervalo

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{b}{n}$$

Valor de x_i

$$x_i = i\Delta x = i\frac{b}{n}$$

Área de cada retângulo

$$A_i = f(x_i)\Delta x = x_i^2\Delta x = \left(i\frac{b}{n}\right)^2 \frac{b}{n}$$

Aproximando a área sob o gráfico

Partição do intervalo $[0, b]$ em n subintervalos iguais

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Tamanho de cada subintervalo

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{b}{n}$$

Valor de x_i

$$x_i = i\Delta x = i\frac{b}{n}$$

Área de cada retângulo

$$A_i = f(x_i)\Delta x = x_i^2\Delta x = \left(i\frac{b}{n}\right)^2 \frac{b}{n} = \frac{b^3}{n^3}i^2$$

Somando os Retângulos

$$S_n$$

Somando os Retângulos

$$S_n = \sum_{i=1}^n A_i$$

Somando os Retângulos

$$S_n = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \frac{b^3}{n^3} i^2$$

Somando os Retângulos

$$S_n = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \frac{b^3}{n^3} i^2 = \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2$$

Somando os Retângulos

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \frac{b^3}{n^3} i^2 = \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Somando os Retângulos

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \frac{b^3}{n^3} i^2 = \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{b^3}{n^3} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \end{aligned}$$

Somando os Retângulos

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \frac{b^3}{n^3} i^2 = \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{b^3}{n^3} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \\ &= \frac{b^3}{6} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

Calculando pelo limite

A

Calculando pelo limite

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Calculando pelo limite

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{6} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

Calculando pelo limite

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{6} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \\ &= \frac{b^3}{6} \left(2 + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

Calculando pelo limite

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{6} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

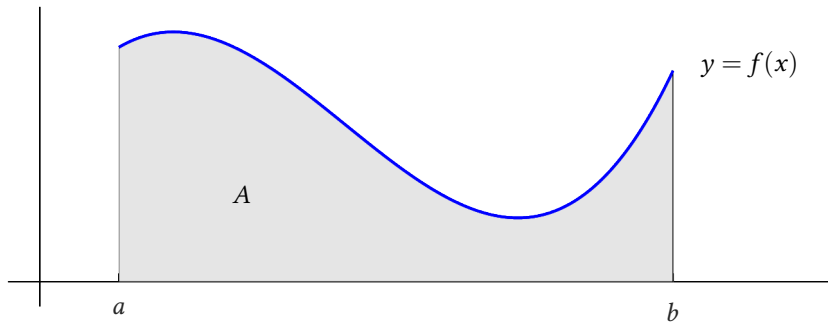
$$= \frac{b^3}{6} \left(2 + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \right)$$

$$= \frac{b^3}{6} (2 + 0 + 0)$$

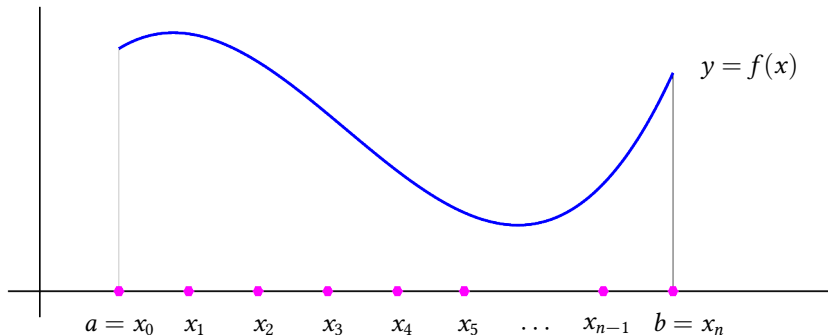
Calculando pelo limite

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{6} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \\ &= \frac{b^3}{6} \left(2 + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \right) \\ &= \frac{b^3}{6} (2 + 0 + 0) \\ &= \frac{b^3}{3} \end{aligned}$$

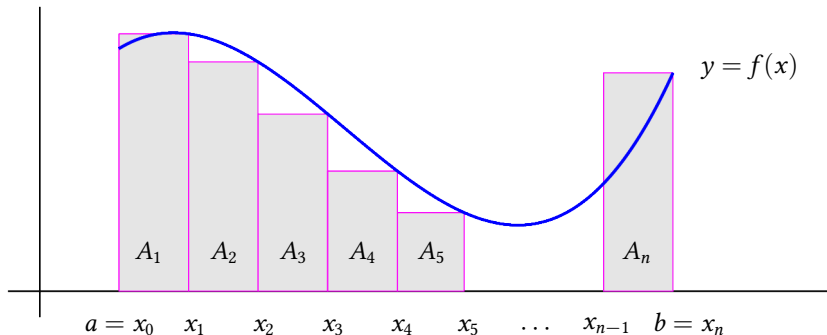
Área entre o gráfico de f e o eixo x no intervalo $[a, b]$



Partição do intervalo $[a, b]$



Aproximação por retângulos



Aproximação por retângulos

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Aproximação por retângulos

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

$$x_i = a + i\Delta x$$

Aproximação por retângulos

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

$$x_i = a + i\Delta x$$

$$A_i = f(x_i)\Delta x$$

Aproximação por retângulos

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

$$x_i = a + i\Delta x$$

$$A_i = f(x_i)\Delta x$$

$$S_n = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n$$

Aproximação por retângulos

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

$$x_i = a + i\Delta x$$

$$A_i = f(x_i)\Delta x$$

$$S_n = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n$$

$$= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

Aproximação por retângulos

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

$$x_i = a + i\Delta x$$

$$A_i = f(x_i)\Delta x$$

$$S_n = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n$$

$$= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

Área via soma de Riemann

A **área** da região sob o gráfico de uma **função contínua** f no intervalo $[a, b]$ é dada pelo limite

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

Definição Integral Definida – Soma de Riemann

A **Integral Definida** da função f no intervalo $[a, b]$ é

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x$$

Definição Integral Definida – Soma de Riemann

A **Integral Definida** da função f no intervalo $[a, b]$ é

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$$

$c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ são os **pontos amostrais**

Definição Integral Definida – Soma de Riemann

A **Integral Definida** da função f no intervalo $[a, b]$ é

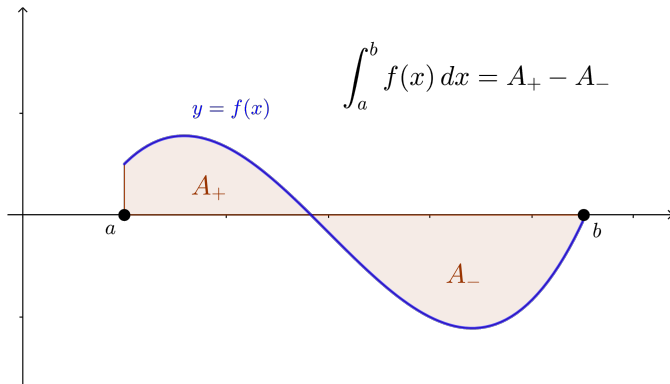
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$$

$c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ são os **pontos amostrais**

Desde que o limite exista

Consequência da Definição

A área tem o mesmo **sinal** da função



Conteúdo

Integrais Definidas

Propriedades da integral definida

Exemplos

Lista Mínima

Sentido de integração

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Intervalo de comprimento nulo

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

Área de um retângulo

$$\int_a^b c \, dx = c(b - a)$$

Para c constante

Soma e subtração de funções

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) - g(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

Multiplicação de função por constante

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

Para c constante

Separando o intervalo em dois

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

Área positiva

Se $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$, então $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

Comparação entre áreas

Se $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$, então

$$\int_a^b f(x) \, dx \geq \int_a^b g(x) \, dx$$

Limitação inferior e superior

Se $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$ então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Conteúdo

Integrais Definidas

Propriedades da integral definida

Exemplos

Lista Mínima

Exemplo 1

Calcule a área abaixo do gráfico da função $f(x) = x + 2$ no intervalo $[0, b]$

Exemplo 1 – Solução

$$A = \int_0^b f(x) \, dx$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned} A &= \int_0^b f(x) \, dx \\ &= \int_0^b x + 2 \, dx \end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

$$A = \int_0^b f(x) dx$$

$$= \int_0^b x + 2 dx$$

$$= \int_0^b x dx + 2 \int_0^b dx \quad (\text{Linearidade})$$

Exemplo 1 – Solução

$$A = \int_0^b f(x) dx$$

$$= \int_0^b x + 2 dx$$

$$= \int_0^b x dx + 2 \int_0^b dx \quad (\text{Linearidade})$$

$$= \frac{b^2}{2} + 2b \quad (\text{Área do triângulo e do retângulo})$$

Exemplo 2

Calcule $\int_{-7}^7 x^3 dx$

Exemplo 2 – Solução

$$A = \int_{-7}^7 x^3 dx$$

Exemplo 2 – Solução

$$A = \int_{-7}^7 x^3 dx = \int_{-7}^0 x^3 dx + \int_0^7 x^3 dx$$

Exemplo 2 – Solução

$$A = \int_{-7}^7 x^3 dx = \int_{-7}^0 x^3 dx + \int_0^7 x^3 dx$$

por simetria

$$\int_{-7}^0 x^3 dx = - \int_0^7 x^3 dx$$

Exemplo 2 – Solução

$$A = \int_{-7}^7 x^3 dx = \int_{-7}^0 x^3 dx + \int_0^7 x^3 dx$$

por simetria

$$\int_{-7}^0 x^3 dx = - \int_0^7 x^3 dx$$

portanto

$$A = 0$$

Exemplo 3

Calcule $\int_{-2}^4 |x| dx$

Exemplo 3 – Solução

$$A = \int_{-2}^4 |x| \, dx$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^4 |x| \, dx \\ &= \int_{-2}^0 |x| \, dx + \int_0^4 |x| \, dx \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^4 |x| \, dx \\ &= \int_{-2}^0 |x| \, dx + \int_0^4 |x| \, dx \\ &= \int_{-2}^0 -x \, dx + \int_0^4 x \, dx \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^4 |x| \, dx \\ &= \int_{-2}^0 |x| \, dx + \int_0^4 |x| \, dx \\ &= \int_{-2}^0 -x \, dx + \int_0^4 x \, dx \\ &= \frac{2^2}{2} + \frac{4^2}{2} \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^4 |x| \, dx \\ &= \int_{-2}^0 |x| \, dx + \int_0^4 |x| \, dx \\ &= \int_{-2}^0 -x \, dx + \int_0^4 x \, dx \\ &= \frac{2^2}{2} + \frac{4^2}{2} \\ &= 2 + 8 \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^4 |x| \, dx \\ &= \int_{-2}^0 |x| \, dx + \int_0^4 |x| \, dx \\ &= \int_{-2}^0 -x \, dx + \int_0^4 x \, dx \\ &= \frac{2^2}{2} + \frac{4^2}{2} \\ &= 2 + 8 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Exemplo 4

Calcule a integral da função de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

no intervalo $[-1, 2]$.

Exemplo 4 – Solução

$$A = \int_{-1}^2 H(x) \, dx$$

Exemplo 4 – Solução

$$A = \int_{-1}^2 H(x) \, dx = \int_{-1}^0 0 \, dx + \int_0^2 1 \, dx$$

Exemplo 4 – Solução

$$A = \int_{-1}^2 H(x) \, dx = \int_{-1}^0 0 \, dx + \int_0^2 1 \, dx$$

$$\int_{-1}^0 0 \, dx$$

Exemplo 4 – Solução

$$A = \int_{-1}^2 H(x) \, dx = \int_{-1}^0 0 \, dx + \int_0^2 1 \, dx$$

$$\int_{-1}^0 0 \, dx = 0$$

Exemplo 4 – Solução

$$A = \int_{-1}^2 H(x) \, dx = \int_{-1}^0 0 \, dx + \int_0^2 1 \, dx$$

$$\int_{-1}^0 0 \, dx = 0$$

$$\int_0^2 1 \, dx$$

Exemplo 4 – Solução

$$A = \int_{-1}^2 H(x) \, dx = \int_{-1}^0 0 \, dx + \int_0^2 1 \, dx$$

$$\int_{-1}^0 0 \, dx = 0$$

$$\int_0^2 1 \, dx = \text{base} \times \text{altura}$$

Exemplo 4 – Solução

$$A = \int_{-1}^2 H(x) \, dx = \int_{-1}^0 0 \, dx + \int_0^2 1 \, dx$$

$$\int_{-1}^0 0 \, dx = 0$$

$$\int_0^2 1 \, dx = \text{base} \times \text{altura} = (2 - 0) \times 1$$

Exemplo 4 – Solução

$$A = \int_{-1}^2 H(x) \, dx = \int_{-1}^0 0 \, dx + \int_0^2 1 \, dx$$

$$\int_{-1}^0 0 \, dx = 0$$

$$\int_0^2 1 \, dx = \text{base} \times \text{altura} = (2 - 0) \times 1 = 2$$

Exemplo 4 – Solução

$$A = \int_{-1}^2 H(x) \, dx = \int_{-1}^0 0 \, dx + \int_0^2 1 \, dx$$

$$\int_{-1}^0 0 \, dx = 0$$

$$\int_0^2 1 \, dx = \text{base} \times \text{altura} = (2 - 0) \times 1 = 2$$

A

Exemplo 4 – Solução

$$A = \int_{-1}^2 H(x) dx = \int_{-1}^0 0 dx + \int_0^2 1 dx$$

$$\int_{-1}^0 0 dx = 0$$

$$\int_0^2 1 dx = \text{base} \times \text{altura} = (2 - 0) \times 1 = 2$$

$$A = 0 + 2$$

Exemplo 4 – Solução

$$A = \int_{-1}^2 H(x) dx = \int_{-1}^0 0 dx + \int_0^2 1 dx$$

$$\int_{-1}^0 0 dx = 0$$

$$\int_0^2 1 dx = \text{base} \times \text{altura} = (2 - 0) \times 1 = 2$$

$$A = 0 + 2 = 2$$

Conteúdo

Integrais Definidas

Propriedades da integral definida

Exemplos

Lista Mínima

Lista Mínima

Estudar a Seção 2.3 da Apostila

Exercícios: 4, 5

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações