

Integração por Substituição Trigonométrica

2 – Substituição pela tangente

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries



<https://material-didatico.github.io/pages/is>

Conteúdo

Integração por Substituição Trigonométrica

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Lista Mínima

Substituições Trigonométricas

Expressão	Substituição	Intervalo	Identidade
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen}(\theta)$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$1 - \operatorname{sen}^2(\theta) = \cos^2(\theta)$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \operatorname{tg}(\theta)$	$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + \operatorname{tg}^2(\theta) = \sec^2(\theta)$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec(\theta)$	$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\sec^2(\theta) - 1 = \operatorname{tg}^2(\theta)$

Conteúdo

Integração por Substituição Trigonométrica

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Lista Mínima

Exemplo 1

Encontre $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 4}}$

Exemplo 1

Encontre $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 4}}$

Note $\sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{2^2 + x^2}$

Exemplo 1

Encontre $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 4}}$

Note $\sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{2^2 + x^2}$

Substituição inversa

$$x = 2 \operatorname{tg}(\theta) \qquad dx = 2 \sec^2(\theta) d\theta \qquad \text{com} \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Exemplo 1

$$F = \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 4}} dx$$

$$x = 2 \operatorname{tg}(\theta)$$

Exemplo 1

$$F = \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 4}} dx$$

$$x = 2 \operatorname{tg}(\theta)$$

$$= \int \frac{1}{4 \operatorname{tg}^2(\theta) \sqrt{4 \operatorname{tg}^2(\theta) + 4}} 2 \sec^2(\theta) d\theta$$

Exemplo 1

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 4}} dx & x &= 2 \operatorname{tg}(\theta) \\ &= \int \frac{1}{4 \operatorname{tg}^2(\theta) \sqrt{4 \operatorname{tg}^2(\theta) + 4}} 2 \sec^2(\theta) d\theta \\ &= \int \frac{\sec^2(\theta)}{2 \operatorname{tg}^2(\theta) \sqrt{4(1 + \operatorname{tg}^2(\theta))}} d\theta \end{aligned}$$

Exemplo 1

$$F = \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 4}} dx$$

$$x = 2 \operatorname{tg}(\theta)$$

$$= \int \frac{1}{4 \operatorname{tg}^2(\theta) \sqrt{4 \operatorname{tg}^2(\theta) + 4}} 2 \sec^2(\theta) d\theta$$

$$= \int \frac{\sec^2(\theta)}{2 \operatorname{tg}^2(\theta) \sqrt{4(1 + \operatorname{tg}^2(\theta))}} d\theta$$

$$= \int \frac{\sec^2(\theta)}{4 \operatorname{tg}^2(\theta) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\theta)}} d\theta$$

$$1 + \operatorname{tg}^2(\theta) = \sec^2(\theta)$$

Exemplo 1

$$F = \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 4}} dx$$

$$x = 2 \operatorname{tg}(\theta)$$

$$= \int \frac{1}{4 \operatorname{tg}^2(\theta) \sqrt{4 \operatorname{tg}^2(\theta) + 4}} 2 \sec^2(\theta) d\theta$$

$$= \int \frac{\sec^2(\theta)}{2 \operatorname{tg}^2(\theta) \sqrt{4(1 + \operatorname{tg}^2(\theta))}} d\theta$$

$$= \int \frac{\sec^2(\theta)}{4 \operatorname{tg}^2(\theta) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\theta)}} d\theta$$

$$1 + \operatorname{tg}^2(\theta) = \sec^2(\theta)$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{\sec^2(\theta)}{\operatorname{tg}^2(\theta) \sqrt{\sec^2(\theta)}} d\theta$$

Exemplo 1

$$F = \frac{1}{4} \int \frac{\sec^2(\theta)}{\operatorname{tg}^2(\theta) \sqrt{\sec^2(\theta)}} d\theta$$

Exemplo 1

$$F = \frac{1}{4} \int \frac{\sec^2(\theta)}{\operatorname{tg}^2(\theta) \sqrt{\sec^2(\theta)}} d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{\sec(\theta)}{\operatorname{tg}^2(\theta)} d\theta$$

Exemplo 1

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4} \int \frac{\sec^2(\theta)}{\operatorname{tg}^2(\theta) \sqrt{\sec^2(\theta)}} d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{\sec(\theta)}{\operatorname{tg}^2(\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{\cos(\theta)} \left(\frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)} \right)^2 d\theta \end{aligned}$$

Exemplo 1

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4} \int \frac{\sec^2(\theta)}{\operatorname{tg}^2(\theta) \sqrt{\sec^2(\theta)}} d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{\sec(\theta)}{\operatorname{tg}^2(\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{\cos(\theta)} \left(\frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)} \right)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}^2(\theta)} d\theta \end{aligned}$$

Exemplo 1

$$\text{Integrar } F = \frac{1}{4} \int \frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} d\theta$$

Exemplo 1

Integrar $F = \frac{1}{4} \int \frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} d\theta$

Substituição simples

$$u = \sin(\theta) \quad du = \cos(\theta) d\theta$$

Exemplo 1

Integrar $F = \frac{1}{4} \int \frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} d\theta$

Substituição simples

$$u = \sin(\theta) \quad du = \cos(\theta) d\theta$$

Temos

$$F = \frac{1}{4} \int \frac{du}{u^2}$$

Exemplo 1

Integrar $F = \frac{1}{4} \int \frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} d\theta$

Substituição simples

$$u = \sin(\theta) \quad du = \cos(\theta) d\theta$$

Temos

$$F = \frac{1}{4} \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{4} \int u^{-2} du$$

Exemplo 1

Integrar $F = \frac{1}{4} \int \frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} d\theta$

Substituição simples

$$u = \sin(\theta) \quad du = \cos(\theta) d\theta$$

Temos

$$F = \frac{1}{4} \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{4} \int u^{-2} du = \frac{1}{4} \left(\frac{u^{-1}}{-1} + C \right)$$

Exemplo 1

Integrar $F = \frac{1}{4} \int \frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} d\theta$

Substituição simples

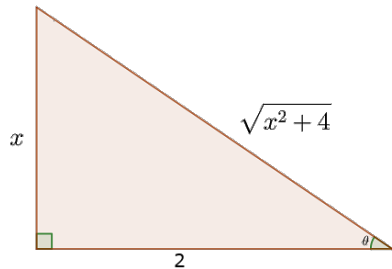
$$u = \sin(\theta) \quad du = \cos(\theta) d\theta$$

Temos

$$F = \frac{1}{4} \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{4} \int u^{-2} du = \frac{1}{4} \left(\frac{u^{-1}}{-1} + C \right) = \frac{-1}{4 \sin(\theta)} + C_1$$

Exemplo 1

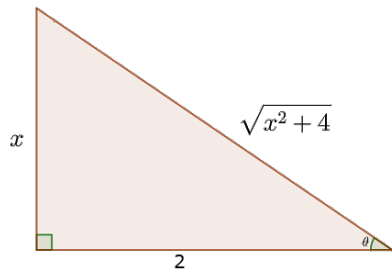
$$x = 2 \operatorname{tg}(\theta) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}(\theta) = \frac{x}{2}$$



Exemplo 1

$$x = 2 \operatorname{tg}(\theta) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}(\theta) = \frac{x}{2}$$

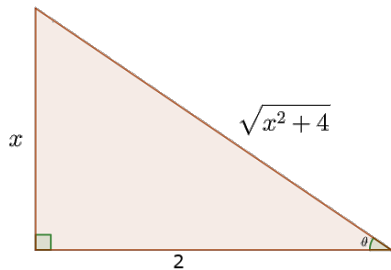
$$\frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} = \operatorname{cosec}(\theta)$$



Exemplo 1

$$x = 2 \operatorname{tg}(\theta) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}(\theta) = \frac{x}{2}$$

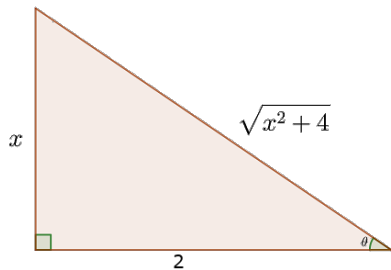
$$\frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} = \operatorname{cosec}(\theta) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}}$$



Exemplo 1

$$x = 2 \operatorname{tg}(\theta) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}(\theta) = \frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} = \operatorname{cosec}(\theta) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}} = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x}$$

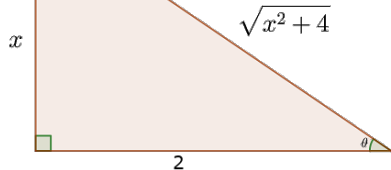


Exemplo 1

$$x = 2 \operatorname{tg}(\theta) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}(\theta) = \frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} = \operatorname{cosec}(\theta) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}} = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x}$$

$$F = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 4}}$$

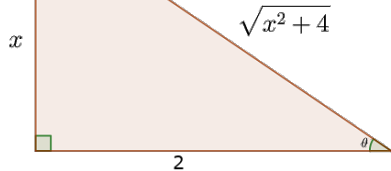


Exemplo 1

$$x = 2 \operatorname{tg}(\theta) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}(\theta) = \frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} = \operatorname{cosec}(\theta) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}} = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x}$$

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 4}} \\ &= \frac{-1}{4 \operatorname{sen}(\theta)} + C \end{aligned}$$

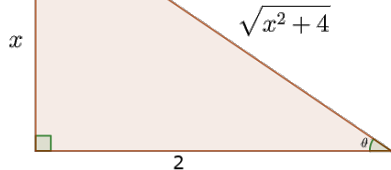


Exemplo 1

$$x = 2 \operatorname{tg}(\theta) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}(\theta) = \frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} = \operatorname{cosec}(\theta) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}} = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x}$$

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 4}} \\ &= \frac{-1}{4 \operatorname{sen}(\theta)} + C \\ &= -\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{4x} + C \end{aligned}$$



Conteúdo

Integração por Substituição Trigonométrica

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Lista Mínima

Exemplo 2

Encontre $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$

Substituição trigonométrica ~~$x = 2 \operatorname{tg}(\theta)$~~

Exemplo 2

Encontre $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$

Substituição trigonométrica $x = 2 \operatorname{tg}(\theta)$ ~~Substituição trigonométrica $x = 2 \operatorname{tg}(\theta)$~~

Exemplo 2

Encontre $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$

~~Substituição trigonométrica $x = 2 \operatorname{tg}(\theta)$~~

Exemplo 2

Encontre $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$

~~Substituição trigonométrica $x = 2 \operatorname{tg}(\theta)$~~

Substituição simples $u = x^2 + 4 \quad du = 2x dx$

Exemplo 2

Encontre $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$

~~Substituição trigonométrica $x = 2 \operatorname{tg}(\theta)$~~

Substituição simples $u = x^2 + 4$ $du = 2x dx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}}$$

Exemplo 2

Encontre $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$

~~Substituição trigonométrica $x = 2 \operatorname{tg}(\theta)$~~

Substituição simples $u = x^2 + 4 \quad du = 2x dx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C$$

Exemplo 2

Encontre $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$

~~Substituição trigonométrica $x = 2 \operatorname{tg}(\theta)$~~

Substituição simples $u = x^2 + 4 \quad du = 2x dx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2 + 4} + C$$

Conteúdo

Integração por Substituição Trigonométrica

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Lista Mínima

Exemplo 3

Calcule $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 6t + 13}}$

Exemplo 3

Calcule $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 6t + 13}}$

Completando quadrado temos

$$t^2 - 6t + 13$$

Exemplo 3

Calcule $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 6t + 13}}$

Completando quadrado temos

$$t^2 - 6t + 13 = (t - 3)^2 - 9 + 13$$

Exemplo 3

Calcule $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 6t + 13}}$

Completando quadrado temos

$$t^2 - 6t + 13 = (t - 3)^2 - 9 + 13 = (t - 3)^2 + 4$$

Exemplo 3

Calcule $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 6t + 13}}$

Completando quadrado temos

$$t^2 - 6t + 13 = (t - 3)^2 - 9 + 13 = (t - 3)^2 + 4$$

$$F = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 6t + 13}}$$

Exemplo 3

Calcule $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 6t + 13}}$

Completando quadrado temos

$$t^2 - 6t + 13 = (t - 3)^2 - 9 + 13 = (t - 3)^2 + 4$$

$$F = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 6t + 13}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(t - 3)^2 + 4}}$$

Exemplo 3 – Substituição Simples

$$u = t - 3 \qquad du = dt$$

Exemplo 3 – Substituição Simples

$$u = t - 3 \qquad du = dt$$

$$F = \int \frac{dt}{\sqrt{(t-3)^2 + 4}}$$

Exemplo 3 – Substituição Simples

$$u = t - 3 \qquad du = dt$$

$$F = \int \frac{dt}{\sqrt{(t-3)^2 + 4}}$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 4}}$$

Exemplo 3 – Substituição Simples

$$u = t - 3 \qquad du = dt$$

$$F = \int \frac{dt}{\sqrt{(t-3)^2 + 4}}$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 4}}$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 2^2}}$$

Exemplo 3 – Substituição Trigonométrica

$$u = 2 \operatorname{tg}(\theta) \quad \Rightarrow \quad du = 2 \sec^2(\theta) d\theta$$

Exemplo 3 – Substituição Trigonométrica

$$u = 2 \operatorname{tg}(\theta) \quad \Rightarrow \quad du = 2 \sec^2(\theta) d\theta$$

$$F = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 2^2}}$$

Exemplo 3 – Substituição Trigonométrica

$$u = 2 \operatorname{tg}(\theta) \quad \Rightarrow \quad du = 2 \sec^2(\theta) d\theta$$

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 2^2}} \\ &= \int \frac{2 \sec^2(\theta)}{\sqrt{4 \operatorname{tg}^2(\theta) + 4}} d\theta \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Substituição Trigonométrica

$$F = \int \frac{2 \sec^2(\theta)}{\sqrt{4 \operatorname{tg}^2(\theta) + 4}} d\theta$$

Exemplo 3 – Substituição Trigonométrica

$$F = \int \frac{2 \sec^2(\theta)}{\sqrt{4 \operatorname{tg}^2(\theta) + 4}} d\theta$$

$$= \int \frac{2 \sec^2(\theta)}{2 \sqrt{\operatorname{tg}^2(\theta) + 1}} d\theta$$

$$\operatorname{tg}^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta)$$

Exemplo 3 – Substituição Trigonométrica

$$F = \int \frac{2 \sec^2(\theta)}{\sqrt{4 \operatorname{tg}^2(\theta) + 4}} d\theta$$

$$= \int \frac{2 \sec^2(\theta)}{2 \sqrt{\operatorname{tg}^2(\theta) + 1}} d\theta$$

$$= \int \frac{\sec^2(\theta)}{\sec(\theta)} d\theta$$

$$\operatorname{tg}^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta)$$

Exemplo 3 – Substituição Trigonométrica

$$F = \int \frac{2 \sec^2(\theta)}{\sqrt{4 \operatorname{tg}^2(\theta) + 4}} d\theta$$

$$= \int \frac{2 \sec^2(\theta)}{2 \sqrt{\operatorname{tg}^2(\theta) + 1}} d\theta$$

$$= \int \frac{\sec^2(\theta)}{\sec(\theta)} d\theta$$

$$= \int \sec(\theta) d\theta$$

$$\operatorname{tg}^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta)$$

Exemplo 3 – Substituição Trigonométrica

$$F = \int \frac{2 \sec^2(\theta)}{\sqrt{4 \operatorname{tg}^2(\theta) + 4}} d\theta$$

$$= \int \frac{2 \sec^2(\theta)}{2 \sqrt{\operatorname{tg}^2(\theta) + 1}} d\theta$$

$$\operatorname{tg}^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta)$$

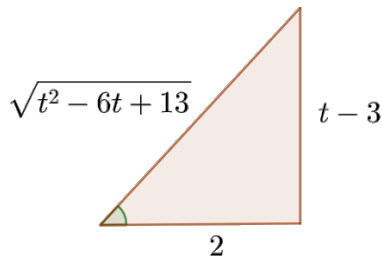
$$= \int \frac{\sec^2(\theta)}{\sec(\theta)} d\theta$$

$$= \int \sec(\theta) d\theta$$

$$= \ln|\sec(\theta) + \operatorname{tg}(\theta)| + K$$

Exemplo 3 – Desfazendo as Transformações

$$u = 2 \operatorname{tg}(\theta) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}(\theta) = \frac{u}{2} = \frac{t-3}{2}$$

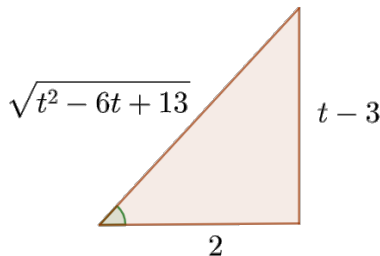


Exemplo 3 – Desfazendo as Transformações

$$u = 2 \operatorname{tg}(\theta) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}(\theta) = \frac{u}{2} = \frac{t-3}{2}$$

Hipotenusa

$$\sqrt{(t-3)^2 + 2^2} = \sqrt{t^2 - 6t + 9 + 4}$$

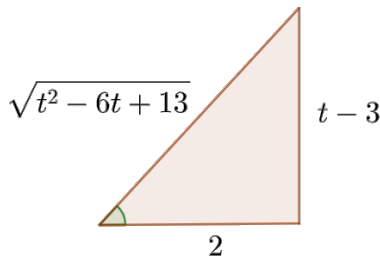


Exemplo 3 – Desfazendo as Transformações

$$u = 2 \operatorname{tg}(\theta) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}(\theta) = \frac{u}{2} = \frac{t-3}{2}$$

Hipotenusa

$$\begin{aligned}\sqrt{(t-3)^2 + 2^2} &= \sqrt{t^2 - 6t + 9 + 4} \\ &= \sqrt{t^2 - 6t + 13}\end{aligned}$$



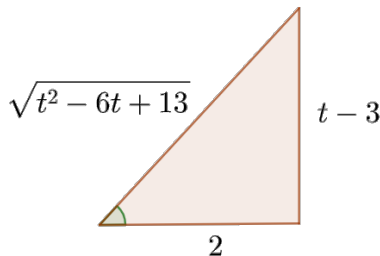
Exemplo 3 – Desfazendo as Transformações

$$u = 2 \operatorname{tg}(\theta) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}(\theta) = \frac{u}{2} = \frac{t-3}{2}$$

Hipotenusa

$$\begin{aligned}\sqrt{(t-3)^2 + 2^2} &= \sqrt{t^2 - 6t + 9 + 4} \\ &= \sqrt{t^2 - 6t + 13}\end{aligned}$$

$$\sec(\theta) = \frac{\sqrt{t^2 - 6t + 13}}{2}$$



Exemplo 3 – Desfazendo as Transformações

$$F = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 6t + 13}}$$

Exemplo 3 – Desfazendo as Transformações

$$F = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 6t + 13}}$$

$$= \ln|\sec(\theta) + \operatorname{tg}(\theta)| + K$$

Exemplo 3 – Desfazendo as Transformações

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 6t + 13}} \\ &= \ln|\sec(\theta) + \operatorname{tg}(\theta)| + K \\ &= \ln\left|\frac{\sqrt{t^2 - 6t + 13}}{2} + \frac{t - 3}{2}\right| + K \end{aligned}$$

Exemplo 3 – Desfazendo as Transformações

$$F = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 6t + 13}}$$

$$= \ln|\sec(\theta) + \operatorname{tg}(\theta)| + K$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{t^2 - 6t + 13}}{2} + \frac{t - 3}{2}\right| + K$$

$$= \ln\left|\sqrt{t^2 - 6t + 13} + t - 3\right| - \ln(2) + K$$

Exemplo 3 – Desfazendo as Transformações

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 6t + 13}} \\ &= \ln|\sec(\theta) + \operatorname{tg}(\theta)| + K \\ &= \ln\left|\frac{\sqrt{t^2 - 6t + 13}}{2} + \frac{t - 3}{2}\right| + K \\ &= \ln\left|\sqrt{t^2 - 6t + 13} + t - 3\right| - \ln(2) + K \\ &= \ln\left|\sqrt{t^2 - 6t + 13} + t - 3\right| + K_1 \end{aligned}$$

Conteúdo

Integração por Substituição Trigonométrica

Exemplo 1

Exemplo 2

Exemplo 3

Lista Mínima

Lista Mínima

Estudar a Seção 4.4 da Apostila

Exercícios:

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações