

Integrais de Funções Trigonométricas

2 – Tangentes e Secantes

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries



<https://material-didatico.github.io/pages/is>

Conteúdo

Tangente e Secante

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Lista Mínima

Tangente $\times$ secante

Estratégias para calcular

$$\int \operatorname{tg}^m(x) \sec^n(x) dx$$

Potência da $\sec(x)$ é par

Potência da secante $n = 2k$ com $k \geq 2$

Potência da $\sec(x)$ é par

Potência da secante $n = 2k$ com $k \geq 2$

1. Guarde um fator $\sec^2(x)$

Potência da $\sec(x)$ é par

Potência da secante $n = 2k$ com $k \geq 2$

1. Guarde um fator $\sec^2(x)$
2. Use que $\sec^2(x) = 1 + \operatorname{tg}^2(x)$

Potência da $\sec(x)$ é par

Potência da secante $n = 2k$ com $k \geq 2$

1. Guarde um fator $\sec^2(x)$
2. Use que $\sec^2(x) = 1 + \operatorname{tg}^2(x)$
3. Faça a substituição $u = \operatorname{tg}(x)$

Potência da $\operatorname{tg}(x)$ é ímpar

Potência da $\operatorname{tg}(x)$ é ímpar

Potência da $\operatorname{tg}(x)$ é ímpar

Potência da $\operatorname{tg}(x)$ é ímpar

1. Guarde um fator $\sec(x) \operatorname{tg}(x)$

Potência da $\operatorname{tg}(x)$ é ímpar

Potência da $\operatorname{tg}(x)$ é ímpar

1. Guarde um fator $\sec(x) \operatorname{tg}(x)$
2. Use que $\operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x) - 1$

Potência da $\operatorname{tg}(x)$ é ímpar

Potência da $\operatorname{tg}(x)$ é ímpar

1. Guarde um fator $\sec(x) \operatorname{tg}(x)$
2. Use que $\operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x) - 1$
3. Faça a substituição $u = \sec(x)$

Outros Casos

Não tem regra geral

Dependem de manipulações trigonométricas específicas

Conteúdo

Tangente e Secante

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Lista Mínima

Exemplo 1

Encontre $\int \operatorname{tg}^6(x) \sec^4(x) \, dx$

Exemplo 1

Encontre $\int \operatorname{tg}^6(x) \sec^4(x) dx$

Integral do tipo

$$\int \operatorname{tg}^m(x) \sec^n(x) dx \quad n = 2k \quad k \geq 2$$

Exemplo 1

Encontre $\int \operatorname{tg}^6(x) \sec^4(x) dx$

Integral do tipo

$$\int \operatorname{tg}^m(x) \sec^n(x) dx \quad n = 2k \quad k \geq 2$$

Guardar $\sec^2(x)$

Exemplo 1

Encontre $\int \operatorname{tg}^6(x) \sec^4(x) dx$

Integral do tipo

$$\int \operatorname{tg}^m(x) \sec^n(x) dx \quad n = 2k \quad k \geq 2$$

Guardar $\sec^2(x)$

Usar $\sec^2(x) = 1 + \operatorname{tg}^2(x)$

Exemplo 1

$$F = \int \operatorname{tg}^6(x) \sec^4(x) \, dx$$

Exemplo 1

$$\begin{aligned} F &= \int \operatorname{tg}^6(x) \sec^4(x) \, dx \\ &= \int \operatorname{tg}^6(x) \sec^2(x) \sec^2(x) \, dx \end{aligned}$$

Exemplo 1

$$\begin{aligned} F &= \int \operatorname{tg}^6(x) \sec^4(x) \, dx \\ &= \int \operatorname{tg}^6(x) \sec^2(x) \sec^2(x) \, dx \\ &= \int \operatorname{tg}^6(x) (1 + \operatorname{tg}^2(x)) \sec^2(x) \, dx \end{aligned}$$

Exemplo 1

$$\begin{aligned} F &= \int \operatorname{tg}^6(x) \sec^4(x) \, dx \\ &= \int \operatorname{tg}^6(x) \sec^2(x) \sec^2(x) \, dx \\ &= \int \operatorname{tg}^6(x) (1 + \operatorname{tg}^2(x)) \sec^2(x) \, dx \end{aligned}$$

Substituição simples

$$u = \operatorname{tg}(x) \quad du = \sec^2(x) \, dx$$

Exemplo 1

$$\begin{aligned} F &= \int \operatorname{tg}^6(x) \sec^4(x) \, dx \\ &= \int \operatorname{tg}^6(x) \sec^2(x) \sec^2(x) \, dx \\ &= \int \operatorname{tg}^6(x) (1 + \operatorname{tg}^2(x)) \sec^2(x) \, dx \end{aligned}$$

Substituição simples

$$u = \operatorname{tg}(x) \quad du = \sec^2(x) \, dx$$

$$F = \int u^6 (1 - u^2) \, du$$

Exemplo 1

$$F = \int u^6 (1 + u^2) du$$

Exemplo 1

$$F = \int u^6 (1 + u^2) du$$

$$\int u^6 + u^8 du$$

Exemplo 1

$$F = \int u^6 (1 + u^2) du$$

$$\int u^6 + u^8 du$$

$$= \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C$$

Exemplo 1

$$F = \int u^6 (1 + u^2) du$$

$$\int u^6 + u^8 du$$

$$= \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C$$

$$= \frac{1}{7} \operatorname{tg}^7(x) + \frac{1}{9} \operatorname{tg}^9(x) + C$$

Conteúdo

Tangente e Secante

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Lista Mínima

Exemplo 2

Encontre $\int \operatorname{tg}^5(x) \sec^7(x) dx$

Exemplo 2

Encontre $\int \operatorname{tg}^5(x) \sec^7(x) dx$

Integral do tipo

$$\int \operatorname{tg}^m(x) \sec^n(x) dx \quad m \text{ ímpar}$$

Exemplo 2

Encontre $\int \operatorname{tg}^5(x) \sec^7(x) dx$

Integral do tipo

$$\int \operatorname{tg}^m(x) \sec^n(x) dx \quad m \text{ ímpar}$$

Guardar $\sec(x) \operatorname{tg}(x)$

Exemplo 2

Encontre $\int \operatorname{tg}^5(x) \sec^7(x) dx$

Integral do tipo

$$\int \operatorname{tg}^m(x) \sec^n(x) dx \quad m \text{ ímpar}$$

Guardar $\sec(x) \operatorname{tg}(x)$

Usar $\operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x) - 1$

Exemplo 2

$$F = \int \operatorname{tg}^5(x) \sec^7(x) \, dx$$

Exemplo 2

$$\begin{aligned} F &= \int \operatorname{tg}^5(x) \sec^7(x) \, dx \\ &= \int \operatorname{tg}^4(x) \sec^6(x) \quad \sec(x) \operatorname{tg}(x) \, dx \end{aligned}$$

Exemplo 2

$$\begin{aligned} F &= \int \operatorname{tg}^5(x) \sec^7(x) \, dx \\ &= \int \operatorname{tg}^4(x) \sec^6(x) \sec(x) \operatorname{tg}(x) \, dx \\ &= \int [\operatorname{tg}^2(x)]^2 \sec^6(x) \sec(x) \operatorname{tg}(x) \, dx \end{aligned}$$

Exemplo 2

$$\begin{aligned} F &= \int \operatorname{tg}^5(x) \sec^7(x) \, dx \\ &= \int \operatorname{tg}^4(x) \sec^6(x) \sec(x) \operatorname{tg}(x) \, dx \\ &= \int [\operatorname{tg}^2(x)]^2 \sec^6(x) \sec(x) \operatorname{tg}(x) \, dx \\ &= \int [\sec^2(x) - 1]^2 \sec^6(x) \sec(x) \operatorname{tg}(x) \, dx \end{aligned}$$

Exemplo 2

$$F = \int \operatorname{tg}^5(x) \sec^7(x) dx$$

$$= \int \operatorname{tg}^4(x) \sec^6(x) \sec(x) \operatorname{tg}(x) dx$$

$$= \int [\operatorname{tg}^2(x)]^2 \sec^6(x) \sec(x) \operatorname{tg}(x) dx$$

$$= \int [\sec^2(x) - 1]^2 \sec^6(x) \sec(x) \operatorname{tg}(x) dx$$

Substituição simples

$$u = \sec(x) \quad du = \sec(x) \operatorname{tg}(x) dx$$

Exemplo 2

$$F = \int \operatorname{tg}^5(x) \sec^7(x) dx$$

$$= \int \operatorname{tg}^4(x) \sec^6(x) \sec(x) \operatorname{tg}(x) dx$$

$$= \int [\operatorname{tg}^2(x)]^2 \sec^6(x) \sec(x) \operatorname{tg}(x) dx$$

$$= \int [\sec^2(x) - 1]^2 \sec^6(x) \sec(x) \operatorname{tg}(x) dx$$

Substituição simples

$$u = \sec(x) \quad du = \sec(x) \operatorname{tg}(x) dx$$

$$F = \int (u^2 - 1)^2 u^6 du$$

Exemplo 2

$$F = \int (u^2 - 1)^2 u^6 du$$

Exemplo 2

$$\begin{aligned} F &= \int (u^2 - 1)^2 u^6 du \\ &= \int (u^4 - 2u^2 + 1) u^6 du \end{aligned}$$

Exemplo 2

$$\begin{aligned} F &= \int (u^2 - 1)^2 u^6 du \\ &= \int (u^4 - 2u^2 + 1) u^6 du \\ &= \int u^{10} - 2u^8 + u^6 du \end{aligned}$$

Exemplo 2

$$\begin{aligned} F &= \int (u^2 - 1)^2 u^6 du \\ &= \int (u^4 - 2u^2 + 1) u^6 du \\ &= \int u^{10} - 2u^8 + u^6 du \\ &= \frac{u^{11}}{11} - \frac{2u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C \end{aligned}$$

Exemplo 2

$$\begin{aligned} F &= \int (u^2 - 1)^2 u^6 du \\ &= \int (u^4 - 2u^2 + 1) u^6 du \\ &= \int u^{10} - 2u^8 + u^6 du \\ &= \frac{u^{11}}{11} - \frac{2u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C \\ &= \frac{1}{11} \sec^{11}(x) - \frac{2}{9} \sec^9(x) + \frac{1}{7} \sec^7(x) + C \end{aligned}$$

Conteúdo

Tangente e Secante

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Lista Mínima

Exemplo 3

Calcule $\int \operatorname{tg}^3(x) \, dx$

Exemplo 3

Calcule $\int \operatorname{tg}^3(x) \, dx$

Integral do tipo

$$\int \operatorname{tg}^m(x) \sec^n(x) \, dx \quad n = 0 \quad m \text{ ímpar}$$

Exemplo 3

Calcule $\int \operatorname{tg}^3(x) \, dx$

Integral do tipo

$$\int \operatorname{tg}^m(x) \sec^n(x) \, dx \quad n = 0 \quad m \text{ ímpar}$$

Usar $\operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x) - 1$

Exemplo 3

$$F = \int \operatorname{tg}^3(x) \, dx$$

Exemplo 3

$$F = \int \operatorname{tg}^3(x) \, dx$$

$$= \int \operatorname{tg}(x) \operatorname{tg}^2(x) \, dx$$

Exemplo 3

$$F = \int \operatorname{tg}^3(x) \, dx$$

$$= \int \operatorname{tg}(x) \operatorname{tg}^2(x) \, dx$$

$$= \int \operatorname{tg}(x) (\sec^2(x) - 1) \, dx$$

Exemplo 3

$$\begin{aligned} F &= \int \operatorname{tg}^3(x) \, dx \\ &= \int \operatorname{tg}(x) \operatorname{tg}^2(x) \, dx \\ &= \int \operatorname{tg}(x) (\sec^2(x) - 1) \, dx \\ &= \int \operatorname{tg}(x) \sec^2(x) \, dx - \int \operatorname{tg}(x) \, dx \end{aligned}$$

Exemplo 3

$$G = \int \operatorname{tg}(x) \sec^2(x) \, dx$$

Exemplo 3

$$G = \int \operatorname{tg}(x) \sec^2(x) dx$$

Substituição

$$u = \operatorname{tg}(x) \quad du = \sec^2(x) dx$$

Exemplo 3

$$G = \int \operatorname{tg}(x) \sec^2(x) \, dx$$

Substituição

$$u = \operatorname{tg}(x) \quad du = \sec^2(x) \, dx$$

$$G = \int \operatorname{tg}(x) \sec^2(x) \, dx$$

Exemplo 3

$$G = \int \operatorname{tg}(x) \sec^2(x) dx$$

Substituição

$$u = \operatorname{tg}(x) \quad du = \sec^2(x) dx$$

$$\begin{aligned} G &= \int \operatorname{tg}(x) \sec^2(x) dx \\ &= \int u du \end{aligned}$$

Exemplo 3

$$G = \int \operatorname{tg}(x) \sec^2(x) dx$$

Substituição

$$u = \operatorname{tg}(x) \quad du = \sec^2(x) dx$$

$$G = \int \operatorname{tg}(x) \sec^2(x) dx$$

$$= \int u du$$

$$= \frac{u^2}{2} + C$$

Exemplo 3

$$G = \int \operatorname{tg}(x) \sec^2(x) dx$$

Substituição

$$u = \operatorname{tg}(x) \quad du = \sec^2(x) dx$$

$$G = \int \operatorname{tg}(x) \sec^2(x) dx$$

$$= \int u du$$

$$= \frac{u^2}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(x) + C$$

Exemplo 3

Logo,

$$F = \int \operatorname{tg}^3(x) dx$$

Exemplo 3

Logo,

$$\begin{aligned} F &= \int \operatorname{tg}^3(x) dx \\ &= \int \operatorname{tg}(x) \sec^2(x) dx - \int \operatorname{tg}(x) dx \end{aligned}$$

Exemplo 3

Logo,

$$\begin{aligned} F &= \int \operatorname{tg}^3(x) dx \\ &= \int \operatorname{tg}(x) \sec^2(x) dx - \int \operatorname{tg}(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(x) + \ln|\cos(x)| + C \end{aligned}$$

Conteúdo

Tangente e Secante

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Lista Mínima

Lista Mínima

Estudar a Seção 4.3 da Apostila

Exercícios: 1i, 1j, 1m

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações