

Integrais Impróprias

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries



<https://material-didatico.github.io/pages/is>

Conteúdo

Integrais Impróprias

Integrais Impróprias – Tipo 1

Integrais Impróprias – Tipo 2

Exemplos

Lista Mínima

Integrais Impróprias

1. Intervalo de integração infinito

Integrais Impróprias

1. Intervalo de integração infinito
2. Descontinuidade no extremo do intervalo

Integrais Impróprias

1. Envolve o cálculo de um limite

Integrais Impróprias

1. Envolve o calculo de um limite
2. Se o limite existe a integral é **convergente**

Integrais Impróprias

1. Envolve o calculo de um limite
2. Se o limite existe a integral é **convergente**
3. Se algum limite não existir a integral é **divergente**

Conteúdo

Integrais Impróprias

Integrais Impróprias – Tipo 1

Integrais Impróprias – Tipo 2

Exemplos

Lista Mínima

Integrais Impróprias – Tipo 1

f função contínua em intervalo ilimitado, $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, \infty)$

Integrais Impróprias – Tipo 1

f é função contínua em $[a, \infty)$

$$\int_a^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) \, dx$$

Integrais Impróprias – Tipo 1

f é função contínua em $[a, \infty)$

$$\int_a^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) \, dx$$

Integrais Impróprias – Tipo 1

f é função contínua em $(-\infty, b]$

$$\int_{-\infty}^b f(x) \, dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) \, dx$$

Integrais Impróprias – Tipo 1

f é função contínua em $(-\infty, b]$

$$\int_{-\infty}^b f(x) \, dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) \, dx$$

Integrais Impróprias – Tipo 1

f é função contínua em $(-\infty, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^c f(x) \, dx + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_c^s f(x) \, dx$$

para algum $c \in \mathbb{R}$

Integrais Impróprias – Tipo 1

f é função contínua em $(-\infty, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^c f(x) \, dx + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_c^s f(x) \, dx$$

para algum $c \in \mathbb{R}$

Integrais Impróprias – Tipo 1

f é função contínua em $(-\infty, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^c f(x) \, dx + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_c^s f(x) \, dx$$

para algum $c \in \mathbb{R}$

Integrais Impróprias – Tipo 1

f é função contínua em $(-\infty, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^c f(x) \, dx + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_c^s f(x) \, dx$$

para algum $c \in \mathbb{R}$

Conteúdo

Integrais Impróprias

Integrais Impróprias – Tipo 1

Integrais Impróprias – Tipo 2

Exemplos

Lista Mínima

Integrais Impróprias – Tipo 1

f função contínua no interior do intervalo, mas tende ao infinito em algum ponto

Integrais Impróprias – Tipo 2

f é contínua em $[a, b)$ e descontínua em b ,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

Atenção ao limite lateral

Integrais Impróprias – Tipo 2

f é contínua em $[a, b)$ e descontínua em b ,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

Atenção ao limite lateral

Integrais Impróprias – Tipo 2

f é contínua em $(a, b]$ e descontínua em a ,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

Atenção ao limite lateral

Integrais Impróprias – Tipo 2

f é contínua em $(a, b]$ e descontínua em a ,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

Atenção ao limite lateral

Integrais Impróprias – Tipo 2

f é uma função definida em $[a, b]$, contínua exceto em um ponto $c \in (a, b)$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) \, dx &= \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx \\ &= \lim_{r \rightarrow c^-} \int_a^r f(x) \, dx + \lim_{s \rightarrow c^+} \int_s^b f(x) \, dx\end{aligned}$$

Integrais Impróprias – Tipo 2

f é uma função definida em $[a, b]$, contínua exceto em um ponto $c \in (a, b)$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) \, dx &= \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx \\ &= \lim_{r \rightarrow c^-} \int_a^r f(x) \, dx + \lim_{s \rightarrow c^+} \int_s^b f(x) \, dx\end{aligned}$$

Conteúdo

Integrais Impróprias

Integrais Impróprias – Tipo 1

Integrais Impróprias – Tipo 2

Exemplos

Lista Mínima

Exemplo 1

Calcular a integral $\int_{-\infty}^0 e^x dx$

Exemplo 1 – Solução

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\int_t^0 e^x dx \right)$$

definição integral imprópria

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 e^x dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\int_t^0 e^x dx \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(e^x \Big|_t^0 \right)\end{aligned}$$

definição integral imprópria

Exemplo 1 – Solução

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\int_t^0 e^x dx \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(e^x \Big|_t^0 \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} (e^0 - e^t)$$

definição integral imprópria

Exemplo 1 – Solução

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\int_t^0 e^x dx \right)$$

definição integral imprópria

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(e^x \Big|_t^0 \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} (e^0 - e^t)$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} 1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t$$

Exemplo 1 – Solução

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\int_t^0 e^x dx \right)$$

definição integral imprópria

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(e^x \Big|_t^0 \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} (e^0 - e^t)$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} 1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t$$

$$= 1$$

Exemplo 2

Determine se a integral

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^{2/3}} dx$$

é convergente ou divergente

Exemplo 2 – Solução

Queremos integrar $f(x) = \frac{1}{x^{2/3}}$ no intervalo $[-1, 0]$

Exemplo 2 – Solução

Queremos integrar $f(x) = \frac{1}{x^{2/3}}$ no intervalo $[-1, 0]$

Mas f é descontínua em $x = 0$

Exemplo 2 – Solução

Queremos integrar $f(x) = \frac{1}{x^{2/3}}$ no intervalo $[-1, 0]$

Mas f é descontínua em $x = 0$

Não podemos usar o Teorema Fundamental do Cálculo

Exemplo 2 – Solução

Queremos integrar $f(x) = \frac{1}{x^{2/3}}$ no intervalo $[-1, 0]$

Mas f é descontínua em $x = 0$

Não podemos usar o Teorema Fundamental do Cálculo

Essa é uma integral imprópria,

Exemplo 2 – Solução

Queremos integrar $f(x) = \frac{1}{x^{2/3}}$ no intervalo $[-1, 0]$

Mas f é descontínua em $x = 0$

Não podemos usar o Teorema Fundamental do Cálculo

Essa é uma integral imprópria, portanto

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^{2/3}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-1}^t x^{-2/3} dx$$

Exemplo 2 – Solução

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^{2/3}} dx$$

Exemplo 2 – Solução

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^{2/3}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-1}^t x^{-2/3} dx$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 \frac{1}{x^{2/3}} dx &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-1}^t x^{-2/3} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^{-2/3+1}}{-2/3+1} \Big|_{-1}^t \right)\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 \frac{1}{x^{2/3}} dx &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-1}^t x^{-2/3} dx \\&= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^{-2/3+1}}{-2/3+1} \Big|_{-1}^t \right) \\&= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(3x^{1/3} \Big|_{-1}^t \right)\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 \frac{1}{x^{2/3}} dx &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-1}^t x^{-2/3} dx \\&= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^{-2/3+1}}{-2/3+1} \Big|_{-1}^t \right) \\&= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(3x^{1/3} \Big|_{-1}^t \right) \\&= \lim_{t \rightarrow 0^-} 3 \left[t^{1/3} - (-1)^{1/3} \right]\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 \frac{1}{x^{2/3}} dx &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-1}^t x^{-2/3} dx \\&= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^{-2/3+1}}{-2/3+1} \Big|_{-1}^t \right) \\&= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(3x^{1/3} \Big|_{-1}^t \right) \\&= \lim_{t \rightarrow 0^-} 3 [t^{1/3} - (-1)^{1/3}] \\&= 3\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 \frac{1}{x^{2/3}} dx &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-1}^t x^{-2/3} dx \\&= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^{-2/3+1}}{-2/3+1} \Big|_{-1}^t \right) \\&= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(3x^{1/3} \Big|_{-1}^t \right) \\&= \lim_{t \rightarrow 0^-} 3 [t^{1/3} - (-1)^{1/3}] \\&= 3\end{aligned}$$

Portanto, a integral imprópria converge

Exemplo 3

Calcule

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1} dx$$

se possível

Exemplo 3 – Solução

A função $f(x) = \frac{1}{x-1}$ é descontínua em $x = 1 \in [0, 3]$

Exemplo 3 – Solução

A função $f(x) = \frac{1}{x-1}$ é descontínua em $x = 1 \in [0, 3]$

Precisamos dividir o intervalo e duas partes $[0, 1]$ e $[1, 3]$

Exemplo 3 – Solução

A função $f(x) = \frac{1}{x-1}$ é descontínua em $x = 1 \in [0, 3]$

Precisamos dividir o intervalo e duas partes $[0, 1]$ e $[1, 3]$

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x-1} dx + \int_1^3 \frac{1}{x-1} dx$$

Exemplo 3 – Solução

A função $f(x) = \frac{1}{x-1}$ é descontínua em $x = 1 \in [0, 3]$

Precisamos dividir o intervalo e duas partes $[0, 1]$ e $[1, 3]$

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x-1} dx + \int_1^3 \frac{1}{x-1} dx$$

Agora a descontinuidade está nos extremos dos intervalos e podemos usar integrais impróprias

Exemplo 3 – Solução

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1} dx$$

Exemplo 3 – Solução

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1} dx = \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{x-1} dx$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x-1} dx &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{x-1} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \ln|x-1| \Big|_0^t\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x-1} dx &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{x-1} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \ln|x-1| \Big|_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} (\ln|t-1| - \ln|-1|)\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x-1} dx &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{x-1} dx \\&= \lim_{t \rightarrow 1^-} \ln|x-1| \Big|_0^t \\&= \lim_{t \rightarrow 1^-} (\ln|t-1| - \ln|-1|) \\&= \lim_{t \rightarrow 1^-} \ln(1-t)\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1} dx = \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{x-1} dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^-} \ln|x-1| \Big|_0^t$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^-} (\ln|t-1| - \ln|-1|)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^-} \ln(1-t)$$

$1-t \rightarrow 0^+$ quando $t \rightarrow 1^-$

Exemplo 3 – Solução

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1} dx = \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{x-1} dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^-} \ln|x-1| \Big|_0^t$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^-} (\ln|t-1| - \ln|-1|)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^-} \ln(1-t)$$

$1-t \rightarrow 0^+$ quando $t \rightarrow 1^-$

$$= -\infty$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x-1} dx &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{x-1} dx \\&= \lim_{t \rightarrow 1^-} \ln|x-1| \Big|_0^t \\&= \lim_{t \rightarrow 1^-} (\ln|t-1| - \ln|-1|) \\&= \lim_{t \rightarrow 1^-} \ln(1-t) \qquad 1-t \rightarrow 0^+ \text{ quando } t \rightarrow 1^- \\&= -\infty\end{aligned}$$

Portanto a integral diverge e não precisamos calcular a segunda parte

Conteúdo

Integrais Impróprias

Integrais Impróprias – Tipo 1

Integrais Impróprias – Tipo 2

Exemplos

Lista Mínima

Lista Mínima

Estudar a Seção 2.6 da Apostila

Fazer os exercícios 1, 2 e 3

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações