

Séries Numéricas – Definição

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries



<https://material-didatico.github.io/pages/is>

Conteúdo

Definição

Lista Mínima

Séries

Uma **Série Infinita** é a soma dos termos de uma **Sequência Infinita** (a_n)

Séries

Uma **Série Infinita** é a soma dos termos de uma **Sequência Infinita** (a_n)

Se existir, essa **soma** pode ser escrita como

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = S$$

Séries

Uma **Série Infinita** é a soma dos termos de uma **Sequência Infinita** (a_n)

Se existir, essa **soma** pode ser escrita como

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = S$$

Cada valor a_n é chamado de **Termo da Série**

Séries

Uma **Série Infinita** é a soma dos termos de uma **Sequência Infinita** (a_n)

Se existir, essa **soma** pode ser escrita como

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = S$$

Cada valor a_n é chamado de **Termo da Série**

Como saber se a soma existe?

Sequência de Somas Parciais

Soma dos primeiros n termos de uma sequência (a_k)

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Sequência de Somas Parciais

Soma dos primeiros n termos de uma sequência (a_k)

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Temos agora uma nova sequência: Somas Parciais (S_n)

Sequência de Somas Parciais

Soma dos primeiros n termos de uma sequência (a_k)

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Temos agora uma nova sequência: Somas Parciais (S_n)

Podemos usar as técnicas definidas para sequências

Convergência de uma Série

A soma da série é S

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

quando a sequência de somas parciais (S_n) converge para S

Convergência de uma Série

A soma da série é S

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

quando a sequência de somas parciais (S_n) converge para S

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = S$$

Convergência de uma Série

A soma da série é S

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

quando a sequência de somas parciais (S_n) converge para S

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = S$$

Se sequência de somas parciais diverge a série **diverge**

Exemplo

Somar os termos da sequência

$$a_k = \frac{1}{2^k}$$

Exemplo

Somar os termos da sequência

$$a_k = \frac{1}{2^k}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

Exemplo

Somar os termos da sequência

$$a_k = \frac{1}{2^k}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{1}{4}$$

Exemplo

Somar os termos da sequência

$$a_k = \frac{1}{2^k}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{1}{4} \quad a_3 = \frac{1}{8}$$

Exemplo

Somar os termos da sequência

$$a_k = \frac{1}{2^k}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{1}{4} \quad a_3 = \frac{1}{8} \quad a_4 = \frac{1}{16}$$

Exemplo

Somar os termos da sequência

$$a_k = \frac{1}{2^k}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{1}{4} \quad a_3 = \frac{1}{8} \quad a_4 = \frac{1}{16} \quad a_5 = \frac{1}{32}$$

Exemplo

Somar os termos da sequência

$$a_k = \frac{1}{2^k}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{1}{4} \quad a_3 = \frac{1}{8} \quad a_4 = \frac{1}{16} \quad a_5 = \frac{1}{32} \quad \dots$$

Somas Parciais

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

Somas Parciais

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$s_1 = \frac{1}{2}$$

Somas Parciais

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad S_1 = \frac{1}{2} \qquad = 1 - \frac{1}{2}$$

Somas Parciais

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad S_1 = \frac{1}{2} \qquad = 1 - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{4}$$

Somas Parciais

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad S_1 = \frac{1}{2} \qquad = 1 - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{4} \qquad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

Somas Parciais

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad S_1 = \frac{1}{2} \qquad = 1 - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{4} \qquad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \qquad = 1 - \frac{1}{4}$$

Somas Parciais

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad S_1 = \frac{1}{2} \qquad = 1 - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{4} \qquad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \qquad = 1 - \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{8}$$

Somas Parciais

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad S_1 = \frac{1}{2} \qquad = 1 - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{4} \qquad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \qquad = 1 - \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{8} \qquad S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

Somas Parciais

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad S_1 = \frac{1}{2} \qquad = 1 - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{4} \qquad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \qquad = 1 - \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{8} \qquad S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \qquad = 1 - \frac{1}{8}$$

Somas Parciais

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad S_1 = \frac{1}{2} \qquad = 1 - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{4} \qquad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \qquad = 1 - \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{8} \qquad S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \qquad = 1 - \frac{1}{8}$$

$$a_4 = \frac{1}{16}$$

Somas Parciais

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad S_1 = \frac{1}{2} \qquad = 1 - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{4} \qquad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \qquad = 1 - \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{8} \qquad S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \qquad = 1 - \frac{1}{8}$$

$$a_4 = \frac{1}{16} \qquad S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

Somas Parciais

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad S_1 = \frac{1}{2} \qquad = 1 - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{4} \qquad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \qquad = 1 - \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{8} \qquad S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \qquad = 1 - \frac{1}{8}$$

$$a_4 = \frac{1}{16} \qquad S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \qquad = 1 - \frac{1}{16}$$

Somas Parciais

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad S_1 = \frac{1}{2} \qquad = 1 - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{4} \qquad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \qquad = 1 - \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{8} \qquad S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \qquad = 1 - \frac{1}{8}$$

$$a_4 = \frac{1}{16} \qquad S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \qquad = 1 - \frac{1}{16}$$

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

Somas Parciais

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad S_1 = \frac{1}{2} \qquad = 1 - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{4} \qquad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \qquad = 1 - \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{8} \qquad S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \qquad = 1 - \frac{1}{8}$$

$$a_4 = \frac{1}{16} \qquad S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \qquad = 1 - \frac{1}{16}$$

$$a_n = \frac{1}{2^n} \qquad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$$

Somas Parciais

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad S_1 = \frac{1}{2} \qquad = 1 - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{4} \qquad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \qquad = 1 - \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{8} \qquad S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \qquad = 1 - \frac{1}{8}$$

$$a_4 = \frac{1}{16} \qquad S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \qquad = 1 - \frac{1}{16}$$

$$a_n = \frac{1}{2^n} \qquad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \qquad = 1 - \frac{1}{2^n} \quad (\text{Conjectura})$$

Demonstração por Indução Finita

Demonstração por Indução Finita

Demonstração por Indução Finita

Demonstração por Indução Finita

Para mostrar que uma afirmação é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$
devemos provar que

Demonstração por Indução Finita

Demonstração por Indução Finita

Para mostrar que uma afirmação é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$
devemos provar que

1. ela é verdadeira para $n = 1$

Demonstração por Indução Finita

Demonstração por Indução Finita

Para mostrar que uma afirmação é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$
devemos provar que

1. ela é verdadeira para $n = 1$
2. se ela for verdadeira para n então também será para $n + 1$

Demonstração da Fórmula das Somas Parciais

Assumimos por **indução finita** que

$$S_{n-1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

para um **n dado qualquer**

Demonstração da Fórmula das Somas Parciais

Assumimos por **indução finita** que

$$S_{n-1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

para um **n dado qualquer**

Queremos mostrar que

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Demonstração da Fórmula das Somas Parciais

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}$$

Assumimos por **indução finita** que

$$S_{n-1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

para um **n dado qualquer**

Queremos mostrar que

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Demonstração da Fórmula das Somas Parciais

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}$$

Assumimos por **indução finita** que

$$S_{n-1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

para um **n dado qualquer**

Queremos mostrar que

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) + \frac{1}{2^n}$$

Demonstração da Fórmula das Somas Parciais

Assumimos por **indução finita** que

$$S_{n-1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

para um **n dado qualquer**

Queremos mostrar que

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) + \frac{1}{2^n} \\ &= S_{n-1} + \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Demonstração da Fórmula das Somas Parciais

Assumimos por **indução finita** que

$$S_{n-1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

para um **n dado qualquer**

Queremos mostrar que

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) + \frac{1}{2^n} \\ &= S_{n-1} + \frac{1}{2^n} \\ &= 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Demonstração da Fórmula das Somas Parciais

Assumimos por **indução finita** que

$$S_{n-1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

para um **n dado qualquer**

Queremos mostrar que

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) + \frac{1}{2^n} \\ &= S_{n-1} + \frac{1}{2^n} \\ &= 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \\ &= 1 - \frac{2}{2^n} + \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Demonstração da Fórmula das Somas Parciais

Assumimos por **indução finita** que

$$S_{n-1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

para um **n dado qualquer**

Queremos mostrar que

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) + \frac{1}{2^n} \\ &= S_{n-1} + \frac{1}{2^n} \\ &= 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \\ &= 1 - \frac{2}{2^n} + \frac{1}{2^n} \\ &= 1 - \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Calculando o Limite das Somas Parciais

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Calculando o Limite das Somas Parciais

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$$

Calculando o Limite das Somas Parciais

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \\ &= \lim 1 - \lim \left(\frac{1}{2} \right)^n\end{aligned}$$

Calculando o Limite das Somas Parciais

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \\ &= \lim 1 - \lim \left(\frac{1}{2} \right)^n \\ &= 1 - 0\end{aligned}$$

Calculando o Limite das Somas Parciais

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \\ &= \lim 1 - \lim \left(\frac{1}{2} \right)^n \\ &= 1 - 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

Calculando o Limite das Somas Parciais

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \\ &= \lim 1 - \lim \left(\frac{1}{2} \right)^n \\ &= 1 - 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

Portanto a série converge e podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

Conteúdo

Definição

Lista Mínima

Lista Mínima

Estudar as Seção 6.1 da Apostila

Exercícios: 1, 2, 4a-c, 6a-b

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações