

Sequências Numéricas

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries



<https://material-didatico.github.io/pages/is>

Conteúdo

Definição

Convergência

Lista Mínima

Definição de Sequências

Uma sequência é uma **lista de números** em uma ordem determinada

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$$

Definição de Sequências

Uma sequência é uma **lista de números** em uma ordem determinada

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$$

a_k são os **termos**

Definição de Sequências

Uma sequência é uma **lista de números** em uma ordem determinada

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$$

a_k são os **termos** e **k** são os **índices** da sequência

Definição de Sequências

Uma sequência é uma **lista de números** em uma ordem determinada

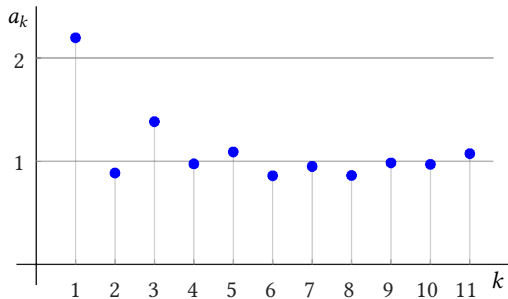
$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$$

a_k são os **termos** e **k** são os **índices** da sequência

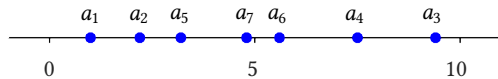
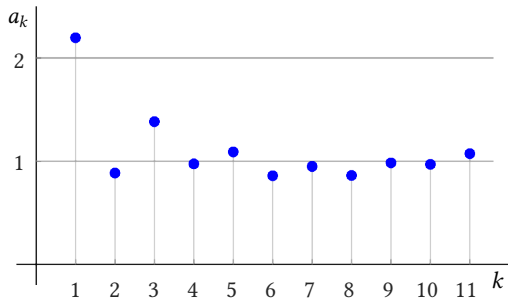
Uma sequência também é uma função

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad \mathbf{a_k = f(k)}$$

Definição de Sequências



Definição de Sequências



Exemplo 1

Dada a fórmula para o n -ésimo termo, a_n , de uma sequência (a_n) , encontre os valores de a_1 , a_2 , a_3 e a_4 .

$$a_n = \frac{1 - n}{n^2}$$

Exemplo 2

a_1

Exemplo 2

$$a_1 = \left. \frac{1 - n}{n^2} \right|_{n=1}$$

Exemplo 2

$$a_1 = \left. \frac{1 - n}{n^2} \right|_{n=1} = \frac{1 - 1}{1^2}$$

Exemplo 2

$$a_1 = \left. \frac{1-n}{n^2} \right|_{n=1} = \frac{1-1}{1^2} = 0$$

Exemplo 2

$$a_1 = \left. \frac{1 - n}{n^2} \right|_{n=1} = \frac{1 - 1}{1^2} = 0$$

$$a_2$$

Exemplo 2

$$a_1 = \left. \frac{1-n}{n^2} \right|_{n=1} = \frac{1-1}{1^2} = 0$$

$$a_2 = \left. \frac{1-n}{n^2} \right|_{n=2}$$

Exemplo 2

$$a_1 = \left. \frac{1-n}{n^2} \right|_{n=1} = \frac{1-1}{1^2} = 0$$

$$a_2 = \left. \frac{1-n}{n^2} \right|_{n=2} = \frac{1-2}{2^2}$$

Exemplo 2

$$a_1 = \left. \frac{1-n}{n^2} \right|_{n=1} = \frac{1-1}{1^2} = 0$$

$$a_2 = \left. \frac{1-n}{n^2} \right|_{n=2} = \frac{1-2}{2^2} = -\frac{1}{4}$$

Exemplo 2

$$a_1 = \left. \frac{1-n}{n^2} \right|_{n=1} = \frac{1-1}{1^2} = 0$$

$$a_2 = \left. \frac{1-n}{n^2} \right|_{n=2} = \frac{1-2}{2^2} = -\frac{1}{4}$$

$$a_3$$

Exemplo 2

$$a_1 = \left. \frac{1-n}{n^2} \right|_{n=1} = \frac{1-1}{1^2} = 0$$

$$a_2 = \left. \frac{1-n}{n^2} \right|_{n=2} = \frac{1-2}{2^2} = -\frac{1}{4}$$

$$a_3 = \left. \frac{1-n}{n^2} \right|_{n=3}$$

Exemplo 2

$$a_1 = \left. \frac{1-n}{n^2} \right|_{n=1} = \frac{1-1}{1^2} = 0$$

$$a_2 = \left. \frac{1-n}{n^2} \right|_{n=2} = \frac{1-2}{2^2} = -\frac{1}{4}$$

$$a_3 = \left. \frac{1-n}{n^2} \right|_{n=3} = \frac{1-3}{3^2}$$

Exemplo 2

$$a_1 = \left. \frac{1-n}{n^2} \right|_{n=1} = \frac{1-1}{1^2} = 0$$

$$a_2 = \left. \frac{1-n}{n^2} \right|_{n=2} = \frac{1-2}{2^2} = -\frac{1}{4}$$

$$a_3 = \left. \frac{1-n}{n^2} \right|_{n=3} = \frac{1-3}{3^2} = -\frac{2}{9}$$

Exemplo 2

$$a_1 = \left. \frac{1-n}{n^2} \right|_{n=1} = \frac{1-1}{1^2} = 0$$

$$a_2 = \left. \frac{1-n}{n^2} \right|_{n=2} = \frac{1-2}{2^2} = -\frac{1}{4}$$

$$a_3 = \left. \frac{1-n}{n^2} \right|_{n=3} = \frac{1-3}{3^2} = -\frac{2}{9}$$

$$a_4$$

Exemplo 2

$$a_1 = \frac{1-n}{n^2} \Big|_{n=1} = \frac{1-1}{1^2} = 0$$

$$a_2 = \frac{1-n}{n^2} \Big|_{n=2} = \frac{1-2}{2^2} = -\frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{1-n}{n^2} \Big|_{n=3} = \frac{1-3}{3^2} = -\frac{2}{9}$$

$$a_4 = \frac{1-n}{n^2} \Big|_{n=4}$$

Exemplo 2

$$a_1 = \left. \frac{1-n}{n^2} \right|_{n=1} = \frac{1-1}{1^2} = 0$$

$$a_2 = \left. \frac{1-n}{n^2} \right|_{n=2} = \frac{1-2}{2^2} = -\frac{1}{4}$$

$$a_3 = \left. \frac{1-n}{n^2} \right|_{n=3} = \frac{1-3}{3^2} = -\frac{2}{9}$$

$$a_4 = \left. \frac{1-n}{n^2} \right|_{n=4} = \frac{1-4}{4^2}$$

Exemplo 2

$$a_1 = \left. \frac{1-n}{n^2} \right|_{n=1} = \frac{1-1}{1^2} = 0$$

$$a_2 = \left. \frac{1-n}{n^2} \right|_{n=2} = \frac{1-2}{2^2} = -\frac{1}{4}$$

$$a_3 = \left. \frac{1-n}{n^2} \right|_{n=3} = \frac{1-3}{3^2} = -\frac{2}{9}$$

$$a_4 = \left. \frac{1-n}{n^2} \right|_{n=4} = \frac{1-4}{4^2} = -\frac{3}{16}$$

Exemplo 2

Encontre uma fórmula explícita para o n -ésimo termo da sequência

$(0, 3, 8, 15, 24, \dots)$

Exemplo 2

Sequência dos quadrados dos inteiros positivos menos um

$$a_n = n^2 - 1$$

Exemplo 2

Verificando

$$a_1 = (n^2 - 1) \Big|_{n=1} = 1^2 - 1 = 1^2 - 1 = 0$$

Exemplo 2

Verificando

$$a_1 = (n^2 - 1) \Big|_{n=1} = 1^2 - 1 = 1^2 - 1 = 0$$

$$a_2 = (n^2 - 1) \Big|_{n=2} = 2^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$$

Exemplo 2

Verificando

$$a_1 = (n^2 - 1) \Big|_{n=1} = 1^2 - 1 = 1^2 - 1 = 0$$

$$a_2 = (n^2 - 1) \Big|_{n=2} = 2^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$$

$$a_3 = (n^2 - 1) \Big|_{n=3} = 3^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$$

Exemplo 2

Verificando

$$a_1 = (n^2 - 1) \Big|_{n=1} = 1^2 - 1 = 1^2 - 1 = 0$$

$$a_2 = (n^2 - 1) \Big|_{n=2} = 2^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$$

$$a_3 = (n^2 - 1) \Big|_{n=3} = 3^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$$

$$a_4 = (n^2 - 1) \Big|_{n=4} = 4^2 - 1 = 4^2 - 1 = 15$$

Exemplo 2

Verificando

$$a_1 = (n^2 - 1) \Big|_{n=1} = 1^2 - 1 = 1^2 - 1 = 0$$

$$a_2 = (n^2 - 1) \Big|_{n=2} = 2^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$$

$$a_3 = (n^2 - 1) \Big|_{n=3} = 3^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$$

$$a_4 = (n^2 - 1) \Big|_{n=4} = 4^2 - 1 = 4^2 - 1 = 15$$

$$a_5 = (n^2 - 1) \Big|_{n=5} = 5^2 - 1 = 5^2 - 1 = 24$$

Exemplo 2

Expressão alternativa

$$a_n = -\frac{1}{3}n^4 + \frac{10}{3}n^3 - \frac{32}{3}n^2 + \frac{50}{3}n - 9$$

Conteúdo

Definição

Convergência

Lista Mínima

Convergência de Sequências

(a_k) converge para L se, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$k > N \quad \Rightarrow \quad |a_k - L| < \epsilon$$

Convergência de Sequências

(a_k) converge para L se, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$k > N \quad \Rightarrow \quad |a_k - L| < \epsilon$$

Notação

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = L \quad \text{ou} \quad a_k \rightarrow L \quad \text{ou} \quad \lim a_k = L$$

Convergência de Sequências

(a_k) converge para L se, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

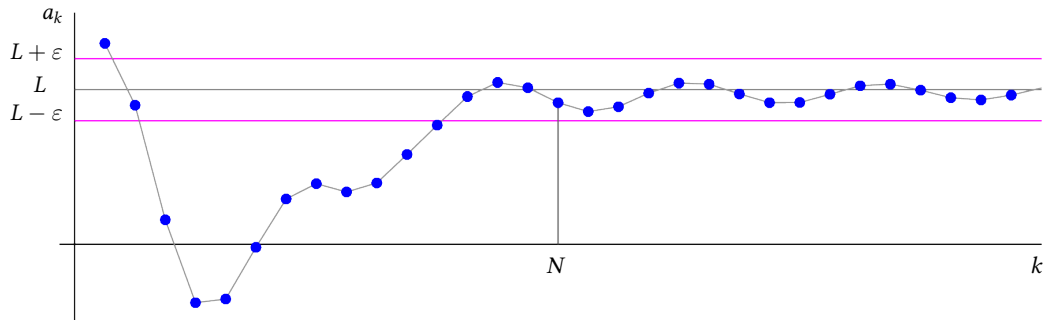
$$k > N \quad \Rightarrow \quad |a_k - L| < \epsilon$$

Notação

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = L \quad \text{ou} \quad a_k \rightarrow L \quad \text{ou} \quad \lim a_k = L$$

Uma sequência convergente (a_k) tem apenas um limite.

Definição de Limite



Explorando a Definição

Percebemos que a sequência $a_k = \frac{1}{k}$ converge para $L = 0$

Explorando a Definição

Percebemos que a sequência $a_k = \frac{1}{k}$ converge para $L = 0$

Para $\varepsilon = 1$ basta $N = 1$

Explorando a Definição

Percebemos que a sequência $a_k = \frac{1}{k}$ converge para $L = 0$

Para $\varepsilon = 1$ basta $N = 1$

Para $\varepsilon = 0,001$ precisamos $N = 1000$

Explorando a Definição

Percebemos que a sequência $a_k = \frac{1}{k}$ converge para $L = 0$

Para $\varepsilon = 1$ basta $N = 1$

Para $\varepsilon = 0,001$ precisamos $N = 1000$

Quantos passos precisamos para garantir uma precisão de ε qualquer?

Explorando a Definição

Precisamos encontrar um N que garanta $|a_k - L| < \varepsilon$ para todo $k > N$

Explorando a Definição

Precisamos encontrar um N que garanta $|a_k - L| < \varepsilon$ para todo $k > N$

$$|a_k - L| = \left| \frac{1}{k} - 0 \right| = \frac{1}{k}$$

Explorando a Definição

Precisamos encontrar um N que garanta $|a_k - L| < \varepsilon$ para todo $k > N$

$$|a_k - L| = \left| \frac{1}{k} - 0 \right| = \frac{1}{k}$$

então

$$|a_k - L| < \varepsilon$$

Explorando a Definição

Precisamos encontrar um N que garanta $|a_k - L| < \varepsilon$ para todo $k > N$

$$|a_k - L| = \left| \frac{1}{k} - 0 \right| = \frac{1}{k}$$

então

$$|a_k - L| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{k} < \varepsilon$$

Explorando a Definição

Precisamos encontrar um N que garanta $|a_k - L| < \varepsilon$ para todo $k > N$

$$|a_k - L| = \left| \frac{1}{k} - 0 \right| = \frac{1}{k}$$

então

$$|a_k - L| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{k} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon} < k$$

Explorando a Definição

Precisamos encontrar um N que garanta $|a_k - L| < \varepsilon$ para todo $k > N$

$$|a_k - L| = \left| \frac{1}{k} - 0 \right| = \frac{1}{k}$$

então

$$|a_k - L| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{k} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon} < k$$

escolhemos

$$N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \quad \text{menor inteiro maior ou igual a } \frac{1}{\varepsilon}$$

Divergência ao infinito

(a_k) **diverge ao infinito** se dado $M \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$k > N \quad \Rightarrow \quad a_k > M$$

Divergência ao infinito

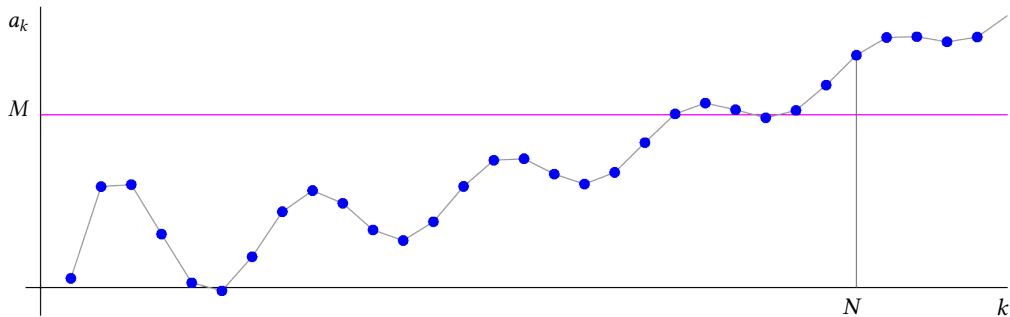
(a_k) **diverge ao infinito** se dado $M \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$k > N \quad \Rightarrow \quad a_k > M$$

Notação

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty \quad \text{ou} \quad a_k \rightarrow \infty \quad \text{ou} \quad \lim a_k = \infty$$

Divergência ao infinito



Casos Particulares Importantes

► Se $|r| < 1$, então $\lim r^k = 0$

Casos Particulares Importantes

► Se $|r| < 1$, então $\lim r^k = 0$

► Se $r = 1$, então $\lim r^k = 1$

Casos Particulares Importantes

- ▶ Se $|r| < 1$, então $\lim r^k = 0$
- ▶ Se $r = 1$, então $\lim r^k = 1$
- ▶ Se $r > 1$, então $\lim r^k = \infty$

Casos Particulares Importantes

- ▶ Se $|r| < 1$, então $\lim r^k = 0$
- ▶ Se $r = 1$, então $\lim r^k = 1$
- ▶ Se $r > 1$, então $\lim r^k = \infty$
- ▶ Se $r \leq -1$, então $\lim r^k$ diverge

Propriedades de Sequências Convergentes

Sejam (a_k) e (b_k) sequências convergentes, então temos as regras

Propriedades de Sequências Convergentes

Sejam (a_k) e (b_k) sequências convergentes, então temos as regras

1. $\lim(a_k + b_k) = \lim a_k + \lim b_k$ Soma

Propriedades de Sequências Convergentes

Sejam (a_k) e (b_k) sequências convergentes, então temos as regras

1. $\lim(a_k + b_k) = \lim a_k + \lim b_k$ Soma

2. $\lim(a_k - b_k) = \lim a_k - \lim b_k$ Diferença

Propriedades de Sequências Convergentes

Sejam (a_k) e (b_k) sequências convergentes, então temos as regras

1. $\lim(a_k + b_k) = \lim a_k + \lim b_k$

Soma

2. $\lim(a_k - b_k) = \lim a_k - \lim b_k$

Diferença

3. $\lim(ca_k) = c \lim a_k, \quad \forall c \in \mathbb{R}$

Multiplicação por escalar

Propriedades de Sequências Convergentes

Sejam (a_k) e (b_k) sequências convergentes, então temos as regras

1. $\lim(a_k + b_k) = \lim a_k + \lim b_k$

Soma

2. $\lim(a_k - b_k) = \lim a_k - \lim b_k$

Diferença

3. $\lim(ca_k) = c \lim a_k, \quad \forall c \in \mathbb{R}$

Multiplicação por escalar

4. $\lim(a_k b_k) = (\lim a_k)(\lim b_k)$

Produto

Propriedades de Sequências Convergentes

Sejam (a_k) e (b_k) sequências **convergentes**, então temos as regras

1. $\lim(a_k + b_k) = \lim a_k + \lim b_k$

Soma

2. $\lim(a_k - b_k) = \lim a_k - \lim b_k$

Diferença

3. $\lim(ca_k) = c \lim a_k, \quad \forall c \in \mathbb{R}$

Multiplicação por escalar

4. $\lim(a_k b_k) = (\lim a_k)(\lim b_k)$

Produto

5. $\lim \frac{a_k}{b_k} = \frac{\lim a_k}{\lim b_k}$ desde que $\lim b_k \neq 0$

Quociente

Propriedades de Sequências Convergentes

Note que o contrário não vale

Propriedades de Sequências Convergentes

Note que o contrário não vale

Considere as sequências divergentes

$$a_k = k \qquad b_k = -k$$

Propriedades de Sequências Convergentes

Note que o contrário não vale

Considere as sequências divergentes

$$a_k = k \qquad b_k = -k$$

a soma é convergente

$$c_k = a_k + b_k = k + (-k) = 0$$

Exemplo

Sendo $0 < r < 1$, calcule o limite da sequência $a_k = \frac{-\frac{1}{r^k} + 7}{1 + \frac{5}{r^k}}$

Exemplo

Sendo $0 < r < 1$, calcule o limite da sequência $a_k = \frac{-\frac{1}{r^k} + 7}{1 + \frac{5}{r^k}}$

$$\lim a_k = \lim \left(\frac{-\frac{1}{r^k} + 7}{1 + \frac{5}{r^k}} \right)$$

Exemplo

Sendo $0 < r < 1$, calcule o limite da sequência $a_k = \frac{-\frac{1}{r^k} + 7}{1 + \frac{5}{r^k}}$

$$\lim a_k = \lim \left(\frac{-\frac{1}{r^k} + 7}{1 + \frac{5}{r^k}} \right) = \lim \left(\frac{\frac{-1 + 7r^k}{r^k}}{\frac{r^k + 5}{r^k}} \right)$$

Exemplo

Sendo $0 < r < 1$, calcule o limite da sequência $a_k = \frac{-\frac{1}{r^k} + 7}{1 + \frac{5}{r^k}}$

$$\lim a_k = \lim \left(\frac{-\frac{1}{r^k} + 7}{1 + \frac{5}{r^k}} \right) = \lim \left(\frac{\frac{-1 + 7r^k}{r^k}}{\frac{r^k + 5}{r^k}} \right) = \lim \left(\frac{-1 + 7r^k}{r^k + 5} \right)$$

Exemplo

Sendo $0 < r < 1$, calcule o limite da sequência $a_k = \frac{-\frac{1}{r^k} + 7}{1 + \frac{5}{r^k}}$

$$\begin{aligned}\lim a_k &= \lim \left(\frac{-\frac{1}{r^k} + 7}{1 + \frac{5}{r^k}} \right) = \lim \left(\frac{\frac{-1 + 7r^k}{r^k}}{\frac{r^k + 5}{r^k}} \right) = \lim \left(\frac{-1 + 7r^k}{r^k + 5} \right) \\ &= \frac{-1 + 7 \lim(r^k)}{\lim(r^k) + 5}\end{aligned}$$

Exemplo

Sendo $0 < r < 1$, calcule o limite da sequência $a_k = \frac{-\frac{1}{r^k} + 7}{1 + \frac{5}{r^k}}$

$$\lim a_k = \lim \left(\frac{-\frac{1}{r^k} + 7}{1 + \frac{5}{r^k}} \right) = \lim \left(\frac{\frac{-1 + 7r^k}{r^k}}{\frac{r^k + 5}{r^k}} \right) = \lim \left(\frac{-1 + 7r^k}{r^k + 5} \right)$$

$$= \frac{-1 + 7 \lim(r^k)}{\lim(r^k) + 5}$$

$$\lim r^k = 0$$

Exemplo

Sendo $0 < r < 1$, calcule o limite da sequência $a_k = \frac{-\frac{1}{r^k} + 7}{1 + \frac{5}{r^k}}$

$$\lim a_k = \lim \left(\frac{-\frac{1}{r^k} + 7}{1 + \frac{5}{r^k}} \right) = \lim \left(\frac{\frac{-1 + 7r^k}{r^k}}{\frac{r^k + 5}{r^k}} \right) = \lim \left(\frac{-1 + 7r^k}{r^k + 5} \right)$$

$$= \frac{-1 + 7 \lim(r^k)}{\lim(r^k) + 5}$$

$$\lim r^k = 0$$

$$= -\frac{1}{5}$$

Conteúdo

Definição

Convergência

Lista Mínima

Lista Mínima

Estudar as Seções 5.1 e 5.2 da Apostila

Exercícios Seção 5.2: 3a-d, 4, 7, 11, 12, 13

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações