

Integrais de Funções Trigonométricas

1 – Senos e Cossenos

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries



<https://material-didatico.github.io/pages/is>

Conteúdo

Integrais de Funções Trigonométricas

Senos e Cossenos

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Exemplo 4

Lista Mínima

Objetivo

Estratégias para calcular

$$\int \operatorname{sen}^m(x) \cos^n(x) dx$$

Objetivo

Estratégias para calcular

$$\int \operatorname{sen}^m(x) \cos^n(x) dx$$

$$\int \operatorname{tg}^m(x) \sec^n(x) dx$$

Objetivo

Estratégias para calcular

$$\int \operatorname{sen}^m(x) \cos^n(x) \, dx$$

$$\int \operatorname{tg}^m(x) \sec^n(x) \, dx$$

$$\int \cot^m(x) \operatorname{cosec}^m(x) \, dx$$

Substituição Simples – Abordagem Ingenua

$$I = \int \operatorname{sen}^3(x) \cos^2(x) dx$$

$$\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$$

Substituição Simples – Abordagem Ingenua

$$I = \int \operatorname{sen}^3(x) \cos^2(x) dx$$

$$\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$$

$$= \int \operatorname{sen}^3(x) (1 - \operatorname{sen}^2(x)) dx$$

Substituição Simples – Abordagem Ingenua

$$\begin{aligned} I &= \int \operatorname{sen}^3(x) \cos^2(x) dx & \cos^2(x) &= 1 - \operatorname{sen}^2(x) \\ &= \int \operatorname{sen}^3(x) (1 - \operatorname{sen}^2(x)) dx \\ &= \int \operatorname{sen}^3(x) - \operatorname{sen}^5(x) dx \end{aligned}$$

Substituição Simples – Abordagem Ingenua

$$I = \int \operatorname{sen}^3(x) \cos^2(x) dx$$

$$\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$$

$$= \int \operatorname{sen}^3(x) (1 - \operatorname{sen}^2(x)) dx$$

$$= \int \operatorname{sen}^3(x) - \operatorname{sen}^5(x) dx$$

$$= \int \operatorname{sen}^3(x) dx - \int \operatorname{sen}^5(x) dx$$

$$u = \operatorname{sen}(x)$$

$$du = \cos(x) dx$$

Substituição Simples – Abordagem Ingenua

$$I = \int \sin^3(x) \cos^2(x) dx$$

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$$

$$= \int \sin^3(x) (1 - \sin^2(x)) dx$$

$$= \int \sin^3(x) - \sin^5(x) dx$$

$$= \int \sin^3(x) dx - \int \sin^5(x) dx$$

$$u = \sin(x) \quad du = \cos(x) dx$$

$$= ?$$

Relações Trigonometrias Úteis

Relação fundamental

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Relações Trigonometrias Úteis

Relação fundamental

$$\operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{cos}^2(x) = 1$$

Decorências da relação fundamental

$$\operatorname{tg}^2(x) + 1 = \operatorname{sec}^2(x)$$

$$1 + \operatorname{cot}^2(x) = \operatorname{cossec}^2(x)$$

Relações Trigonometrias Úteis

Relação fundamental

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Decorrências da relação fundamental

$$\operatorname{tg}^2(x) + 1 = \sec^2(x)$$

$$1 + \cot^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x)$$

Senos e cossenos da soma

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen}(x) \cos(y) + \cos(x) \operatorname{sen}(y)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y)$$

Relações Trigonometrias Úteis

Relação fundamental

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Decorrências da relação fundamental

$$\operatorname{tg}^2(x) + 1 = \sec^2(x)$$

$$1 + \cot^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x)$$

Senos e cossenos da soma

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen}(x) \cos(y) + \cos(x) \operatorname{sen}(y)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y)$$

Arco duplo

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen}(x) \cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$$

Relações Trigonometrias Úteis

Relação fundamental

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Decorrências da relação fundamental

$$\operatorname{tg}^2(x) + 1 = \sec^2(x)$$

$$1 + \cot^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x)$$

Seno e cosseno da soma

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen}(x) \cos(y) + \cos(x) \operatorname{sen}(y)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y)$$

Arco duplo

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen}(x) \cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$$

Arco metade

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2x))$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2x))$$

Derivadas

$$(\operatorname{sen}(x))' = \cos(x)$$

$$(\cos(x))' = -\operatorname{sen}(x)$$

$$(\operatorname{tg}(x))' = \sec^2(x)$$

$$(\sec(x))' = \operatorname{tg}(x) \sec(x)$$

$$(\operatorname{cossec}(x))' = \cot(x) \operatorname{cossec}(x)$$

$$(\cot(x))' = -\operatorname{cossec}^2(x)$$

Conteúdo

Integrais de Funções Trigonométricas

Senos e Cossenos

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Exemplo 4

Lista Mínima

Senos $\times$ cossenos

Estratégias para calcular

$$\int \operatorname{sen}^m(x) \cos^n(x) dx$$

Depende se m ou n são pares ou ímpares

Potência do $\sin(x)$ é ímpar

Potência do $\sin(x)$ é ímpar

Potência do $\sin(x)$ é ímpar

Potência do $\sin(x)$ é ímpar

1. Guarde um fator $\sin(x)$

Potência do $\sin(x)$ é ímpar

Potência do $\sin(x)$ é ímpar

1. Guarde um fator $\sin(x)$
2. Use que $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$

Potência do $\sin(x)$ é ímpar

Potência do $\sin(x)$ é ímpar

1. Guarde um fator $\sin(x)$
2. Use que $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$
3. Faça a substituição $u = \cos(x)$

Potência do $\cos(x)$ é ímpar

Potência do $\cos(x)$ é ímpar

Potência do $\cos(x)$ é ímpar

Potência do $\cos(x)$ é ímpar

1. Guarde um fator $\cos(x)$

Potência do $\cos(x)$ é ímpar

Potência do $\cos(x)$ é ímpar

1. Guarde um fator $\cos(x)$
2. Use que $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$

Potência do $\cos(x)$ é ímpar

Potência do $\cos(x)$ é ímpar

1. Guarde um fator $\cos(x)$
2. Use que $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$
3. Faça a substituição $u = \sin(x)$

Ambas são pares

Ambas são pares

Ambas são pares

Ambas são pares

Use

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \quad \text{ou} \quad \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

Ambas são pares

Ambas são pares

Use

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \quad \text{ou} \quad \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

Transformação útil

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen}(x) \cos(x)$$

Conteúdo

Integrais de Funções Trigonométricas

Senos e Cossenos

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Exemplo 4

Lista Mínima

Exemplo 1

Calcule $\int \sin^3(x) \cos^2(x) dx$

Exemplo 1

Calcule $\int \sin^3(x) \cos^2(x) dx$

Integral do tipo

$$\int \sin^m(x) \cos^n(x) dx \quad m \text{ ímpar}$$

Exemplo 1

Calcule $\int \sin^3(x) \cos^2(x) dx$

Integral do tipo

$$\int \sin^m(x) \cos^n(x) dx \quad m \text{ ímpar}$$

Guardar $\sin(x)$

Exemplo 1

Calcule $\int \sin^3(x) \cos^2(x) dx$

Integral do tipo

$$\int \sin^m(x) \cos^n(x) dx \quad m \text{ ímpar}$$

Guardar $\sin(x)$

Usar $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$

Exemplo 1

$$F = \int \operatorname{sen}^3(x) \cos^2(x) \, dx$$

Exemplo 1

$$\begin{aligned} F &= \int \operatorname{sen}^3(x) \cos^2(x) \, dx \\ &= \int \operatorname{sen}^2(x) \cos^2(x) \operatorname{sen}(x) \, dx \end{aligned}$$

Exemplo 1

$$\begin{aligned} F &= \int \operatorname{sen}^3(x) \cos^2(x) \, dx \\ &= \int \operatorname{sen}^2(x) \cos^2(x) \operatorname{sen}(x) \, dx \\ &= \int (1 - \cos^2(x)) \cos^2(x) \operatorname{sen}(x) \, dx \end{aligned}$$

Exemplo 1

$$\begin{aligned} F &= \int \operatorname{sen}^3(x) \cos^2(x) \, dx \\ &= \int \operatorname{sen}^2(x) \cos^2(x) \operatorname{sen}(x) \, dx \\ &= \int (1 - \cos^2(x)) \cos^2(x) \operatorname{sen}(x) \, dx \end{aligned}$$

Substituição simples

$$u = \cos(x) \quad du = -\operatorname{sen}(x) \, dx$$

Exemplo 1

$$\begin{aligned} F &= \int \operatorname{sen}^3(x) \cos^2(x) \, dx \\ &= \int \operatorname{sen}^2(x) \cos^2(x) \operatorname{sen}(x) \, dx \\ &= \int (1 - \cos^2(x)) \cos^2(x) \operatorname{sen}(x) \, dx \end{aligned}$$

Substituição simples

$$u = \cos(x) \quad du = -\operatorname{sen}(x) \, dx$$

$$F = \int (1 - u^2) u^2 (-du)$$

Exemplo 1

$$F = \int (1 - u^2) u^2 (-du)$$

Exemplo 1

$$\begin{aligned} F &= \int (1 - u^2) u^2 (-du) \\ &= \int (u^2 - 1) u^2 du \end{aligned}$$

Exemplo 1

$$F = \int (1 - u^2) u^2 (-du)$$

$$= \int (u^2 - 1) u^2 du$$

$$= \int u^4 - u^2 du$$

Exemplo 1

$$F = \int (1 - u^2) u^2 (-du)$$

$$= \int (u^2 - 1) u^2 du$$

$$= \int u^4 - u^2 du$$

$$= \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C$$

Exemplo 1

$$\begin{aligned} F &= \int (1 - u^2) u^2 (-du) \\ &= \int (u^2 - 1) u^2 du \\ &= \int u^4 - u^2 du \\ &= \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C \\ &= \frac{1}{5} \cos^5(x) - \frac{1}{3} \cos^3(x) + C \end{aligned}$$

Conteúdo

Integrais de Funções Trigonométricas

Senos e Cossenos

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Exemplo 4

Lista Mínima

Exemplo 2

Encontre $\int \cos^3(x) \, dx$

Exemplo 2

Encontre $\int \cos^3(x) dx$

Integral do tipo

$$\int \sin^m(x) \cos^n(x) dx \quad m = 0 \text{ e } n \text{ ímpar}$$

Exemplo 2

Encontre $\int \cos^3(x) dx$

Integral do tipo

$$\int \sin^m(x) \cos^n(x) dx \quad m = 0 \text{ e } n \text{ ímpar}$$

Guardar $\cos(x)$

Exemplo 2

Encontre $\int \cos^3(x) dx$

Integral do tipo

$$\int \sin^m(x) \cos^n(x) dx \quad m = 0 \text{ e } n \text{ ímpar}$$

Guardar $\cos(x)$

Usar $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$

Exemplo 2

$$F = \int \cos^3(x) \, dx$$

Exemplo 2

$$F = \int \cos^3(x) \, dx$$

$$= \int \cos^2(x) \cos(x) \, dx$$

Exemplo 2

$$F = \int \cos^3(x) \, dx$$

$$= \int \cos^2(x) \cos(x) \, dx$$

$$= \int (1 - \sin^2(x)) \cos(x) \, dx$$

Exemplo 2

$$F = \int \cos^3(x) \, dx$$

$$= \int \cos^2(x) \cos(x) \, dx$$

$$= \int (1 - \sin^2(x)) \cos(x) \, dx$$

Substituição simples

$$u = \sin(x) \quad du = \cos(x) \, dx$$

Exemplo 2

$$F = \int \cos^3(x) \, dx$$

$$= \int \cos^2(x) \cos(x) \, dx$$

$$= \int (1 - \sin^2(x)) \cos(x) \, dx$$

Substituição simples

$$u = \sin(x) \quad du = \cos(x) \, dx$$

$$F = \int (1 - u^2) \, du$$

Exemplo 2

$$F = \int 1 - u^2 \, du$$

Exemplo 2

$$F = \int 1 - u^2 \, du$$

$$= u - \frac{u^3}{3} + C$$

Exemplo 2

$$F = \int 1 - u^2 \, du$$

$$= u - \frac{u^3}{3} + C$$

$$= \operatorname{sen}(x) - \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3(x) + C$$

Conteúdo

Integrais de Funções Trigonométricas

Senos e Cossenos

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Exemplo 4

Lista Mínima

Exemplo 3

Calcule $\int_0^{\pi} \sin^2(x) dx$

Exemplo 3

Calcule $\int_0^{\pi} \sin^2(x) dx$

Integral do tipo

$$\int \sin^m(x) \cos^n(x) dx \quad n = 0 \text{ e } m \text{ par}$$

Exemplo 3

Calcule $\int_0^{\pi} \sin^2(x) dx$

Integral do tipo

$$\int \sin^m(x) \cos^n(x) dx \quad n = 0 \text{ e } m \text{ par}$$

$$\text{Usar } \sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

Exemplo 3

$$\int_0^{\pi} \sin^2(x) \, dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos(2x)) \, dx$$

Exemplo 3

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin^2(x) \, dx &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos(2x)) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} 1 - \cos(2x) \, dx\end{aligned}$$

Exemplo 3

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin^2(x) \, dx &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos(2x)) \, dx \\&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} 1 - \cos(2x) \, dx \\&= \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin(2x)}{2} \right) \Big|_0^{\pi}\end{aligned}$$

Exemplo 3

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin^2(x) \, dx &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos(2x)) \, dx \\&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} 1 - \cos(2x) \, dx \\&= \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin(2x)}{2} \right) \Big|_0^{\pi} \\&= \frac{1}{2} \left[\left(\pi - \frac{\sin(2\pi)}{2} \right) - \left(0 - \frac{\sin(0)}{2} \right) \right]\end{aligned}$$

Exemplo 3

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin^2(x) \, dx &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos(2x)) \, dx \\&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} 1 - \cos(2x) \, dx \\&= \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin(2x)}{2} \right) \Big|_0^{\pi} \\&= \frac{1}{2} \left[\left(\pi - \frac{\sin(2\pi)}{2} \right) - \left(0 - \frac{\sin(0)}{2} \right) \right] \\&= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Conteúdo

Integrais de Funções Trigonométricas

Senos e Cossenos

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Exemplo 4

Lista Mínima

Exemplo 4

Calcule $\int \sin^2(x) \cos^2(x) dx$

Exemplo 4

Calcule $\int \sin^2(x) \cos^2(x) dx$

Integral do tipo

$$\int \sin^m(x) \cos^n(x) dx \quad m \text{ e } n \text{ pares}$$

Exemplo 4

Calcule $\int \sin^2(x) \cos^2(x) dx$

Integral do tipo

$$\int \sin^m(x) \cos^n(x) dx \quad m \text{ e } n \text{ pares}$$

Usar

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

Exemplo 4

$$F = \int \sin^2(x) \cos^2(x) dx$$

Exemplo 4

$$\begin{aligned} F &= \int \sin^2(x) \cos^2(x) dx \\ &= \int \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) dx \end{aligned}$$

Exemplo 4

$$F = \int \sin^2(x) \cos^2(x) dx$$

$$= \int \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int 1 - \cos^2(2x) dx$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Exemplo 4

$$F = \int \sin^2(x) \cos^2(x) dx$$

$$= \int \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int 1 - \cos^2(2x) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \sin^2(2x) dx$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Exemplo 4

$$F = \int \sin^2(x) \cos^2(x) dx$$

$$= \int \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int 1 - \cos^2(2x) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \sin^2(2x) dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{2}(1 - \cos(4x)) dx$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Exemplo 4

$$F = \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} (1 - \cos(4x)) dx$$

Exemplo 4

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} (1 - \cos(4x)) dx \\ &= \frac{1}{8} \left(\int 1 dx - \int \cos(4x) dx \right) \end{aligned}$$

Exemplo 4

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} (1 - \cos(4x)) dx \\ &= \frac{1}{8} \left(\int 1 dx - \int \cos(4x) dx \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(x - \frac{\text{sen}(4x)}{4} + c \right) \end{aligned}$$

Exemplo 4

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} (1 - \cos(4x)) dx \\ &= \frac{1}{8} \left(\int 1 dx - \int \cos(4x) dx \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(x - \frac{\text{sen}(4x)}{4} + c \right) \\ &= \frac{x}{8} - \frac{\text{sen}(4x)}{32} + c \end{aligned}$$

Conteúdo

Integrais de Funções Trigonométricas

Senos e Cossenos

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Exemplo 4

Lista Mínima

Lista Mínima

Estudar a Seção 4.3 da Apostila

Exercícios: 1a-f, 2, 3, 5, 6

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações