Séries Numéricas – Definição

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

9 de junho de 2026

https://material-didatico.github.io/pages/is

Conteúdo

Séries

Uma Série Infinita é a soma dos termos de uma Sequência Infinita (a_n)

Séries

Uma Série Infinita é a soma dos termos de uma Sequência Infinita (a_n)

Se existir, essa soma pode ser escrita como

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \; = \; a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \; = \; S$$

Séries

Uma Série Infinita é a soma dos termos de uma Sequência Infinita (a_n)

Se existir, essa soma pode ser escrita como

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \;=\; a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \;=\; S$$

Cada valor a_n é chamado de Termo da Série

Séries

Uma Série Infinita é a soma dos termos de uma Sequência Infinita (a_n)

Se existir, essa soma pode ser escrita como

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \; = \; a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \; = \; S$$

Cada valor a_n é chamado de Termo da Série

Como saber se a soma existe?

Sequência de Somas Parciais

Soma dos primeiros n termos de uma sequência (a_k)

$$S_{\boldsymbol{n}} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{\boldsymbol{n}} = \sum_{k=1}^{\boldsymbol{n}} a_k$$

Sequência de Somas Parciais

Soma dos primeiros n termos de uma sequência (a_k)

$$S_{\boldsymbol{n}} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{\boldsymbol{n}} = \sum_{k=1}^{\boldsymbol{n}} a_k$$

Temos agora uma nova sequência: Somas Parciais (S_n)

Sequência de Somas Parciais

Soma dos primeiros n termos de uma sequência (a_k)

$$S_{\boldsymbol{n}} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{\boldsymbol{n}} = \sum_{k=1}^{\boldsymbol{n}} a_k$$

Temos agora uma nova sequência: Somas Parciais (S_n)

Podemos usar as técnicas definidas para sequências

Convergência de uma Série

A soma da série é S

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

quando a sequência de somas parciais (S_n) converge para S

Convergência de uma Série

A soma da série é S

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

quando a sequência de somas parciais (S_n) converge para S

$$\lim_{n\to\infty} S_n \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \;=\; S$$

Convergência de uma Série

A soma da série é S

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

quando a sequência de somas parciais (S_n) converge para S

$$\lim_{n\to\infty} S_n \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \;=\; S$$

Se sequência de somas parciais diverge a série diverge

Exemplo

Somar os termos da sequência

$$a_k = \frac{1}{2^k}$$

Exemplo

Somar os termos da sequência

$$a_k = \frac{1}{2^k}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

Exemplo

Somar os termos da sequência

$$a_k = \frac{1}{2^k}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad a_2 = \frac{1}{4}$$

Exemplo

Somar os termos da sequência

$$a_k = \frac{1}{2^k}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad a_2 = \frac{1}{4} \qquad a_3 = \frac{1}{8}$$

Exemplo

Somar os termos da sequência

$$a_k = \frac{1}{2^k}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad a_2 = \frac{1}{4} \qquad a_3 = \frac{1}{8} \qquad a_4 = \frac{1}{16}$$

Exemplo

Somar os termos da sequência

$$a_k = \frac{1}{2^k}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad a_2 = \frac{1}{4} \qquad a_3 = \frac{1}{8} \qquad a_4 = \frac{1}{16} \qquad a_5 = \frac{1}{32}$$

Exemplo

Somar os termos da sequência

$$a_k = \frac{1}{2^k}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad a_2 = \frac{1}{4} \qquad a_3 = \frac{1}{8} \qquad a_4 = \frac{1}{16} \qquad a_5 = \frac{1}{32} \qquad \cdots$$

Somas Parciais

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

Somas Parciais

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad\qquad S_1 = \frac{1}{2}$$

Somas Parciais

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad S_1 = \frac{1}{2} \qquad = 1 - \frac{1}{2}$$

Somas Parciais

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad S_1 = \frac{1}{2} \qquad = 1 - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{4}$$

Somas Parciais

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad S_1 = \frac{1}{2} \qquad = 1 - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{4} \qquad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

Somas Parciais

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad S_1 = \frac{1}{2} \qquad = 1 - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{4} \qquad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \qquad = 1 - \frac{1}{4}$$

Somas Parciais

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad S_1 = \frac{1}{2} \qquad = 1 - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{4} \qquad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \qquad = 1 - \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{8}$$

Somas Parciais

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad S_1 = \frac{1}{2} \qquad = 1 - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{4} \qquad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \qquad = 1 - \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{8} \qquad S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

Somas Parciais

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad S_1 = \frac{1}{2} \qquad = 1 - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{4} \qquad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \qquad = 1 - \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{8} \qquad S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \qquad = 1 - \frac{1}{8}$$

Somas Parciais

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad S_1 = \frac{1}{2} \qquad = 1 - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{4} \qquad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \qquad = 1 - \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{8} \qquad S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \qquad = 1 - \frac{1}{8}$$

$$a_4 = \frac{1}{16}$$

Somas Parciais

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad S_1 = \frac{1}{2} \qquad = 1 - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{4} \qquad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \qquad = 1 - \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{8} \qquad S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \qquad = 1 - \frac{1}{8}$$

$$a_4 = \frac{1}{16} \qquad S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

Somas Parciais

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2} & S_1 &= \frac{1}{2} & &= 1 - \frac{1}{2} \\
a_2 &= \frac{1}{4} & S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} & &= 1 - \frac{1}{4} \\
a_3 &= \frac{1}{8} & S_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} & &= 1 - \frac{1}{8} \\
a_4 &= \frac{1}{16} & S_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} & &= 1 - \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

Somas Parciais

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad S_1 = \frac{1}{2} \qquad = 1 - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{4} \qquad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \qquad = 1 - \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{8} \qquad S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \qquad = 1 - \frac{1}{8}$$

$$a_4 = \frac{1}{16} \qquad S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{16}$$

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

Somas Parciais

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2} & S_1 &= \frac{1}{2} & &= 1 - \frac{1}{2} \\
a_2 &= \frac{1}{4} & S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} & &= 1 - \frac{1}{4} \\
a_3 &= \frac{1}{8} & S_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} & &= 1 - \frac{1}{8} \\
a_4 &= \frac{1}{16} & S_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} & &= 1 - \frac{1}{16}
\end{aligned}
$$

$$
a_n = \frac{1}{2^n} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}
$$

Somas Parciais

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad S_1 = \frac{1}{2} \qquad = 1 - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{4} \qquad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \qquad = 1 - \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{8} \qquad S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \qquad = 1 - \frac{1}{8}$$

$$a_4 = \frac{1}{16} \qquad S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{16}$$

$$a_n = \frac{1}{2^n} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \qquad = 1 - \frac{1}{2^n} \quad \text{(Conjectura)}$$

Demonstração dor Indução Finita

Demonstração dor Indução Finita

Demonstração dor Indução Finita

Demonstração dor Indução Finita

Para mostrar que uma afirmação é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$

devemos provar que

Demonstração dor Indução Finita

Para mostrar que uma afirmação é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$

devemos provar que

1. ela é verdadeira para $n = 1$

Demonstração dor Indução Finita

Demonstração dor Indução Finita

Para mostrar que uma afirmação é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$

devemos provar que

1. ela é verdadeira para $n = 1$
2. se ela for verdadeira para n então também será para $n + 1$

Demonstração da Fórmula das Somas Parciais

Assumimos por indução finita

que

$$S_{n-1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

para um n qualquer

Demonstração da Fórmula das Somas Parciais

Assumimos por indução finita

que

$$S_{n-1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

para um n qualquer

Queremos mostrar que

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Demonstração da Fórmula das Somas Parciais

Assumimos por indução finita que

$$S_{n-1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

para um n qualquer

Queremos mostrar que

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}$$

Demonstração da Fórmula das Somas Parciais

Assumimos por indução finita que

$$S_{n-1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

para um n qualquer

Queremos mostrar que

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Demonstração da Fórmula das Somas Parciais

Assumimos por indução finita que

$$S_{n-1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

para um n qualquer

Queremos mostrar que

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{2^n} \\ &= S_{n-1} + \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Demonstração da Fórmula das Somas Parciais

Assumimos por indução finita que

$$S_{n-1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

para um n qualquer

Queremos mostrar que

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{2^n} \\ &= S_{n-1} + \frac{1}{2^n} \\ &= 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Demonstração da Fórmula das Somas Parciais

Assumimos por indução finita que

$$S_{n-1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

para um n qualquer

Queremos mostrar que

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{2^n} \\
&= S_{n-1} + \frac{1}{2^n} \\
&= 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \\
&= 1 - \frac{2}{2^n} + \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

Demonstração da Fórmula das Somas Parciais

Assumimos por indução finita que

$$S_{n-1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

para um n qualquer

Queremos mostrar que

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{2^n} \\
&= S_{n-1} + \frac{1}{2^n} \\
&= 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \\
&= 1 - \frac{2}{2^n} + \frac{1}{2^n} \\
&= 1 - \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

Calculando o Limite das Somas Parciais

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

Calculando o Limite das Somas Parciais

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

Calculando o Limite das Somas Parciais

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \lim 1 - \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Calculando o Limite das Somas Parciais

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} S_n &= \lim \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \\
&= \lim 1 - \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= 1 - 0
\end{aligned}$$

Calculando o Limite das Somas Parciais

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \\
&= \lim 1 - \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= 1 - 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Calculando o Limite das Somas Parciais

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \\
&= \lim 1 - \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= 1 - 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Portanto a série converge e podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar as Seção 6.1 da Apostila

Exercícios: 1, 2, 4a-c, 6a-b

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações