

Volumes de Sólidos de Revolução

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries



<https://material-didatico.github.io/pages/is>

Conteúdo

Sólidos de Revolução

Exemplos

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Exemplo 4

Exemplo 5

Lista Mínima

Sólidos de Revolução

Sólido de revolução é obtido pela rotação de uma região plana em torno de um eixo.

Sólidos de Revolução

Sólido de revolução é obtido pela rotação de uma região plana em torno de um eixo.

Seção transversal será um disco de raio $R(x)$

$$A(x) = \pi R(x)^2$$

Sólidos de Revolução

Sólido de revolução é obtido pela rotação de uma região plana em torno de um eixo.

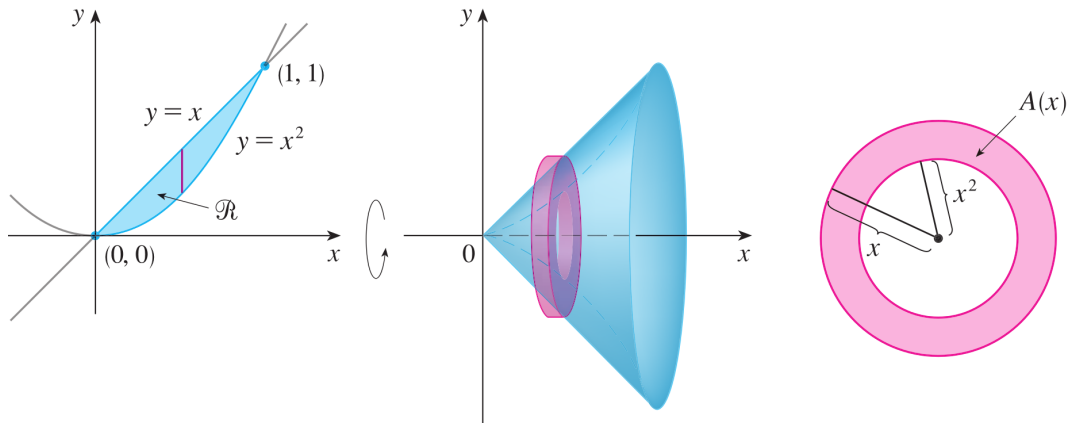
Seção transversal será um disco de raio $R(x)$

$$A(x) = \pi R(x)^2$$

Anel circular de raio externo $R(x)$ e raio interno $r(x)$

$$A(x) = \pi (R(x)^2 - r(x)^2)$$

Sólidos de Revolução



Conteúdo

Sólidos de Revolução

Exemplos

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Exemplo 4

Exemplo 5

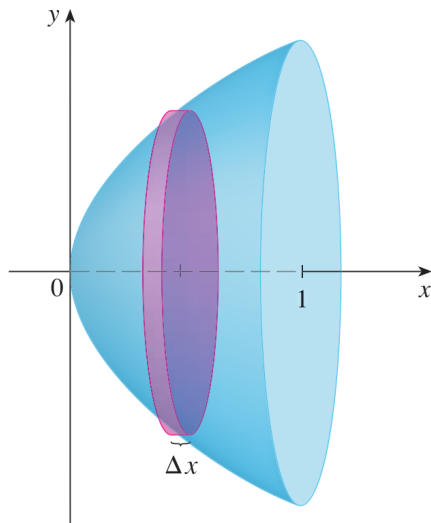
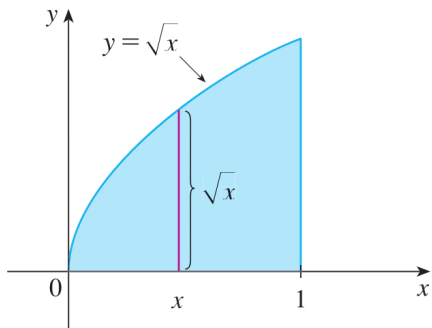
Lista Mínima

Exemplo 1

Exemplo 1

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região sob a curva $f(x) = \sqrt{x}$ de 0 até 1

Exemplo 1



Exemplo 1 – Área da seção transversal

A seção transversal é um círculo de raio

$$R(x) = \sqrt{x}$$

Exemplo 1 – Área da seção transversal

A seção transversal é um círculo de raio

$$R(x) = \sqrt{x}$$

com área

$$A(x) = \pi R(x)^2 = \pi (\sqrt{x})^2 = \pi x$$

Exemplo 1 – Volume

$$V = \int_0^1 \pi x \, dx$$

Exemplo 1 – Volume

$$V = \int_0^1 \pi x \, dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1$$

Exemplo 1 – Volume

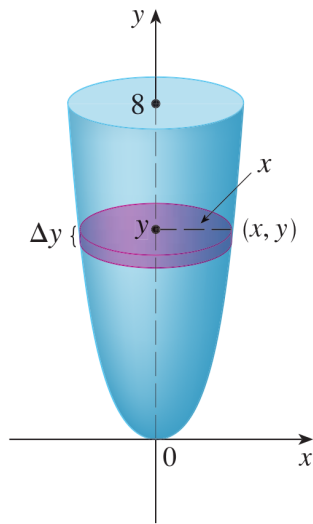
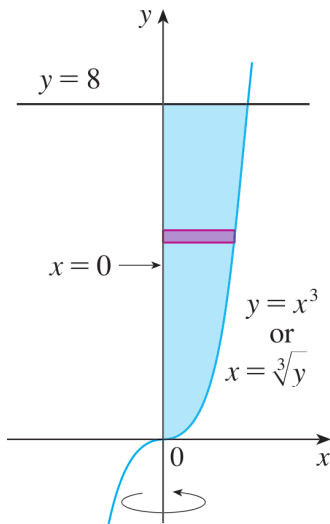
$$V = \int_0^1 \pi x \, dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Exemplo 2

Exemplo 2

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada por $y = x^3$, $y = 8$, e $x = 0$ em torno do eixo y

Exemplo 2



Exemplo 3 – Área da seção transversal

Seção transversal é um círculo de raio x

$$x = \sqrt[3]{y}$$

Exemplo 3 – Área da seção transversal

Seção transversal é um círculo de raio x

$$x = \sqrt[3]{y}$$

Área da seção transversal

$$A(y) = \pi R(y)^2 = \pi (\sqrt[3]{y})^2 = \pi y^{2/3}$$

Exemplo 2 – Volume

$$V = \int_0^8 \pi y^{2/3} dy$$

Exemplo 2 – Volume

$$V = \int_0^8 \pi y^{2/3} dy = \pi \left(\frac{3}{5} y^{5/3} \right) \Big|_0^8$$

Exemplo 2 – Volume

$$V = \int_0^8 \pi y^{2/3} dy = \pi \left(\frac{3}{5} y^{5/3} \right) \Big|_0^8 = \pi \frac{3}{5} 8^{5/3}$$

Exemplo 2 – Volume

$$V = \int_0^8 \pi y^{2/3} dy = \pi \left(\frac{3}{5} y^{5/3} \right) \Big|_0^8 = \pi \frac{3}{5} 8^{5/3} = \frac{96\pi}{5}$$

Exemplo 3

Exemplo 3

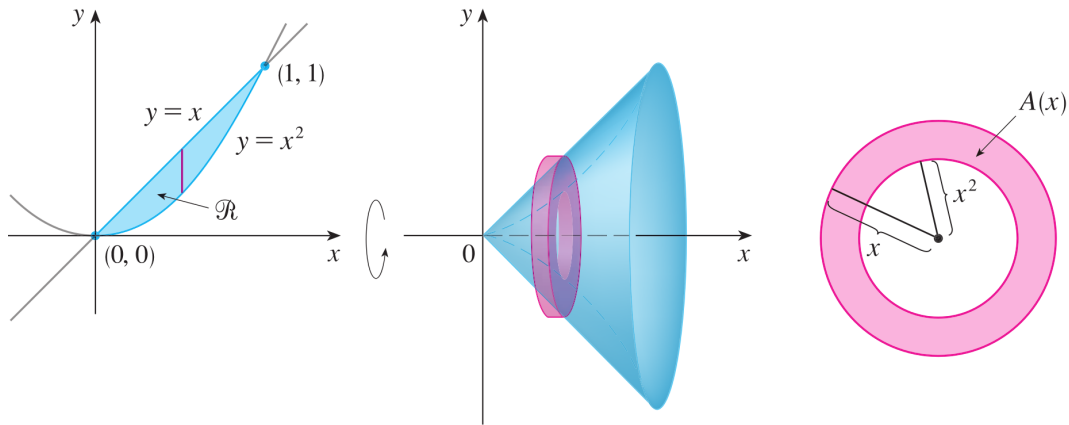
A região $\mathcal{R}$, limitada pelas curvas delimitada pelas curvas

$$y = x \quad \text{e} \quad y = x^2$$

é girada em torno do eixo x .

Encontre o volume do sólido resultante.

Exemplo 3



Exemplo 5 – Área da seção transversal

As curvas $y = x$ e $y = x^2$ se intersectam nos pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$

Exemplo 5 – Área da seção transversal

As curvas $y = x$ e $y = x^2$ se intersectam nos pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$

A seção transversal é um anel

Exemplo 5 – Área da seção transversal

As curvas $y = x$ e $y = x^2$ se intersectam nos pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$

A seção transversal é um anel

Raio interno

$$r(x) = x^2$$

Exemplo 5 – Área da seção transversal

As curvas $y = x$ e $y = x^2$ se intersectam nos pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$

A seção transversal é um anel

Raio interno

$$r(x) = x^2$$

Raio externo

$$R(x) = x$$

Exemplo 5 – Área da seção transversal

As curvas $y = x$ e $y = x^2$ se intersectam nos pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$

A seção transversal é um anel

Raio interno

$$r(x) = x^2$$

Raio externo

$$R(x) = x$$

Área da seção transversal

$$A(x) = \pi \left(x^2 - (x^2)^2 \right)$$

Exemplo 5 – Área da seção transversal

As curvas $y = x$ e $y = x^2$ se intersectam nos pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$

A seção transversal é um anel

Raio interno

$$r(x) = x^2$$

Raio externo

$$R(x) = x$$

Área da seção transversal

$$A(x) = \pi \left(x^2 - (x^2)^2 \right) = \pi (x^2 - x^4)$$

Exemplo 3 – Volume

$$V = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4) dx$$

Exemplo 3 – Volume

$$V = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1$$

Exemplo 3 – Volume

$$V = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right)$$

Exemplo 3 – Volume

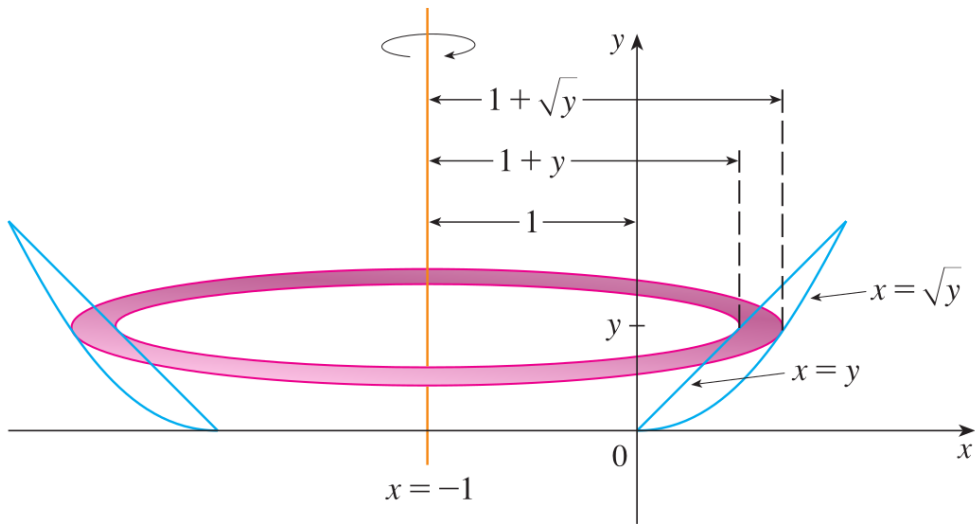
$$V = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{2\pi}{15}$$

Exemplo 4

Exemplo 4

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região do exemplo anterior em torno da reta $x = -1$

Exemplo 4



Exemplo 4 – Área da seção transversal

A seção transversal é um anel

Exemplo 4 – Área da seção transversal

A seção transversal é um anel

Raio interno

$$r(y) = 1 + y$$

Exemplo 4 – Área da seção transversal

A seção transversal é um anel

Raio interno

$$r(y) = 1 + y$$

Raio externo

$$R(y) = 1 + \sqrt{y}$$

Exemplo 4 – Área da seção transversal

A seção transversal é um anel

Área da seção transversal

Raio interno

$$A(y) = \pi (R(y)^2 - r(y)^2)$$

$$r(y) = 1 + y$$

Raio externo

$$R(y) = 1 + \sqrt{y}$$

Exemplo 4 – Área da seção transversal

A seção transversal é um anel

Área da seção transversal

Raio interno

$$A(y) = \pi (R(y)^2 - r(y)^2)$$

$$r(y) = 1 + y$$

$$= \pi [(1 + \sqrt{y})^2 - (1 + y)^2]$$

Raio externo

$$R(y) = 1 + \sqrt{y}$$

Exemplo 4 – Área da seção transversal

A seção transversal é um anel

Área da seção transversal

Raio interno

$$r(y) = 1 + y$$

$$A(y) = \pi (R(y)^2 - r(y)^2)$$

$$= \pi [(1 + \sqrt{y})^2 - (1 + y)^2]$$

Raio externo

$$R(y) = 1 + \sqrt{y}$$

$$= \pi [(1 + 2\sqrt{y} + y) - (1 + 2y + y^2)]$$

Exemplo 4 – Área da seção transversal

A seção transversal é um anel

Área da seção transversal

Raio interno

$$r(y) = 1 + y$$

$$A(y) = \pi (R(y)^2 - r(y)^2)$$

$$= \pi [(1 + \sqrt{y})^2 - (1 + y)^2]$$

Raio externo

$$R(y) = 1 + \sqrt{y}$$

$$= \pi [(1 + 2\sqrt{y} + y) - (1 + 2y + y^2)]$$

$$= \pi (2\sqrt{y} - y - y^2)$$

Exemplo 4 – Volume

$$V = \int_0^1 A(y) \, dy$$

Exemplo 4 – Volume

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(y) \, dy \\ &= \int_0^1 \pi (2\sqrt{y} - y - y^2) \, dy \end{aligned}$$

Exemplo 4 – Volume

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(y) \, dy \\ &= \int_0^1 \pi (2\sqrt{y} - y - y^2) \, dy \\ &= \pi \left(\frac{4y^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 \end{aligned}$$

Exemplo 4 – Volume

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(y) \, dy \\ &= \int_0^1 \pi (2\sqrt{y} - y - y^2) \, dy \\ &= \pi \left(\frac{4y^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 \\ &= \pi \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

Exemplo 4 – Volume

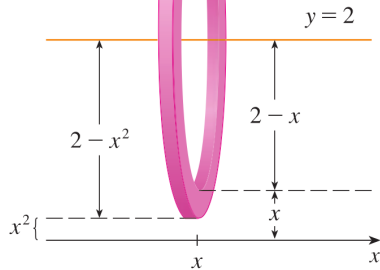
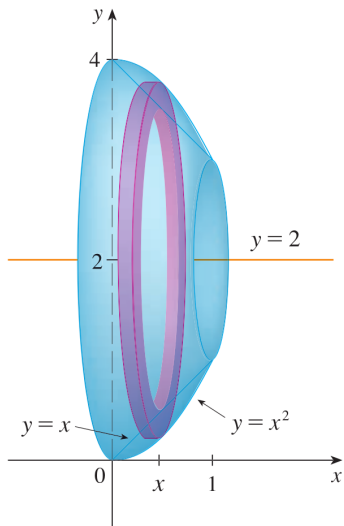
$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(y) \, dy \\ &= \int_0^1 \pi (2\sqrt{y} - y - y^2) \, dy \\ &= \pi \left(\frac{4y^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 \\ &= \pi \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Exemplo 5

Exemplo 5

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região do exemplo anterior em torno da reta $y = 2$

Exemplo 5



Exemplo 5 – Área da seção transversal

A seção transversal é um anel

Exemplo 5 – Área da seção transversal

A seção transversal é um anel

Raio interno

$$r(x) = 2 - x$$

Exemplo 5 – Área da seção transversal

A seção transversal é um anel

Raio interno

$$r(x) = 2 - x$$

Raio externo

$$R(x) = 2 - x^2$$

Exemplo 5 – Área da seção transversal

A seção transversal é um anel

Raio interno

$$r(x) = 2 - x$$

Raio externo

$$R(x) = 2 - x^2$$

Área

$$A(x) = \pi (2 - x^2)^2 - \pi (2 - x)^2$$

Exemplo 5 – Área da seção transversal

A seção transversal é um anel

Raio interno

$$r(x) = 2 - x$$

Raio externo

$$R(x) = 2 - x^2$$

Área

$$A(x) = \pi (2 - x^2)^2 - \pi (2 - x)^2 = \pi (x^4 - 5x^2 + 4x)$$

Exemplo 5 – Volume

$$V = \int_0^1 A(x) \, dx$$

Exemplo 5 – Volume

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x) \, dx \\ &= \int_0^1 \pi (x^4 - 5x^2 + 4x) \, dx \end{aligned}$$

Exemplo 5 – Volume

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x) \, dx \\ &= \int_0^1 \pi (x^4 - 5x^2 + 4x) \, dx \\ &= \pi \left(\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 \end{aligned}$$

Exemplo 5 – Volume

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x) \, dx \\ &= \int_0^1 \pi (x^4 - 5x^2 + 4x) \, dx \\ &= \pi \left(\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 \\ &= \pi \left(\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + \frac{4}{2} \right) \end{aligned}$$

Exemplo 5 – Volume

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x) \, dx \\ &= \int_0^1 \pi (x^4 - 5x^2 + 4x) \, dx \\ &= \pi \left(\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 \\ &= \pi \left(\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + \frac{4}{2} \right) \\ &= \frac{8\pi}{15} \end{aligned}$$

Conteúdo

Sólidos de Revolução

Exemplos

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Exemplo 4

Exemplo 5

Lista Mínima

Lista Mínima

Estudar a Seção 3.3 da Apostila

Exercícios: 1a-f, 2, 3

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações