

Volumes por Cascas Cilíndricas

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries



<https://material-didatico.github.io/pages/is>

Conteúdo

Casca Cilíndricas

Volumes por Cascas Cilíndricas

Exemplos

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

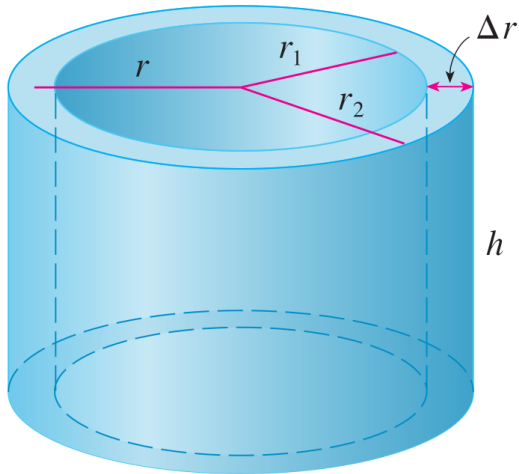
Exemplo 4

Exemplo 5

Exemplo 6

Lista Mínima

Casca Cilíndrica



Volume de uma Casca Cilíndrica

$$V = V_2 - V_1$$

Volume de uma Casca Cilíndrica

$$V = V_2 - V_1$$

$$= \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h$$

Volume de uma Casca Cilíndrica

$$V = V_2 - V_1$$

$$= \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h$$

$$= \pi (r_2^2 - r_1^2) h$$

Volume de uma Casca Cilíndrica

$$V = V_2 - V_1$$

$$= \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h$$

$$= \pi (r_2^2 - r_1^2) h$$

$$= \pi (r_2 + r_1) (r_2 - r_1) h$$

Volume de uma Casca Cilíndrica

$$V = V_2 - V_1$$

$$= \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h$$

$$= \pi (r_2^2 - r_1^2) h$$

$$= \pi (r_2 + r_1) (r_2 - r_1) h$$

$$= 2\pi \frac{r_2 + r_1}{2} (r_2 - r_1) h$$

Volume de uma Casca Cilíndrica

$$V = V_2 - V_1$$

$$= \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h$$

$$= \pi (r_2^2 - r_1^2) h$$

$$= \pi (r_2 + r_1) (r_2 - r_1) h$$

$$= 2\pi \frac{r_2 + r_1}{2} (r_2 - r_1) h$$

$$= 2\pi r \Delta r h$$

onde fizemos $r = \frac{r_2 + r_1}{2}$ e $\Delta r = r_2 - r_1$

Volume de uma Casca Cilíndrica

$$V = (\text{circunferência}) (\text{altura}) (\text{espessura})$$

$$= (2\pi r) (h) (\Delta x)$$

Conteúdo

Casca Cilíndricas

Volumes por Cascas Cilíndricas

Exemplos

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

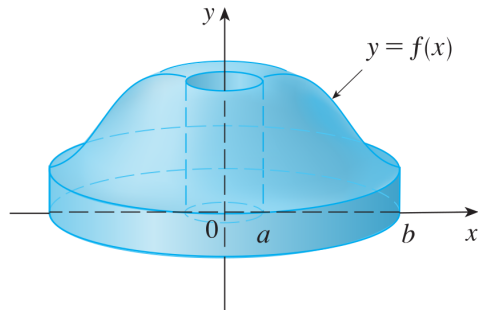
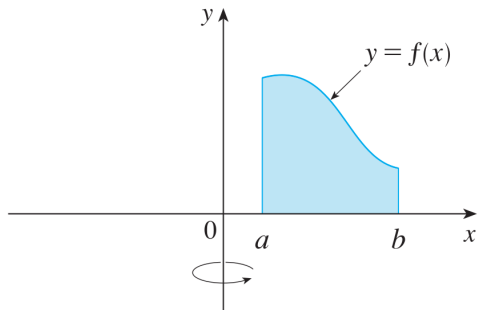
Exemplo 4

Exemplo 5

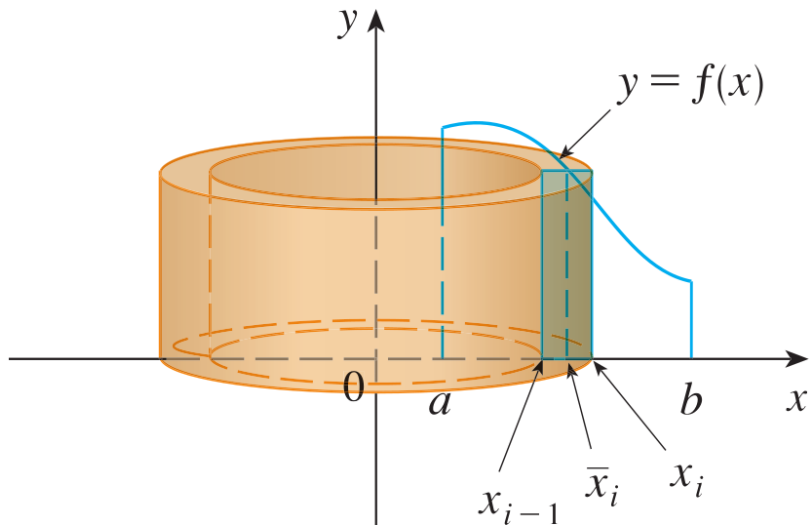
Exemplo 6

Lista Mínima

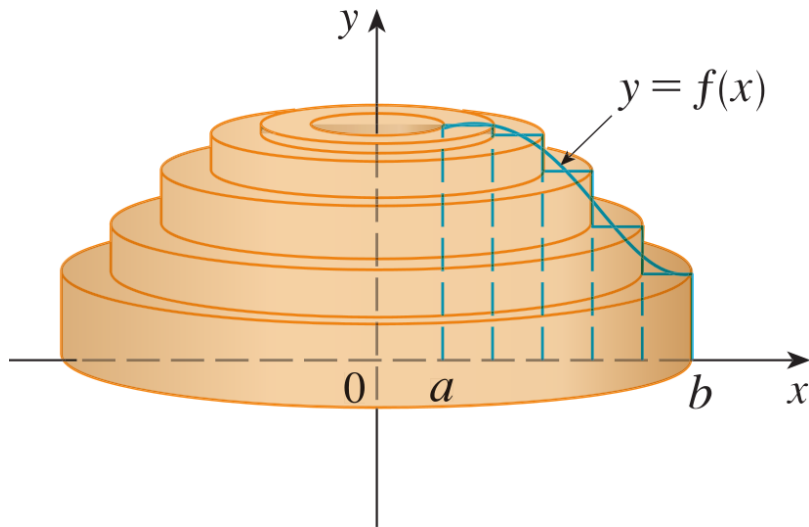
Sólido de Revolução



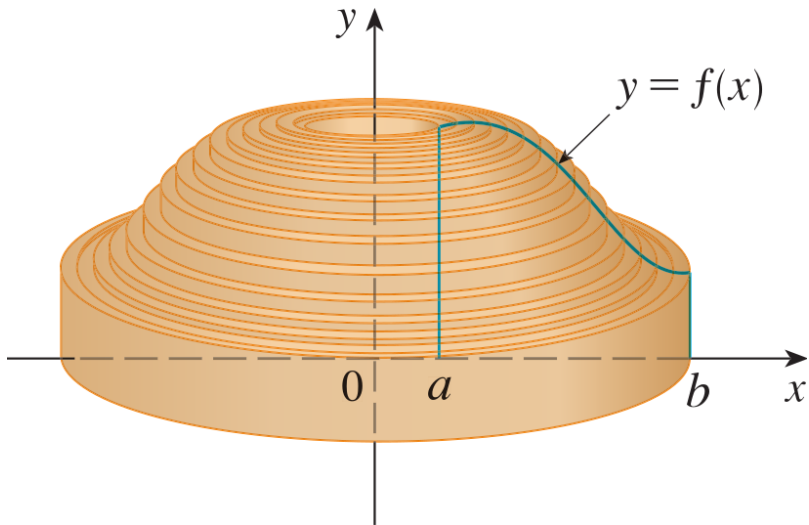
Volume Sólido de Revolução



Volume Sólido de Revolução



Volume Sólido de Revolução



Volumes por Cascas Cilíndricas

$$V = \int_a^b dV$$

Volumes por Cascas Cilíndricas

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b dV \\ &= \int_a^b (\text{circunferência}) (\text{altura}) (\text{espessura}) \end{aligned}$$

Volumes por Cascas Cilíndricas

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b dV \\ &= \int_a^b (\text{circunferência}) (\text{altura}) (\text{espessura}) \\ &= \int_a^b 2\pi x f(x) dx \end{aligned}$$

Volumes por Cascas Cilíndricas

O volume do sólido S obtido pela rotação em torno do eixo y da região

$$R = \{(x, y): 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$$

é calculado pela integral

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

Conteúdo

Casca Cilíndricas

Volumes por Cascas Cilíndricas

Exemplos

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Exemplo 4

Exemplo 5

Exemplo 6

Lista Mínima

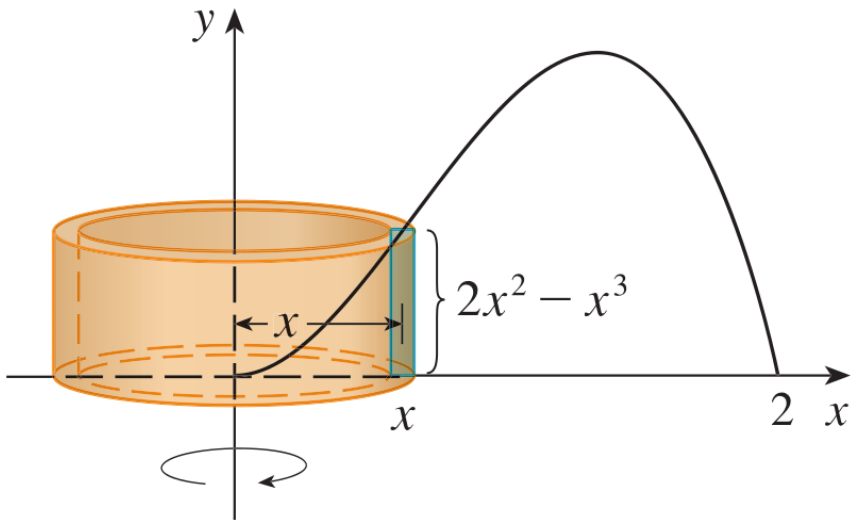
Exemplo 1

Exemplo 1

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região delimitada por

$$y = 2x^2 - x^3 \quad \text{e} \quad y = 0$$

Exemplo 1 – Esboço



Exemplo 1 – Casca Cilíndrica

Raio

$$r(x) = x$$

Exemplo 1 – Casca Cilíndrica

Raio $r(x) = x$

Circunferência $2\pi x$

Exemplo 1 – Casca Cilíndrica

Raio $r(x) = x$

Circunferência $2\pi x$

Altura $h(x) = 2x^2 - x^3$

Exemplo 1 – Volume

$$V = \int_0^2 2\pi x (2x^2 - x^3) dx$$

Exemplo 1 – Volume

$$V = \int_0^2 2\pi x (2x^2 - x^3) dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 2x^3 - x^4 dx$$

Exemplo 1 – Volume

$$V = \int_0^2 2\pi x (2x^2 - x^3) dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 2x^3 - x^4 dx$$

$$= 2\pi \left(2\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2$$

Exemplo 1 – Volume

$$V = \int_0^2 2\pi x (2x^2 - x^3) dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 2x^3 - x^4 dx$$

$$= 2\pi \left(2\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2$$

$$= 2\pi \left(2^3 - \frac{2^5}{5} \right)$$

Exemplo 1 – Volume

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 2\pi x (2x^2 - x^3) dx \\ &= 2\pi \int_0^2 2x^3 - x^4 dx \\ &= 2\pi \left(2\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 \\ &= 2\pi \left(2^3 - \frac{2^5}{5} \right) = 2\pi \left(\frac{5 \times 8}{5} - \frac{32}{5} \right) \end{aligned}$$

Exemplo 1 – Volume

$$V = \int_0^2 2\pi x (2x^2 - x^3) dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 2x^3 - x^4 dx$$

$$= 2\pi \left(2\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2$$

$$= 2\pi \left(2^3 - \frac{2^5}{5} \right) = 2\pi \left(\frac{5 \times 8}{5} - \frac{32}{5} \right) = 2\pi \frac{8}{5}$$

Exemplo 1 – Volume

$$V = \int_0^2 2\pi x (2x^2 - x^3) dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 2x^3 - x^4 dx$$

$$= 2\pi \left(2\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2$$

$$= 2\pi \left(2^3 - \frac{2^5}{5} \right) = 2\pi \left(\frac{5 \times 8}{5} - \frac{32}{5} \right) = 2\pi \frac{8}{5} = \frac{16\pi}{5}$$

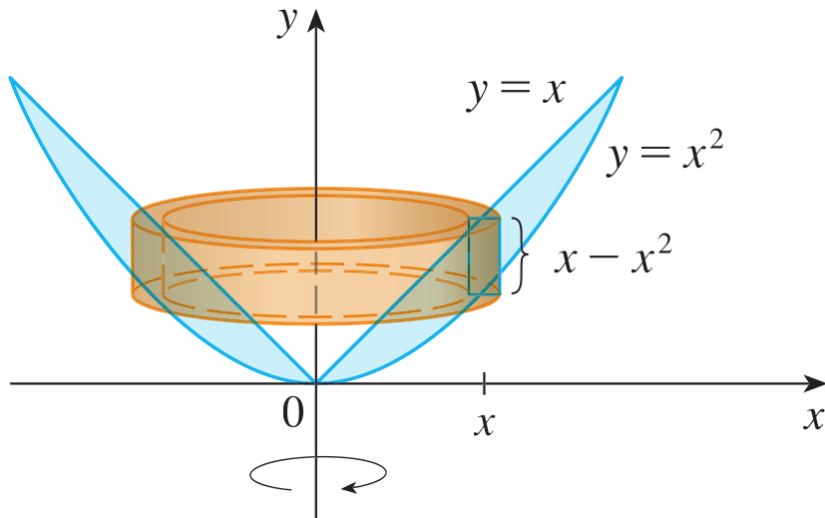
Exemplo 2

Exemplo 2

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região entre

$$y = x \quad \text{e} \quad y = x^2$$

Exemplo 2 – Esboço



Exemplo 2 – Casca Cilíndrica

Raio

$$r(x) = x$$

Exemplo 2 – Casca Cilíndrica

Raio $r(x) = x$

Circunferência $2\pi x$

Exemplo 2 – Casca Cilíndrica

Raio $r(x) = x$

Circunferência $2\pi x$

Altura $h(x) = x - x^2$

Exemplo 2 – Volume

$$V = \int_0^1 2\pi x (x - x^2) \, dx$$

Exemplo 2 – Volume

$$V = \int_0^1 2\pi x (x - x^2) dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x^2 - x^3 dx$$

Exemplo 2 – Volume

$$V = \int_0^1 2\pi x (x - x^2) dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x^2 - x^3 dx$$

$$= 2\pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1$$

Exemplo 2 – Volume

$$V = \int_0^1 2\pi x (x - x^2) dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x^2 - x^3 dx$$

$$= 2\pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)$$

Exemplo 2 – Volume

$$V = \int_0^1 2\pi x (x - x^2) dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x^2 - x^3 dx$$

$$= 2\pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = 2\pi \frac{1}{12}$$

Exemplo 2 – Volume

$$V = \int_0^1 2\pi x (x - x^2) dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x^2 - x^3 dx$$

$$= 2\pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = 2\pi \frac{1}{12} = \frac{\pi}{6}$$

Exemplo 3

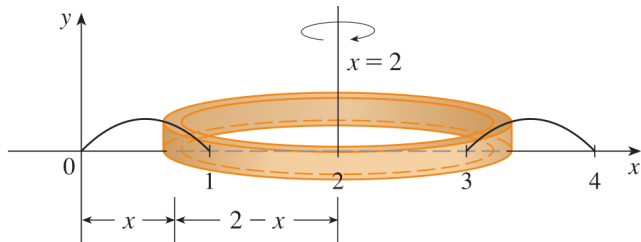
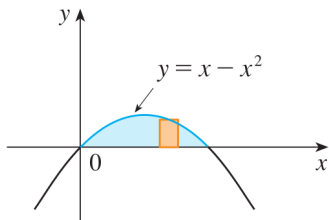
Exemplo 3

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região delimitada por

$$y = x - x^2 \quad \text{e} \quad y = 0$$

em torno da reta $x = 2$

Exemplo 3 – Esboço



Exemplo 3 – Casca Cilíndrica

Raio

$$r(x) = 2 - x$$

Exemplo 3 – Casca Cilíndrica

Raio $r(x) = 2 - x$

Circunferência $2\pi(2 - x)$

Exemplo 3 – Casca Cilíndrica

Raio $r(x) = 2 - x$

Circunferência $2\pi(2 - x)$

Altura $h(x) = x - x^2$

Exemplo 3

$$V = \int_0^1 2\pi(2-x)(x-x^2) dx$$

Exemplo 3

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi(2-x)(x-x^2) dx \\ &= 2\pi \int_0^1 x^3 - 3x^2 + 2x dx \end{aligned}$$

Exemplo 3

$$V = \int_0^1 2\pi(2-x)(x-x^2) dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x^3 - 3x^2 + 2x dx$$

$$= 2\pi \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right) \Big|_0^1$$

Exemplo 3

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi(2-x)(x-x^2) dx \\ &= 2\pi \int_0^1 x^3 - 3x^2 + 2x dx \\ &= 2\pi \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right) \Big|_0^1 \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{4} - 1 + 1 \right) \end{aligned}$$

Exemplo 3

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi(2-x)(x-x^2) dx \\ &= 2\pi \int_0^1 x^3 - 3x^2 + 2x dx \\ &= 2\pi \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right) \Big|_0^1 \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{4} - 1 + 1 \right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Exemplo 4

Exemplo 4

Use cascas cilíndricas para encontrar o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x da região sob a curva

$$y = \sqrt{x}$$

de 0 até 1

Exemplo 4 – Casca Cilíndrica

Raio

$$r(y) = y$$

Exemplo 4 – Casca Cilíndrica

Raio $r(y) = y$

Circunferência $2\pi y$

Exemplo 4 – Casca Cilíndrica

Raio $r(y) = y$

Circunferência $2\pi y$

Altura $h(y) = 1 - y^2$

Exemplo 4

$$V = \int_0^1 2\pi y(1 - y^2) dy$$

Exemplo 4

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi y(1 - y^2) dy \\ &= 2\pi \int_0^1 y - y^3 dy \end{aligned}$$

Exemplo 4

$$V = \int_0^1 2\pi y(1 - y^2) dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 y - y^3 dy$$

$$= 2\pi \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^1$$

Exemplo 4

$$V = \int_0^1 2\pi y(1 - y^2) dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 y - y^3 dy$$

$$= 2\pi \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^1$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right)$$

Exemplo 4

$$V = \int_0^1 2\pi y(1 - y^2) dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 y - y^3 dy$$

$$= 2\pi \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^1$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Exemplo 5

Exemplo 5

Encontre o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região delimitada pelas curvas

$$x = (y - 3)^2 \quad \text{e} \quad x = 4$$

em torno da reta $y = 1$

Exemplo 5 – Casca Cilíndrica

Raio

$$r(y) = y - 1$$

Exemplo 5 – Casca Cilíndrica

Raio $r(y) = y - 1$

Circunferência $2\pi(y - 1)$

Exemplo 5 – Casca Cilíndrica

Raio $r(y) = y - 1$

Circunferência $2\pi(y - 1)$

Altura $h(y) = 4 - (y - 3)^2$

Exemplo 5

$$V = \int_1^5 2\pi(y-1)(4-(y-3)^2) dy$$

Exemplo 5

$$\begin{aligned} V &= \int_1^5 2\pi(y-1)(4-(y-3)^2) dy \\ &= 2\pi \int_1^5 (y-1)(-y^2+6y-5) dy \end{aligned}$$

Exemplo 5

$$\begin{aligned} V &= \int_1^5 2\pi(y-1)(4-(y-3)^2) dy \\ &= 2\pi \int_1^5 (y-1)(-y^2+6y-5) dy \\ &= 2\pi \int_1^5 -y^3+7y^2-11y+5 dy \end{aligned}$$

Exemplo 5

$$\begin{aligned} V &= \int_1^5 2\pi(y-1)(4-(y-3)^2) dy \\ &= 2\pi \int_1^5 (y-1)(-y^2+6y-5) dy \\ &= 2\pi \int_1^5 -y^3+7y^2-11y+5 dy \\ &= 2\pi \left(-\frac{y^4}{4} + 7\frac{y^3}{3} - 11\frac{y^2}{2} + 5y \right) \Big|_1^5 \end{aligned}$$

Exemplo 5

$$\begin{aligned} V &= \int_1^5 2\pi(y-1)(4-(y-3)^2) dy \\ &= 2\pi \int_1^5 (y-1)(-y^2+6y-5) dy \\ &= 2\pi \int_1^5 -y^3+7y^2-11y+5 dy \\ &= 2\pi \left(-\frac{y^4}{4} + 7\frac{y^3}{3} - 11\frac{y^2}{2} + 5y \right) \Big|_1^5 \\ &= 2\pi \left[\left(-\frac{5^4}{4} + 7\frac{5^3}{3} - 11\frac{5^2}{2} + 25 \right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{7}{3} - \frac{11}{2} + 5 \right) \right] \end{aligned}$$

Exemplo 5

$$\begin{aligned} V &= \int_1^5 2\pi(y-1)(4-(y-3)^2) dy \\ &= 2\pi \int_1^5 (y-1)(-y^2+6y-5) dy \\ &= 2\pi \int_1^5 -y^3+7y^2-11y+5 dy \\ &= 2\pi \left(-\frac{y^4}{4} + 7\frac{y^3}{3} - 11\frac{y^2}{2} + 5y \right) \Big|_1^5 \\ &= 2\pi \left[\left(-\frac{5^4}{4} + 7\frac{5^3}{3} - 11\frac{5^2}{2} + 25 \right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{7}{3} - \frac{11}{2} + 5 \right) \right] = \frac{128\pi}{3} \end{aligned}$$

Exemplo 6

Exemplo 6

Use os dois métodos estudados para encontrar o volume do sólido gerado pela rotação da região delimitada pelas curvas

$$y = 5 - 4x \quad y = \sqrt{x} \quad x = 0$$

em torno do eixo y

Conteúdo

Casca Cilíndricas

Volumes por Cascas Cilíndricas

Exemplos

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Exemplo 4

Exemplo 5

Exemplo 6

Lista Mínima

Lista Mínima

Estudar a Seção 3.4 da Apostila

Exercícios:

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações