

Integração por Frações Parciais

Caso 3 – Raízes complexas

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries



<https://material-didatico.github.io/pages/is>

Conteúdo

Integração por Frações Parciais

Exemplo 1

Lista Mínima

Caso 3

$Q(x)$ contém fatores quadráticos irredutíveis que não se repetem

$$Q(x) = \cdots (ax^2 + bx + c) \quad \text{com } b^2 - 4ac < 0$$

Caso 3

$Q(x)$ contém fatores quadráticos irredutíveis que não se repetem

$$Q(x) = \cdots (ax^2 + bx + c) \quad \text{com } b^2 - 4ac < 0$$

Expansão

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \cdots + \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

Exemplo

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{x^2+4}$$

Conteúdo

Integração por Frações Parciais

Exemplo 1

Lista Mínima

Exemplo 1

Encontre $\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$

Exemplo 1

Encontre $\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$

O grau do numerador P é menor que o grau do denominador Q

Exemplo 1

Encontre $\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$

O grau do numerador P é menor que o grau do denominador Q

Fatorando Q

$$Q(x) = x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$$

Exemplo 1

Encontre $\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$

O grau do numerador P é menor que o grau do denominador Q

Fatorando Q

$$Q(x) = x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$$

Caso 3: Fator quadrático irreduzível sem repetição

Exemplo 1

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Exemplo 1

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Multiplicando por $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$

Exemplo 1

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Multiplicando por $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$

$$2x^2 - x + 4 = A(x^2 + 4) + (Bx + C)x$$

Exemplo 1

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Multiplicando por $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$

$$\begin{aligned} 2x^2 - x + 4 &= A(x^2 + 4) + (Bx + C)x \\ &= (A + B)x^2 + Cx + 4A \end{aligned}$$

Exemplo 1

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Multiplicando por $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$

$$\begin{aligned} 2x^2 - x + 4 &= A(x^2 + 4) + (Bx + C)x \\ &= (A + B)x^2 + Cx + 4A \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A + B &= 2 \\ C &= -1 \\ 4A &= 4 \end{cases}$$

Exemplo 1

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Multiplicando por $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$

$$\begin{aligned} 2x^2 - x + 4 &= A(x^2 + 4) + (Bx + C)x \\ &= (A + B)x^2 + Cx + 4A \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A + B &= 2 \\ &C = -1 \\ 4A &= 4 \end{cases}$$

$$A = 1 \quad B = 1 \quad C = -1$$

Exemplo 1

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx = \int \frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4} dx$$

Exemplo 1

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx &= \int \frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4} dx \\ &= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{x}{x^2 + 4} dx - \int \frac{1}{x^2 + 4} dx\end{aligned}$$

Exemplo 1

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx &= \int \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+4} dx \\&= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{x}{x^2+4} dx - \int \frac{1}{x^2+4} dx \\&= \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x^2+4| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C\end{aligned}$$

Exemplo 1

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx &= \int \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+4} dx \\&= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{x}{x^2+4} dx - \int \frac{1}{x^2+4} dx \\&= \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x^2+4| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C\end{aligned}$$

Onde usamos

$$u = x^2 + 4 \quad \text{para calcular} \quad \int \frac{x}{x^2+4} dx$$

Exemplo 1

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx &= \int \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+4} dx \\&= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{x}{x^2+4} dx - \int \frac{1}{x^2+4} dx \\&= \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x^2+4| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C\end{aligned}$$

Onde usamos

$$u = x^2 + 4 \quad \text{para calcular} \quad \int \frac{x}{x^2+4} dx$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + K$$

Conteúdo

Integração por Frações Parciais

Exemplo 1

Lista Mínima

Lista Mínima

Estudar a Seção 4.5 da Apostila

Exercícios:

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações