

Integração por Frações Parciais

Caso 2 – Fatores reais repetidos

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries



<https://material-didatico.github.io/pages/is>

Conteúdo

Preliminares

Integração por Frações Parciais

Exemplo 1

Lista Mínima

Integral Relevante

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx$$

Integral Relevante

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \int \frac{1}{a^2 \left(\left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1 \right)} dx$$

Integral Relevante

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx &= \int \frac{1}{a^2 \left(\left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1 \right)} dx \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1} \frac{dx}{a}\end{aligned}$$

Integral Relevante

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \int \frac{1}{a^2 \left(\left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1 \right)} dx$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1} \frac{dx}{a}$$

$$u = \frac{x}{a} \quad du = \frac{dx}{a}$$

Integral Relevante

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \int \frac{1}{a^2 \left(\left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1 \right)} dx$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1} \frac{dx}{a}$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{u^2 + 1} du$$

$$u = \frac{x}{a} \quad du = \frac{dx}{a}$$

Integral Relevante

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \int \frac{1}{a^2 \left(\left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1 \right)} dx$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1} \frac{dx}{a}$$

$$u = \frac{x}{a} \quad du = \frac{dx}{a}$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{u^2 + 1} du$$

$$= \frac{1}{a} \operatorname{arctg}(u) + C$$

Integral Relevante

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \int \frac{1}{a^2 \left(\left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1 \right)} dx$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1} \frac{dx}{a}$$

$$u = \frac{x}{a} \quad du = \frac{dx}{a}$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{u^2 + 1} du$$

$$= \frac{1}{a} \operatorname{arctg}(u) + C$$

$$= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) + C$$

Conteúdo

Preliminares

Integração por Frações Parciais

Exemplo 1

Lista Mínima

Caso 2

$Q(x)$ é o produto de m fatores lineares e alguns repetidos

Caso 2

$Q(x)$ é o produto de m fatores lineares e alguns repetidos

Suponha que o primeiro fator $(a_1x + b_1)$ seja repetido p vezes

$$Q(x) = (a_1x + b_1)^p (a_2x + b_2) \cdots (a_qx + b_q)$$

Caso 2

$Q(x)$ é o produto de m fatores lineares e alguns repetidos

Suponha que o primeiro fator $(a_1x + b_1)$ seja repetido p vezes

$$Q(x) = (a_1x + b_1)^p (a_2x + b_2) \cdots (a_qx + b_q)$$

Expansão

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(a_1x + b_1)} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \cdots + \frac{A_p}{(a_1x + b_1)^p} + \cdots + \frac{A_q}{a_qx + b_q}$$

Exemplo

$$\frac{x^3 - x - 2}{x^3(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1}$$

Exemplo

$$\frac{x^3 - x - 2}{x^3(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1}$$

$$\int \frac{x^3 - x - 2}{x^3(x-1)} dx = A \int \frac{1}{x} dx + B \int \frac{1}{x^2} dx + C \int \frac{1}{x^3} dx + D \int \frac{1}{x-1} dx$$

Conteúdo

Preliminares

Integração por Frações Parciais

Exemplo 1

Lista Mínima

Exemplo 1

Calcule $\int \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$

Exemplo 1

Calcule $\int \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$

O grau do numerador P é menor que o grau do denominador Q

Exemplo 1

Calcule $\int \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$

O grau do numerador P é menor que o grau do denominador Q

Raízes de Q : $x = 1$ com multiplicidade 2 e $x = -1$

Exemplo 1

Calcule $\int \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$

O grau do numerador P é menor que o grau do denominador Q

Raízes de Q : $x = 1$ com multiplicidade 2 e $x = -1$

Fatorando Q

$$Q(x) = x^3 - x^2 - x - 2 = (x - 1)^2(x + 1)$$

Exemplo 1

Calcule $\int \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$

O grau do numerador P é menor que o grau do denominador Q

Raízes de Q : $x = 1$ com multiplicidade 2 e $x = -1$

Fatorando Q

$$Q(x) = x^3 - x^2 - x - 2 = (x - 1)^2(x + 1)$$

Caso 2: Fatores lineares com repetição

Exemplo 1

$$\frac{4x}{x^3 - x^2 - x - 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

Exemplo 1

$$\frac{4x}{x^3 - x^2 - x - 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 1}$$

Multiplicando os dois lados por $x^3 - x^2 - x - 2 = (x - 1)^2(x + 1)$

Exemplo 1

$$\frac{4x}{x^3 - x^2 - x - 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 1}$$

Multiplicando os dois lados por $x^3 - x^2 - x - 2 = (x - 1)^2(x + 1)$

$$4x = A(x - 1)(x + 1) + B(x + 1) + C(x - 1)^2$$

Exemplo 1

$$\frac{4x}{x^3 - x^2 - x - 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 1}$$

Multiplicando os dois lados por $x^3 - x^2 - x - 2 = (x - 1)^2(x + 1)$

$$\begin{aligned} 4x &= A(x - 1)(x + 1) + B(x + 1) + C(x - 1)^2 \\ &= (A + C)x^2 + (B - 2C)x + (-A + B + C) \end{aligned}$$

Exemplo 1

$$\frac{4x}{x^3 - x^2 - x - 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

Multiplicando os dois lados por $x^3 - x^2 - x - 2 = (x-1)^2(x+1)$

$$\begin{aligned} 4x &= A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2 \\ &= (A+C)x^2 + (B-2C)x + (-A+B+C) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B - 2C = 4 \\ -A + B + C = 0 \end{cases}$$

Exemplo 1

$$\frac{4x}{x^3 - x^2 - x - 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

Multiplicando os dois lados por $x^3 - x^2 - x - 2 = (x-1)^2(x+1)$

$$\begin{aligned} 4x &= A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2 \\ &= (A+C)x^2 + (B-2C)x + (-A+B+C) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B - 2C = 4 \\ -A + B + C = 0 \end{cases}$$

$$A = 1 \quad B = 2 \quad C = -1$$

Exemplo 1

$$\int \frac{4x}{x^3 - x^2 - x - 2} dx = \int \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} dx$$

Exemplo 1

$$\begin{aligned}\int \frac{4x}{x^3 - x^2 - x - 2} dx &= \int \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} dx \\ &= \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{2}{(x-1)^2} dx - \int \frac{1}{x+1} dx\end{aligned}$$

Exemplo 1

$$\begin{aligned}\int \frac{4x}{x^3 - x^2 - x - 2} dx &= \int \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} dx \\&= \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{2}{(x-1)^2} dx - \int \frac{1}{x+1} dx \\&= \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \ln|x+1| + C\end{aligned}$$

Exemplo 1

$$\begin{aligned}\int \frac{4x}{x^3 - x^2 - x - 2} dx &= \int \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} dx \\&= \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{2}{(x-1)^2} dx - \int \frac{1}{x+1} dx \\&= \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \ln|x+1| + C \\&= \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{2}{x-1} + C\end{aligned}$$

Conteúdo

Preliminares

Integração por Frações Parciais

Exemplo 1

Lista Mínima

Lista Mínima

Estudar a Seção 4.5 da Apostila

Exercícios:

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações