

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 2

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries



<https://material-didatico.github.io/pages/is>

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 2

Se f for **contínua** em $[a, b]$

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 2

Se f for **contínua** em $[a, b]$ então, para **qualquer primitiva** F de f ,

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 2

Se f for **contínua** em $[a, b]$ então, para **qualquer primitiva** F de f ,

$$\int_a^b f(x) dx$$

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 2

Se f for **contínua** em $[a, b]$ então, para **qualquer primitiva** F de f ,

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 2

Se f for **contínua** em $[a, b]$ então, para **qualquer primitiva** F de f ,

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

Demonstração

Queremos mostrar que

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

Demonstração

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 1

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

é uma primitiva de f

Demonstração

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 1

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

é uma primitiva de f

Qualquer outra primitiva tem a forma

$$F(x) = G(x) + C$$

Demonstração

$$F(b) - F(a)$$

Demonstração

$$F(b) - F(a) = (G(b) + C) - (G(a) + C)$$

Demonstração

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (G(b) + C) - (G(a) + C) \\ &= G(b) - G(a) \end{aligned}$$

Demonstração

$$F(b) - F(a) = (G(b) + C) - (G(a) + C)$$

$$= G(b) - G(a)$$

$$= \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^a f(x) \, dx$$

Demonstração

$$F(b) - F(a) = (G(b) + C) - (G(a) + C)$$

$$= G(b) - G(a)$$

$$= \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^a f(x) \, dx$$

$$= \int_a^b f(x) \, dx$$

Conteúdo

Exemplos

Lista Mínima

Exemplo 1

Calcular a área sob o gráfico de $f(x) = x^2$ entre 0 e b

Exemplo 1 – Solução

$$\text{Área} = \int_0^b f(x) \, dx$$

Exemplo 1 – Solução

$$\text{Área} = \int_0^b f(x) \, dx = \int_0^b x^2 \, dx$$

Exemplo 1 – Solução

$$\text{Área} = \int_0^b f(x) \, dx = \int_0^b x^2 \, dx$$

Sabemos que a primitiva de f é

$$F(x) = \int x^2 \, dx$$

Exemplo 1 – Solução

$$\text{Área} = \int_0^b f(x) \, dx = \int_0^b x^2 \, dx$$

Sabemos que a primitiva de f é

$$F(x) = \int x^2 \, dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C$$

Exemplo 1 – Solução

$$\text{Área} = \int_0^b f(x) dx = \int_0^b x^2 dx$$

Sabemos que a primitiva de f é

$$F(x) = \int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C$$

Exemplo 1 – Solução

$$\text{Área} = \int_0^b f(x) dx = \int_0^b x^2 dx$$

Sabemos que a primitiva de f é

$$F(x) = \int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C$$

então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\text{Área} = F(x) \Big|_0^b$$

Exemplo 1 – Solução

$$\text{Área} = \int_0^b f(x) dx = \int_0^b x^2 dx$$

Sabemos que a primitiva de f é

$$F(x) = \int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C$$

então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\text{Área} = F(x) \Big|_0^b = F(b) - F(0)$$

Exemplo 1 – Solução

$$\text{Área} = \int_0^b f(x) dx = \int_0^b x^2 dx$$

Sabemos que a primitiva de f é

$$F(x) = \int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C$$

então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\text{Área} = F(x) \Big|_0^b = F(b) - F(0) = \left[\frac{b^3}{3} + C \right] - \left[\frac{0^3}{3} + C \right]$$

Exemplo 1 – Solução

$$\text{Área} = \int_0^b f(x) dx = \int_0^b x^2 dx$$

Sabemos que a primitiva de f é

$$F(x) = \int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C$$

então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\text{Área} = F(x) \Big|_0^b = F(b) - F(0) = \left[\frac{b^3}{3} + C \right] - \left[\frac{0^3}{3} + C \right] = \frac{b^3}{3}$$

Exemplo 2

Calcule $\int_3^6 \frac{dx}{x}$

Exemplo 2 – Solução

$f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua no intervalo $[3, 6]$

Exemplo 2 – Solução

$f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua no intervalo $[3, 6]$

Uma primitiva de f é $F(x) = \ln|x|$

Exemplo 2 – Solução

$f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua no intervalo $[3, 6]$

Uma primitiva de f é $F(x) = \ln|x|$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_3^6 \frac{dx}{x}$$

Exemplo 2 – Solução

$f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua no intervalo $[3, 6]$

Uma primitiva de f é $F(x) = \ln|x|$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_3^6 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^3$$

Exemplo 2 – Solução

$f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua no intervalo $[3, 6]$

Uma primitiva de f é $F(x) = \ln|x|$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_3^6 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_3^6 = \ln(6) - \ln(3)$$

Exemplo 2 – Solução

$f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua no intervalo $[3, 6]$

Uma primitiva de f é $F(x) = \ln|x|$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_3^6 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^3 = \ln(6) - \ln(3) = \ln\left(\frac{6}{3}\right)$$

Exemplo 2 – Solução

$f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua no intervalo $[3, 6]$

Uma primitiva de f é $F(x) = \ln|x|$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_3^6 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^3 = \ln(6) - \ln(3) = \ln\left(\frac{6}{3}\right) = \ln(2)$$

Exemplo 2 – Solução

$f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua no intervalo $[3, 6]$

Uma primitiva de f é $F(x) = \ln|x|$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_3^6 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^3 = \ln(6) - \ln(3) = \ln\left(\frac{6}{3}\right) = \ln(2) \approx 0.693$$

Exemplo 3

Calcule $\int_0^1 20x^5 - e^x + 3x^6 - \cos(x) + \frac{3}{1+x^2} - 3 \, dx$

Exemplo 3 – Solução

Queremos uma **integral definida** da função

$$f(x) = 20x^5 - e^x + 3x^6 - \cos(x) + \frac{3}{1+x^2} - 3$$

Exemplo 3 – Solução

Queremos uma **integral definida** da função

$$f(x) = 20x^5 - e^x + 3x^6 - \cos(x) + \frac{3}{1+x^2} - 3$$

Primeiro precisamos encontrar uma primitiva de f

Exemplo 3 – Solução

Queremos uma **integral definida** da função

$$f(x) = 20x^5 - e^x + 3x^6 - \cos(x) + \frac{3}{1+x^2} - 3$$

Primeiro precisamos encontrar uma primitiva de f

Tendo a primitiva, usamos o Teorema Fundamental do Cálculo

Exemplo 3 – Solução

$$F(x) = \int f(x) dx$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx \\ &= \int 20x^5 - e^x + 3x^6 - \cos(x) + \frac{3}{1+x^2} - 3 \, dx \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx \\ &= \int 20x^5 - e^x + 3x^6 - \cos(x) + \frac{3}{1+x^2} - 3 \, dx \\ &= \int 20x^5 dx - \int e^x dx + \int 3x^6 dx - \int \cos(x) dx + \int \frac{3}{1+x^2} dx - \int 3 dx \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx \\ &= \int 20x^5 - e^x + 3x^6 - \cos(x) + \frac{3}{1+x^2} - 3 dx \\ &= \int 20x^5 dx - \int e^x dx + \int 3x^6 dx - \int \cos(x) dx + \int \frac{3}{1+x^2} dx - \int 3 dx \\ &= 20 \frac{x^6}{6} \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx \\ &= \int 20x^5 - e^x + 3x^6 - \cos(x) + \frac{3}{1+x^2} - 3 dx \\ &= \int 20x^5 dx - \int e^x dx + \int 3x^6 dx - \int \cos(x) dx + \int \frac{3}{1+x^2} dx - \int 3 dx \\ &= 20 \frac{x^6}{6} - e^x \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx \\ &= \int 20x^5 - e^x + 3x^6 - \cos(x) + \frac{3}{1+x^2} - 3 dx \\ &= \int 20x^5 dx - \int e^x dx + \int 3x^6 dx - \int \cos(x) dx + \int \frac{3}{1+x^2} dx - \int 3 dx \\ &= 20 \frac{x^6}{6} - e^x + 3 \frac{x^7}{7} \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx \\ &= \int 20x^5 - e^x + 3x^6 - \cos(x) + \frac{3}{1+x^2} - 3 dx \\ &= \int 20x^5 dx - \int e^x dx + \int 3x^6 dx - \int \cos(x) dx + \int \frac{3}{1+x^2} dx - \int 3 dx \\ &= 20 \frac{x^6}{6} - e^x + 3 \frac{x^7}{7} - \text{sen}(x) \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx \\ &= \int 20x^5 - e^x + 3x^6 - \cos(x) + \frac{3}{1+x^2} - 3 dx \\ &= \int 20x^5 dx - \int e^x dx + \int 3x^6 dx - \int \cos(x) dx + \int \frac{3}{1+x^2} dx - \int 3 dx \\ &= 20 \frac{x^6}{6} - e^x + 3 \frac{x^7}{7} - \text{sen}(x) + 3 \arctg(x) \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx \\ &= \int 20x^5 - e^x + 3x^6 - \cos(x) + \frac{3}{1+x^2} - 3 dx \\ &= \int 20x^5 dx - \int e^x dx + \int 3x^6 dx - \int \cos(x) dx + \int \frac{3}{1+x^2} dx - \int 3 dx \\ &= 20 \frac{x^6}{6} - e^x + 3 \frac{x^7}{7} - \text{sen}(x) + 3 \arctg(x) - 3x \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx \\ &= \int 20x^5 - e^x + 3x^6 - \cos(x) + \frac{3}{1+x^2} - 3 dx \\ &= \int 20x^5 dx - \int e^x dx + \int 3x^6 dx - \int \cos(x) dx + \int \frac{3}{1+x^2} dx - \int 3 dx \\ &= 20 \frac{x^6}{6} - e^x + 3 \frac{x^7}{7} - \text{sen}(x) + 3 \arctg(x) - 3x + C \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx \\ &= \int 20x^5 - e^x + 3x^6 - \cos(x) + \frac{3}{1+x^2} - 3 dx \\ &= \int 20x^5 dx - \int e^x dx + \int 3x^6 dx - \int \cos(x) dx + \int \frac{3}{1+x^2} dx - \int 3 dx \\ &= 20 \frac{x^6}{6} - e^x + 3 \frac{x^7}{7} - \text{sen}(x) + 3 \arctg(x) - 3x + C \\ &= \frac{10}{3} x^6 - e^x + \frac{3}{7} x^7 - \text{sen}(x) + 3 \arctg(x) - 3x + C \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

I

Exemplo 3 – Solução

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

Exemplo 3 – Solução

$$I = \int_0^1 f(x) dx = F(x) \Big|_0^1$$

Exemplo 3 – Solução

$$I = \int_0^1 f(x) dx = F(x) \Big|_0^1 = F(1) - F(0)$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 f(x) dx = F(x) \Big|_0^1 = F(1) - F(0) \\ &= \left(\frac{10}{3} x^6 - e^x + \frac{3}{7} x^7 - \operatorname{sen}(x) + 3 \operatorname{arctg}(x) - 3x \right) \Big|_0^1 \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 f(x) dx = F(x) \Big|_0^1 = F(1) - F(0) \\ &= \left(\frac{10}{3} x^6 - e^x + \frac{3}{7} x^7 - \operatorname{sen}(x) + 3 \operatorname{arctg}(x) - 3x \right) \Big|_0^1 \\ &= \left(\frac{10}{3} \times 1 - e^1 + \frac{3}{7} \times 1 - \operatorname{sen}(1) + 3 \operatorname{arctg}(1) - 3 \times 1 \right) \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 f(x) dx = F(x) \Big|_0^1 = F(1) - F(0) \\ &= \left(\frac{10}{3} x^6 - e^x + \frac{3}{7} x^7 - \operatorname{sen}(x) + 3 \operatorname{arctg}(x) - 3x \right) \Big|_0^1 \\ &= \left(\frac{10}{3} \times 1 - e^1 + \frac{3}{7} \times 1 - \operatorname{sen}(1) + 3 \operatorname{arctg}(1) - 3 \times 1 \right) \\ &\quad - \left(\frac{10}{3} \times 0 - e^0 + \frac{3}{7} \times 0 - \operatorname{sen}(0) + 3 \operatorname{arctg}(0) - 3 \times 0 \right) \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} I = & \left(\frac{10}{3} \times 1 - e^1 + \frac{3}{7} \times 1 - \sin(1) + 3 \operatorname{arctg}(1) - 3 \times 1 \right) \\ & - \left(\frac{10}{3} \times 0 - e^0 + \frac{3}{7} \times 0 - \sin(0) + 3 \operatorname{arctg}(0) - 3 \times 0 \right) \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{10}{3} \times 1 - e^1 + \frac{3}{7} \times 1 - \sin(1) + 3 \operatorname{arctg}(1) - 3 \times 1 \right) \\ &\quad - \left(\frac{10}{3} \times 0 - e^0 + \frac{3}{7} \times 0 - \sin(0) + 3 \operatorname{arctg}(0) - 3 \times 0 \right) \\ &= \left(\frac{10}{3} \right. \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{10}{3} \times 1 - e^1 + \frac{3}{7} \times 1 - \sin(1) + 3 \operatorname{arctg}(1) - 3 \times 1 \right) \\ &\quad - \left(\frac{10}{3} \times 0 - e^0 + \frac{3}{7} \times 0 - \sin(0) + 3 \operatorname{arctg}(0) - 3 \times 0 \right) \\ &= \left(\frac{10}{3} - e \right) \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{10}{3} \times 1 - e^1 + \frac{3}{7} \times 1 - \sin(1) + 3 \operatorname{arctg}(1) - 3 \times 1 \right) \\ &\quad - \left(\frac{10}{3} \times 0 - e^0 + \frac{3}{7} \times 0 - \sin(0) + 3 \operatorname{arctg}(0) - 3 \times 0 \right) \\ &= \left(\frac{10}{3} - e + \frac{3}{7} \right) \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{10}{3} \times 1 - e^1 + \frac{3}{7} \times 1 - \operatorname{sen}(1) + 3 \operatorname{arctg}(1) - 3 \times 1 \right) \\ &\quad - \left(\frac{10}{3} \times 0 - e^0 + \frac{3}{7} \times 0 - \operatorname{sen}(0) + 3 \operatorname{arctg}(0) - 3 \times 0 \right) \\ &= \left(\frac{10}{3} - e + \frac{3}{7} - \operatorname{sen}(1) \right) \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{10}{3} \times 1 - e^1 + \frac{3}{7} \times 1 - \operatorname{sen}(1) + 3 \operatorname{arctg}(1) - 3 \times 1 \right) \\ &\quad - \left(\frac{10}{3} \times 0 - e^0 + \frac{3}{7} \times 0 - \operatorname{sen}(0) + 3 \operatorname{arctg}(0) - 3 \times 0 \right) \\ &= \left(\frac{10}{3} - e + \frac{3}{7} - \operatorname{sen}(1) + \frac{3\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{10}{3} \times 1 - e^1 + \frac{3}{7} \times 1 - \operatorname{sen}(1) + 3 \operatorname{arctg}(1) - 3 \times 1 \right) \\ &\quad - \left(\frac{10}{3} \times 0 - e^0 + \frac{3}{7} \times 0 - \operatorname{sen}(0) + 3 \operatorname{arctg}(0) - 3 \times 0 \right) \\ &= \left(\frac{10}{3} - e + \frac{3}{7} - \operatorname{sen}(1) + \frac{3\pi}{4} - 3 \right) \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{10}{3} \times 1 - e^1 + \frac{3}{7} \times 1 - \operatorname{sen}(1) + 3 \operatorname{arctg}(1) - 3 \times 1 \right) \\ &\quad - \left(\frac{10}{3} \times 0 - e^0 + \frac{3}{7} \times 0 - \operatorname{sen}(0) + 3 \operatorname{arctg}(0) - 3 \times 0 \right) \\ &= \left(\frac{10}{3} - e + \frac{3}{7} - \operatorname{sen}(1) + \frac{3\pi}{4} - 3 \right) - (-1) \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{10}{3} \times 1 - e^1 + \frac{3}{7} \times 1 - \operatorname{sen}(1) + 3 \operatorname{arctg}(1) - 3 \times 1 \right) \\ &\quad - \left(\frac{10}{3} \times 0 - e^0 + \frac{3}{7} \times 0 - \operatorname{sen}(0) + 3 \operatorname{arctg}(0) - 3 \times 0 \right) \\ &= \left(\frac{10}{3} - e + \frac{3}{7} - \operatorname{sen}(1) + \frac{3\pi}{4} - 3 \right) - (-1) \\ &= \frac{10}{3} - e + \frac{3}{7} - \operatorname{sen}(1) + \frac{3\pi}{4} - 2 \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{10}{3} \times 1 - e^1 + \frac{3}{7} \times 1 - \operatorname{sen}(1) + 3 \operatorname{arctg}(1) - 3 \times 1 \right) \\ &\quad - \left(\frac{10}{3} \times 0 - e^0 + \frac{3}{7} \times 0 - \operatorname{sen}(0) + 3 \operatorname{arctg}(0) - 3 \times 0 \right) \\ &= \left(\frac{10}{3} - e + \frac{3}{7} - \operatorname{sen}(1) + \frac{3\pi}{4} - 3 \right) - (-1) \\ &= \frac{10}{3} - e + \frac{3}{7} - \operatorname{sen}(1) + \frac{3\pi}{4} - 2 \\ &= \frac{1}{84} (148 - 84e - 84 \operatorname{sen}(1) + 63\pi) \end{aligned}$$

Conteúdo

Exemplos

Lista Mínima

Lista Mínima

Estudar a Seção 2.5 da Apostila

Fazer os exercícios: 1a-f, 2, 6a-f, 7, 9a

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações