

Sequências Numéricas – Teoremas

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries



<https://material-didatico.github.io/pages/is>

Conteúdo

Teorema do Confronto

Teorema da Função Contínua

Sequência Definida por Função

Sequência Limitadas

Lista Mínima

Teorema do Confronto

Sejam (a_k) , (b_k) e (c_k) tais que

$$a_k \leq b_k \leq c_k \quad \forall k > N$$

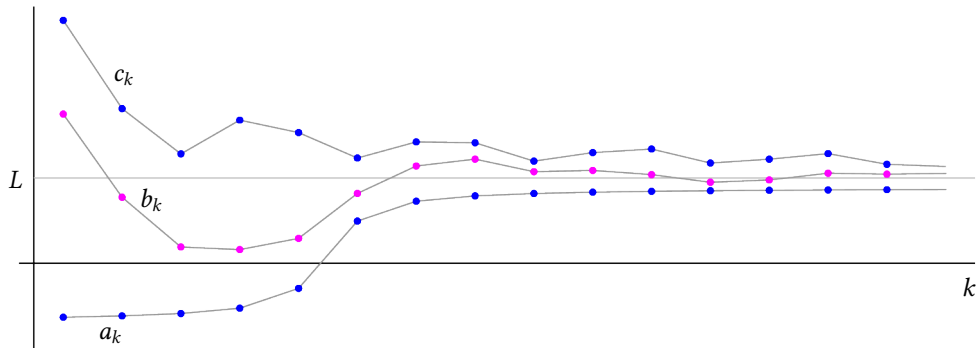
Teorema do Confronto

Sejam (a_k) , (b_k) e (c_k) tais que

$$a_k \leq b_k \leq c_k \quad \forall k > N$$

Se $a_k \rightarrow L$ e $c_k \rightarrow L$ então $b_k \rightarrow L$

Teorema do Confronto



Teorema da Função Contínua

É verdade que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} a_k\right)$?

Teorema da Função Contínua

É verdade que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} a_k\right)$?

Se a_k é uma sequência numérica real convergente, $a_k \rightarrow L$, e $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função real contínua em D , com $L \in D$ então

$$\lim f(a_k) = f(L)$$

Conteúdo

Teorema do Confronto

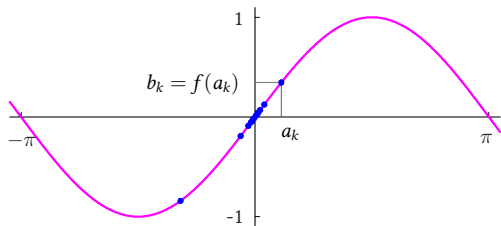
Teorema da Função Contínua

Sequência Definida por Função

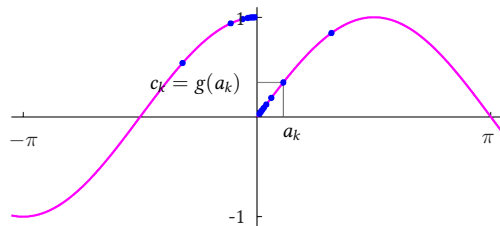
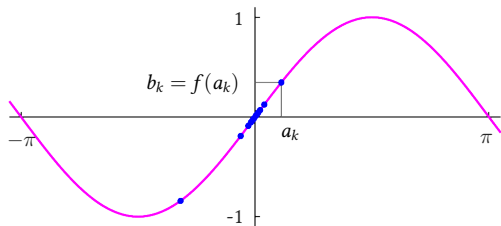
Sequência Limitadas

Lista Mínima

Teorema da Função Contínua



Teorema da Função Contínua



Exemplo

Calcular $\lim [\cos (\alpha^k)]$ com $0 < \alpha < 1$

Exemplo

Calcular $\lim [\cos (\alpha^k)]$ com $0 < \alpha < 1$

Considerando a sequência $a_k = \alpha^k$

Exemplo

Calcular $\lim [\cos (\alpha^k)]$ com $0 < \alpha < 1$

Considerando a sequência $a_k = \alpha^k$

Sabemos que $\lim a_k = 0$

Exemplo

Calcular $\lim [\cos (\alpha^k)]$ com $0 < \alpha < 1$

Considerando a sequência $a_k = \alpha^k$

Sabemos que $\lim a_k = 0$

A função cosseno é contínua em zero

Exemplo

Calcular $\lim [\cos(\alpha^k)]$ com $0 < \alpha < 1$

Considerando a sequência $a_k = \alpha^k$

Sabemos que $\lim a_k = 0$

A função cosseno é contínua em zero

Portanto

$$\lim \cos(\alpha^k) = \lim \cos(a_k)$$

Exemplo

Calcular $\lim [\cos (\alpha^k)]$ com $0 < \alpha < 1$

Considerando a sequência $a_k = \alpha^k$

Sabemos que $\lim a_k = 0$

A função cosseno é contínua em zero

Portanto

$$\lim \cos(\alpha^k) = \lim \cos(a_k) = \cos(\lim a_k)$$

Exemplo

Calcular $\lim [\cos(\alpha^k)]$ com $0 < \alpha < 1$

Considerando a sequência $a_k = \alpha^k$

Sabemos que $\lim a_k = 0$

A função cosseno é contínua em zero

Portanto

$$\lim \cos(\alpha^k) = \lim \cos(a_k) = \cos(\lim a_k) = \cos(0)$$

Exemplo

Calcular $\lim [\cos(\alpha^k)]$ com $0 < \alpha < 1$

Considerando a sequência $a_k = \alpha^k$

Sabemos que $\lim a_k = 0$

A função cosseno é contínua em zero

Portanto

$$\lim \cos(\alpha^k) = \lim \cos(a_k) = \cos(\lim a_k) = \cos(0) = 1$$

Conteúdo

Teorema do Confronto

Teorema da Função Contínua

Sequência Definida por Função

Sequência Limitadas

Lista Mínima

Limite de sequência definida por função

Se f é uma função real e $a_k = f(k)$ então

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = L$$

Limite de sequência definida por função

Se f é uma função real e $a_k = f(k)$ então

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = L$$

Esse resultado nos permite usar a regra de l'Hôpital (em x)

Exemplo

Mostre que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5k^4}{k^4 + 8k^3} = 5$

Exemplo

Mostre que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5k^4}{k^4 + 8k^3} = 5$

A função

$$f(x) = \frac{5x^4}{x^4 + 8x^3}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

está definida para todo $x > 0$

Exemplo

Mostre que $\lim \frac{5k^4}{k^4 + 8k^3} = 5$

A função

$$f(x) = \frac{5x^4}{x^4 + 8x^3} \quad x \in \mathbb{R}$$

está definida para todo $x > 0$ e a sequência

$$a_k = f(k) = \frac{5k^4}{k^4 + 8k^3} \quad k \in \mathbb{N}$$

Exemplo

Podemos aplicar a regra de L'Hôpital **em x** ,

Exemplo

Podemos aplicar a regra de L'Hôpital **em x** , pois temos uma indeterminação ∞/∞

Exemplo

Podemos aplicar a regra de L'Hôpital **em x** , pois temos uma indeterminação ∞/∞

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5k^4}{k^4 + 8k^3}$$

Exemplo

Podemos aplicar a regra de L'Hôpital **em x** , pois temos uma indeterminação ∞/∞

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5k^4}{k^4 + 8k^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4}{x^4 + 8x^3}$$

Exemplo

Podemos aplicar a regra de L'Hôpital **em x** , pois temos uma indeterminação ∞/∞

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5k^4}{k^4 + 8k^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4}{x^4 + 8x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20x^3}{4x^3 + 24x^2}$$

Exemplo

Podemos aplicar a regra de L'Hôpital **em x** , pois temos uma indeterminação ∞/∞

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5k^4}{k^4 + 8k^3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4}{x^4 + 8x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20x^3}{4x^3 + 24x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{60x^2}{12x^2 + 48x}\end{aligned}$$

Exemplo

Podemos aplicar a regra de L'Hôpital em x , pois temos uma indeterminação ∞/∞

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5k^4}{k^4 + 8k^3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4}{x^4 + 8x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20x^3}{4x^3 + 24x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{60x^2}{12x^2 + 48x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{120x}{24x + 48}\end{aligned}$$

Exemplo

Podemos aplicar a regra de L'Hôpital **em x** , pois temos uma indeterminação ∞/∞

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5k^4}{k^4 + 8k^3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4}{x^4 + 8x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20x^3}{4x^3 + 24x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{60x^2}{12x^2 + 48x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{120x}{24x + 48} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{120}{24}\end{aligned}$$

Exemplo

Podemos aplicar a regra de L'Hôpital **em x** , pois temos uma indeterminação ∞/∞

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5k^4}{k^4 + 8k^3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4}{x^4 + 8x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20x^3}{4x^3 + 24x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{60x^2}{12x^2 + 48x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{120x}{24x + 48} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{120}{24} \\ &= 5\end{aligned}$$

Exemplo

Método mais apropriado

Exemplo

Método mais apropriado

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5k^4}{k^4 + 8k^3}$$

Exemplo

Método mais apropriado

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5k^4}{k^4 + 8k^3} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{5k^4}{k^4}}{\frac{k^4 + 8k^3}{k^4}}$$

Exemplo

Método mais apropriado

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5k^4}{k^4 + 8k^3} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{5k^4}{k^4}}{\frac{k^4 + 8k^3}{k^4}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5}{1 + \frac{8}{k}}\end{aligned}$$

Exemplo

Método mais apropriado

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5k^4}{k^4 + 8k^3} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{5k^4}{k^4}}{\frac{k^4 + 8k^3}{k^4}}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5}{1 + \frac{8}{k}}$$

$$= \frac{5}{1 + 8 \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k}}$$

Exemplo

Método mais apropriado

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5k^4}{k^4 + 8k^3} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{5k^4}{k^4}}{\frac{k^4 + 8k^3}{k^4}}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5}{1 + \frac{8}{k}}$$

$$= \frac{5}{1 + 8 \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k}}$$

$$= 5$$

Conteúdo

Teorema do Confronto

Teorema da Função Contínua

Sequência Definida por Função

Sequência Limitadas

Lista Mínima

Sequências Limitadas

Uma sequência (a_k) é

Sequências Limitadas

Uma sequência (a_k) é

Limitada inferiormente se existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq a_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$

Sequências Limitadas

Uma sequência (a_k) é

Limitada inferiormente se existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq a_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$

Limitada superiormente se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $M \geq a_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$

Sequências Limitadas

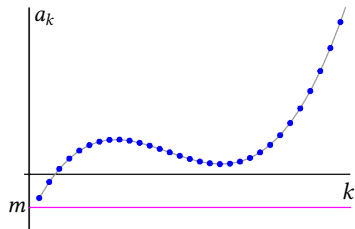
Uma sequência (a_k) é

Limitada inferiormente se existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq a_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$

Limitada superiormente se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $M \geq a_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$

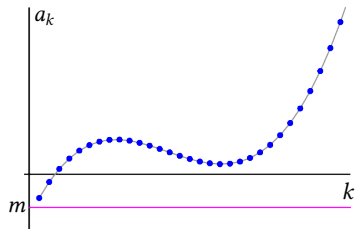
Limitada se é limitada superiormente e inferiormente

Sequências Limitadas

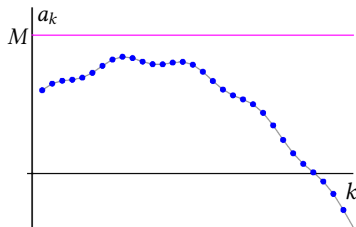


Limitada inferiormente

Sequências Limitadas

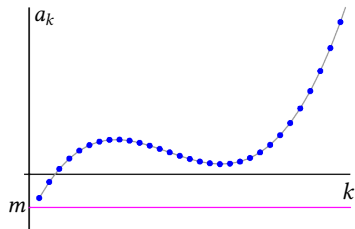


Limitada inferiormente

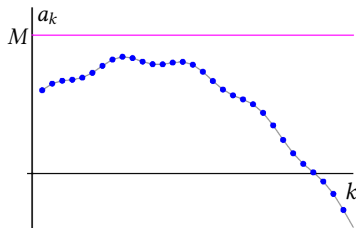


Limitada superiormente

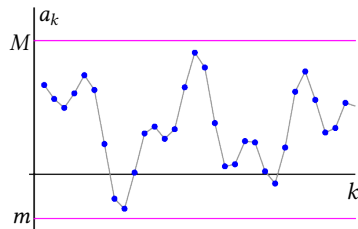
Sequências Limitadas



Limitada inferiormente



Limitada superiormente



Limitada

Sequências Crescentes e Decrescentes

Uma sequência (a_k) é

Crescente se $a_k \leq a_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$

Sequências Crescentes e Decrescentes

Uma sequência (a_k) é

Crescente se $a_k \leq a_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$

Decrescente se $a_k \geq a_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$

Sequências Crescentes e Decrescentes

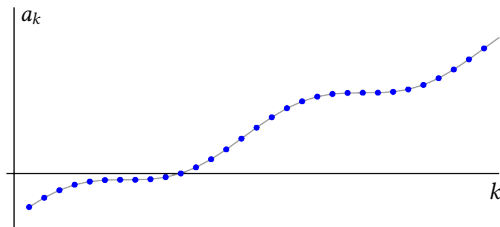
Uma sequência (a_k) é

Crescente se $a_k \leq a_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$

Decrescente se $a_k \geq a_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$

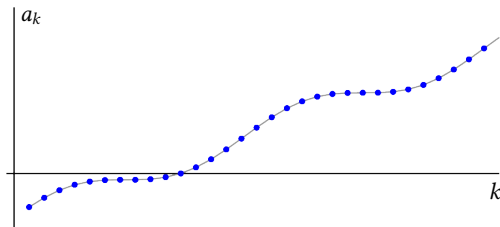
Monótona se é crescente ou decrescente

Sequências Crescentes e Decrescentes

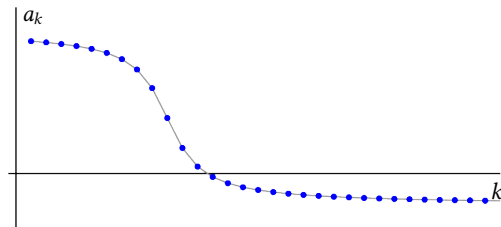


Crescente

Sequências Crescentes e Decrescentes



Crescente



Decrescente

Convergência de sequência monótona

Se uma sequência (a_k) é limitada e monotônica, então ela é convergente

Convergência de sequência monótona

Se uma sequência (a_k) é limitada e monotônica, então ela é convergente

Importante porque permite decidir a convergência sem calcular o limite

Conteúdo

Teorema do Confronto

Teorema da Função Contínua

Sequência Definida por Função

Sequência Limitadas

Lista Mínima

Lista Mínima

Estudar as Seções 5.3 , 5.4 e 5.5 da Apostila

Exercícios:

Seção 5.3: 2a-c

Seção 5.4: 1, 2, 3

Seção 5.5: 1, 2

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações