

Integração por Frações Parciais

Caso 1 – Fatores reais distintos

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries



<https://material-didatico.github.io/pages/is>

Conteúdo

Objetivo e Preliminares

Integração por Frações Parciais

Exemplo 1

Exemplo 2

Lista Mínima

Objetivo

Integrar funções da forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde P e Q são polinômios

Polinômios

Se o polinômio P , de grau n ,

$$P(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots + rx + s$$

Polinômios

Se o polinômio P , de grau n ,

$$P(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots + rx + s$$

Possui n raízes reais distintas x_i

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

Polinômios

Se o polinômio P , de grau n ,

$$P(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots + rx + s$$

Possui n raízes reais distintas x_i

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

Se a raiz x_k se repete p vezes

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_k)^p$$

Polinômios

Se o polinômio P , de grau n ,

$$P(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots + rx + s$$

Possui n raízes reais distintas x_i

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

Se a raiz x_k se repete p vezes

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_k)^p$$

Se P possui uma raiz complexa

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x^2 + bx + c)$$

Integral Relevante

$$\int \frac{1}{x+a} dx$$

Integral Relevante

$$\int \frac{1}{x+a} dx = \int \frac{1}{u} du$$

$$u = x + a \quad du = dx$$

Integral Relevante

$$\int \frac{1}{x+a} dx = \int \frac{1}{u} du$$

$$u = x + a \quad du = dx$$

$$= \ln|u| + C$$

Integral Relevante

$$\int \frac{1}{x+a} dx = \int \frac{1}{u} du$$

$$u = x + a \quad du = dx$$

$$= \ln|u| + C$$

$$= \ln|x+a| + C$$

Exemplo

Integrar $\int \frac{x^3 + x}{x - 1} dx$

Exemplo

$$\text{Integrar } \int \frac{x^3 + x}{x - 1} dx$$

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$P(x) = x^3 + x$$

$$Q(x) = x - 1$$

Exemplo

$$\text{Integrar } \int \frac{x^3 + x}{x - 1} dx$$

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$P(x) = x^3 + x$$

$$Q(x) = x - 1$$

Como o grau de P é maior do que o de Q , calculamos a divisão

$$f(x) = x^2 + x + 2 + \frac{2}{x - 1}$$

Exemplo

$$\int \frac{x^3 + x}{x - 1} dx$$

Exemplo

$$\int \frac{x^3 + x}{x - 1} dx = \int x^2 + x + 2 + \frac{2}{x - 1} dx$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 + x}{x - 1} dx &= \int x^2 + x + 2 + \frac{2}{x - 1} dx \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2 \ln|x - 1| + C\end{aligned}$$

Conteúdo

Objetivo e Preliminares

Integração por Frações Parciais

Exemplo 1

Exemplo 2

Lista Mínima

Integração por Frações Parciais

Integrar $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ onde P e Q são polinômios

Integração por Frações Parciais

Integrar $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ onde P e Q são polinômios

1. Se o grau de P for maior ou igual que o grau de Q , dividir P por Q

Integração por Frações Parciais

Integrar $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ onde P e Q são polinômios

1. Se o grau de P for maior ou igual que o grau de Q , dividir P por Q
2. Fatorar $Q(x)$

Integração por Frações Parciais

Integrar $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ onde P e Q são polinômios

1. Se o grau de P for maior ou igual que o grau de Q , dividir P por Q
2. Fatorar $Q(x)$
3. Expandir f em frações parciais

Caso 1

$Q(x)$ é o produto de n fatores lineares distintos

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_nx + b_n)$$

Caso 1

$Q(x)$ é o produto de n fatores lineares distintos

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_nx + b_n)$$

Expansão

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_m}{a_nx + b_n}$$

Exemplo

$$\frac{x - 3}{x(x - 1)(x + 1)}$$

Exemplo

$$\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \\ &= \frac{A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}\end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \\ &= \frac{A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}\end{aligned}$$

$$x-3 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \\ &= \frac{A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x-3 &= A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1) \\ &= x^3(A+B+C) + x(B-C) - A\end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ B - C = 1 \\ A = 3 \end{cases}$$

Exemplo

$$A = 3$$

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ B - C = 1 \\ A = 3 \end{cases}$$

Exemplo

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ B - C = 1 \\ A = 3 \end{cases}$$

$$A = 3$$

$$B = 1 + C$$

Exemplo

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ B - C = 1 \\ A = 3 \end{cases}$$

$$A = 3$$

$$B = 1 + C$$

$$A + B + C = 0$$

Exemplo

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ B - C = 1 \\ A = 3 \end{cases}$$

$$A = 3$$

$$B = 1 + C$$

$$A + B + C = 0$$

$$3 + 1 + C + C = 0$$

Exemplo

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ B - C = 1 \\ A = 3 \end{cases}$$

$$A = 3$$

$$B = 1 + C$$

$$A + B + C = 0$$

$$3 + 1 + C + C = 0$$

$$C = -\frac{4}{2} = -2$$

Exemplo

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ B - C = 1 \\ A = 3 \end{cases}$$

$$A = 3$$

$$B = 1 + C$$

$$A + B + C = 0$$

$$3 + 1 + C + C = 0$$

$$C = -\frac{4}{2} = -2$$

$$B = 1 - 2 = -1$$

Exemplo

$$\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \\ &= \frac{3}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{-2}{x+1}\end{aligned}$$

Exemplo

$$\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

$$= \frac{3}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{-2}{x+1}$$

$$\int \frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} dx = \int \frac{3}{x} dx - \int \frac{1}{x-1} dx - 2 \int \frac{1}{x+1} dx$$

Exemplo

$$\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

$$= \frac{3}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{-2}{x+1}$$

$$\int \frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} dx = \int \frac{3}{x} dx - \int \frac{1}{x-1} dx - 2 \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= 3 \ln|x| - \ln|x-1| - 2 \ln|x+1| + K$$

Exemplo

$$\begin{aligned}\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \\ &= \frac{3}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{-2}{x+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} dx &= \int \frac{3}{x} dx - \int \frac{1}{x-1} dx - 2 \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= 3 \ln|x| - \ln|x-1| - 2 \ln|x+1| + K \\ &= \ln \left| \frac{x^3}{(x-1)(x+1)^2} \right| + K\end{aligned}$$

Conteúdo

Objetivo e Preliminares

Integração por Frações Parciais

Exemplo 1

Exemplo 2

Lista Mínima

Exemplo 1

Calcule $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx$

Exemplo 1

Calcule $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx$

O grau do numerador P é menor que o grau do denominador Q

Exemplo 1

Calcule $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx$

O grau do numerador P é menor que o grau do denominador Q

Fatorando Q

$$Q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x$$

Exemplo 1

Calcule $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx$

O grau do numerador P é menor que o grau do denominador Q

Fatorando Q

$$\begin{aligned} Q(x) &= 2x^3 + 3x^2 - 2x \\ &= x(2x^2 + 3x - 2) \end{aligned}$$

Exemplo 1

Calcule $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx$

O grau do numerador P é menor que o grau do denominador Q

Fatorando Q

$$\begin{aligned} Q(x) &= 2x^3 + 3x^2 - 2x \\ &= x(2x^2 + 3x - 2) \\ &= x \cdot 2 \left(x - \frac{1}{2}\right) (x + 2) \end{aligned}$$

Exemplo 1

Calcule $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx$

O grau do numerador P é menor que o grau do denominador Q

Fatorando Q

$$\begin{aligned} Q(x) &= 2x^3 + 3x^2 - 2x \\ &= x(2x^2 + 3x - 2) \\ &= x \cdot 2 \left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 2) \\ &= x(2x - 1)(x + 2) \end{aligned}$$

Exemplo 1

Calcule $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx$

O grau do numerador P é menor que o grau do denominador Q

Fatorando Q

$$\begin{aligned} Q(x) &= 2x^3 + 3x^2 - 2x \\ &= x(2x^2 + 3x - 2) \\ &= x \cdot 2 \left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 2) \\ &= x(2x - 1)(x + 2) \end{aligned}$$

Caso 1 – Fatores lineares sem repetição

Exemplo 1

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

Exemplo 1

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

Multiplicando por $2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x - 1)(x + 2)$

Exemplo 1

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

Multiplicando por $2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x - 1)(x + 2)$

$$x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1)$$

Exemplo 1

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

Multiplicando por $2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x - 1)(x + 2)$

$$\begin{aligned}x^2 + 2x - 1 &= A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1) \\&= (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A\end{aligned}$$

Exemplo 1

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

Multiplicando por $2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x - 1)(x + 2)$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 1 &= A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1) \\ &= (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2A + B + 2C = 1 \\ 3A + 2B - C = 2 \\ -2A = -1 \end{cases}$$

Exemplo 1

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

Multiplicando por $2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x - 1)(x + 2)$

$$\begin{aligned}x^2 + 2x - 1 &= A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1) \\&= (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A\end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2A + B + 2C = 1 \\ 3A + 2B - C = 2 \\ -2A = -1 \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{2} \quad B = \frac{1}{5} \quad C = -\frac{1}{10}$$

Exemplo 1

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx = \int \frac{1/2}{x} + \frac{1/5}{2x - 1} - \frac{1/10}{x + 2} dx$$

Exemplo 1

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx &= \int \frac{1/2}{x} + \frac{1/5}{2x - 1} - \frac{1/10}{x + 2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{5} \int \frac{1}{2x - 1} dx - \frac{1}{10} \int \frac{1}{x + 2} dx\end{aligned}$$

Exemplo 1

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx &= \int \frac{1/2}{x} + \frac{1/5}{2x - 1} - \frac{1/10}{x + 2} dx \\&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{5} \int \frac{1}{2x - 1} dx - \frac{1}{10} \int \frac{1}{x + 2} dx \\&= \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{10} \ln|2x - 1| - \frac{1}{10} \ln|x + 2| + C\end{aligned}$$

Conteúdo

Objetivo e Preliminares

Integração por Frações Parciais

Exemplo 1

Exemplo 2

Lista Mínima

Exemplo 2

Calcule $\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x) - 3 \cos(x)} dx$

Exemplo 2

Calcule $\int \frac{\text{sen}(x)}{\cos^2(x) - 3 \cos(x)} dx$

$$u = \cos(x)$$

Exemplo 2

Calcule $\int \frac{\text{sen}(x)}{\cos^2(x) - 3 \cos(x)} dx$

$$u = \cos(x) \quad du = -\text{sen}(x) dx$$

Exemplo 2

Calcule $\int \frac{\text{sen}(x)}{\cos^2(x) - 3 \cos(x)} dx$

$$u = \cos(x) \quad du = -\text{sen}(x) dx \quad \Rightarrow \quad \text{sen}(x) dx = -du$$

Exemplo 2

Calcule $\int \frac{\text{sen}(x)}{\cos^2(x) - 3 \cos(x)} dx$

$$u = \cos(x) \quad du = -\text{sen}(x) dx \quad \Rightarrow \quad \text{sen}(x) dx = -du$$

$$\int \frac{\text{sen}(x)}{\cos^2(x) - 3 \cos(x)} dx = - \int \frac{1}{u^2 - 3u} du$$

Exemplo 2

Calcule $\int \frac{\text{sen}(x)}{\cos^2(x) - 3 \cos(x)} dx$

$$u = \cos(x) \quad du = -\text{sen}(x) dx \quad \Rightarrow \quad \text{sen}(x) dx = -du$$

$$\int \frac{\text{sen}(x)}{\cos^2(x) - 3 \cos(x)} dx = - \int \frac{1}{u^2 - 3u} du = - \int \frac{1}{u(u - 3)} du$$

Exemplo 2

Calculando $\int \frac{1}{u(u-3)} du$

Exemplo 2

Calculando $\int \frac{1}{u(u-3)} du$

Por frações parciais – caso 1

$$\frac{1}{u(u-3)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-3}$$

Exemplo 2

Calculando $\int \frac{1}{u(u-3)} du$

Por frações parciais – caso 1

$$\frac{1}{u(u-3)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-3}$$

Multiplicando por $u(u-3)$

$$1 = A(u-3) + Bu$$

Exemplo 2

Calculando $\int \frac{1}{u(u-3)} du$

Por frações parciais – caso 1

$$\frac{1}{u(u-3)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-3}$$

Multiplicando por $u(u-3)$

$$1 = A(u-3) + Bu = (A+B)u - 3A$$

Exemplo 2

Calculando $\int \frac{1}{u(u-3)} du$

Por frações parciais – caso 1

$$\frac{1}{u(u-3)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-3}$$

Multiplicando por $u(u-3)$

$$1 = A(u-3) + Bu = (A+B)u - 3A$$

Resolvendo o sistema

$$A = -\frac{1}{3} \quad B = \frac{1}{3}$$

Exemplo 2

$$\int \frac{1}{u(u-3)} du = \int \frac{-1/3}{u} + \frac{1/3}{u-3} du$$

Exemplo 2

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{u(u-3)} du &= \int \frac{-1/3}{u} + \frac{1/3}{u-3} du \\ &= -\frac{1}{3} \int \frac{1}{u} du + \frac{1}{3} \int \frac{1}{u-3} du\end{aligned}$$

Exemplo 2

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{u(u-3)} du &= \int \frac{-1/3}{u} + \frac{1/3}{u-3} du \\ &= -\frac{1}{3} \int \frac{1}{u} du + \frac{1}{3} \int \frac{1}{u-3} du \\ &= -\frac{1}{3} \ln|u| + \frac{1}{3} \ln|u-3| + C\end{aligned}$$

Exemplo 2

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{u(u-3)} du &= \int \frac{-1/3}{u} + \frac{1/3}{u-3} du \\&= -\frac{1}{3} \int \frac{1}{u} du + \frac{1}{3} \int \frac{1}{u-3} du \\&= -\frac{1}{3} \ln|u| + \frac{1}{3} \ln|u-3| + C \\&= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{u-3}{u} \right| + C\end{aligned}$$

Exemplo 2

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x) - 3 \cos(x)} dx = - \int \frac{1}{u(u-3)} du$$

Exemplo 2

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x) - 3 \cos(x)} dx &= - \int \frac{1}{u(u-3)} du \\ &= -\frac{1}{3} \ln \left| \frac{u-3}{u} \right| + C\end{aligned}$$

Exemplo 2

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x) - 3 \cos(x)} dx &= - \int \frac{1}{u(u-3)} du \\ &= -\frac{1}{3} \ln \left| \frac{u-3}{u} \right| + C \\ &= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{u}{u-3} \right| + C\end{aligned}$$

Exemplo 2

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x) - 3 \cos(x)} dx &= - \int \frac{1}{u(u-3)} du \\ &= -\frac{1}{3} \ln \left| \frac{u-3}{u} \right| + C \\ &= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{u}{u-3} \right| + C \\ &= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\cos(x)}{\cos(x) - 3} \right| + C\end{aligned}$$

Conteúdo

Objetivo e Preliminares

Integração por Frações Parciais

Exemplo 1

Exemplo 2

Lista Mínima

Lista Mínima

Estudar a Seção 4.5 da Apostila

Exercícios:

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações