Séries Geométricas

Luis Alberto D’Afonseca

Integração e Séries

9 de junho de 2026

https://material-didatico.github.io/pages/is

Conteúdo

Séries Geométricas

Uma Série Geométrica é uma série com a forma

$$\alpha + \alpha r + \alpha r^2 + \alpha r^3 + \cdots + \alpha r^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha r^{n-1}$$

Séries Geométricas

Uma Série Geométrica é uma série com a forma

$$\alpha + \alpha r + \alpha r^2 + \alpha r^3 + \cdots + \alpha r^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha r^{n-1}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ número fixo não nulo, $\alpha \neq 0$

Séries Geométricas

Uma Série Geométrica é uma série com a forma

$$\alpha + \alpha r + \alpha r^2 + \alpha r^3 + \cdots + \alpha r^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha r^{n-1}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$	número fixo não nulo, $\alpha \neq 0$
$r \in \mathbb{R}$	razão da série

Séries Geométricas

Uma Série Geométrica é uma série com a forma

$$\alpha + \alpha r + \alpha r^2 + \alpha r^3 + \cdots + \alpha r^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha r^{n-1}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$	número fixo não nulo, $\alpha \neq 0$
$r \in \mathbb{R}$	razão da série
$a_n = \alpha r^{n-1}$	termo geral

Séries Geométricas

Uma Série Geométrica é uma série com a forma

$$\alpha + \alpha r + \alpha r^2 + \alpha r^3 + \cdots + \alpha r^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha r^{n-1}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$	número fixo não nulo, $\alpha \neq 0$
$r \in \mathbb{R}$	razão da série
$a_n = \alpha r^{n-1}$	termo geral

Especial pois sabemos quando converge e qual sua soma

Convergência da Série Geométrica – Parte 1

Se $r = 1$

Convergência da Série Geométrica – Parte 1

Se $r = 1$ temos

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha\, 1^{k-1}$$

Convergência da Série Geométrica – Parte 1

Se $r = 1$ temos

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha \, 1^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha$$

Convergência da Série Geométrica – Parte 1

Se $r = 1$ temos

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha\, 1^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha = \underbrace{\alpha + \cdots + \alpha}_{n \text{ vezes}}$$

Convergência da Série Geométrica – Parte 1

Se $r = 1$ temos

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha \, 1^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha = \underbrace{\alpha + \cdots + \alpha}_{n \text{ vezes}} = n\alpha$$

Convergência da Série Geométrica – Parte 1

Se $r = 1$ temos

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha\, 1^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha = \underbrace{\alpha + \cdots + \alpha}_{n \text{ vezes}} = n\alpha$$

Portanto S_n diverge quando $n \to \infty$

Convergência da Série Geométrica – Parte 2

Se $r \neq 1$ temos

$$S_n = \alpha + \alpha r + \alpha r^2 + \cdots + \alpha r^{n-1}$$

Convergência da Série Geométrica – Parte 2

Se $r \neq 1$ temos

$$S_n = \alpha + \alpha r + \alpha r^2 + \cdots + \alpha r^{n-1}$$

$$rS_n = \qquad \alpha r + \alpha r^2 + \cdots + \alpha r^{n-1} + \alpha r^n$$

Convergência da Série Geométrica – Parte 2

Se $r \neq 1$ temos

$$\begin{aligned} S_n &= \alpha + \alpha r + \alpha r^2 + \cdots + \alpha r^{n-1} \\ rS_n &= \qquad \alpha r + \alpha r^2 + \cdots + \alpha r^{n-1} + \alpha r^n \\ S_n - rS_n &= \alpha - \alpha r^n \end{aligned}$$

Convergência da Série Geométrica – Parte 2

Se $r \neq 1$ temos

$$
\begin{aligned}
S_n &= \alpha + \alpha r + \alpha r^2 + \cdots + \alpha r^{n-1} \\
r S_n &= \phantom{\alpha + {}} \alpha r + \alpha r^2 + \cdots + \alpha r^{n-1} + \alpha r^n \\
S_n - r S_n &= \alpha - \alpha r^n \\
S_n(1 - r) &= \alpha - \alpha r^n
\end{aligned}
$$

Convergência da Série Geométrica – Parte 2

Se $r \neq 1$ temos

$$S_n = \alpha + \alpha r + \alpha r^2 + \cdots + \alpha r^{n-1}$$

$$rS_n = \qquad \alpha r + \alpha r^2 + \cdots + \alpha r^{n-1} + \alpha r^n$$

$$S_n - rS_n = \alpha - \alpha r^n$$

$$S_n(1 - r) = \alpha - \alpha r^n$$

$$S_n = \frac{\alpha(1 - r^n)}{1 - r} \qquad\qquad (r \neq 1)$$

Calculando o Limite

Com $r \neq 1$, temos $S_n = \dfrac{\alpha(1 - r^n)}{1 - r}$,

Calculando o Limite

Com $r \neq 1$, temos $S_n = \dfrac{\alpha(1 - r^n)}{1 - r}$, portanto

$$\lim S_n$$

Calculando o Limite

Com $r \neq 1$, temos $S_n = \dfrac{\alpha(1-r^n)}{1-r}$, portanto

$$\lim S_n = \lim \frac{\alpha(1-r^n)}{1-r}$$

Calculando o Limite

Com $r \neq 1$, temos $S_n = \dfrac{\alpha(1 - r^n)}{1 - r}$, portanto

$$\lim S_n = \lim \frac{\alpha(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{\alpha}{1 - r} - \frac{\alpha}{1 - r} \lim r^n$$

Calculando o Limite

Com $r \neq 1$, temos $S_n = \dfrac{\alpha(1 - r^n)}{1 - r}$, portanto

$$\lim S_n = \lim \frac{\alpha(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{\alpha}{1 - r} - \frac{\alpha}{1 - r} \lim r^n$$

$r = -1$

$|r| > 1$

$|r| < 1$

Calculando o Limite

Com $r \neq 1$, temos $S_n = \dfrac{\alpha(1-r^n)}{1-r}$, portanto

$$\lim S_n = \lim \frac{\alpha(1-r^n)}{1-r} = \frac{\alpha}{1-r} - \frac{\alpha}{1-r} \lim r^n$$

$r = -1$ $\quad$ $r^n = (-1)^n$ diverge quando $n \to \infty$ portanto S_n diverge

$|r| > 1$

$|r| < 1$

Calculando o Limite

Com $r \neq 1$, temos $S_n = \dfrac{\alpha(1-r^n)}{1-r}$, portanto

$$\lim S_n = \lim \frac{\alpha(1-r^n)}{1-r} = \frac{\alpha}{1-r} - \frac{\alpha}{1-r} \lim r^n$$

$r = -1$ $r^n = (-1)^n$ diverge quando $n \to \infty$ portanto S_n diverge

$|r| > 1$ $|r^n| \to \infty$ quando $n \to \infty$ portanto S_n diverge

$|r| < 1$

Calculando o Limite

Com $r \neq 1$, temos $S_n = \dfrac{\alpha(1-r^n)}{1-r}$, portanto

$$\lim S_n = \lim \frac{\alpha(1-r^n)}{1-r} = \frac{\alpha}{1-r} - \frac{\alpha}{1-r} \lim r^n$$

$r = -1$ $\quad$ $r^n = (-1)^n$ diverge quando $n \to \infty$ portanto S_n diverge

$|r| > 1$ $\quad$ $|r^n| \to \infty$ quando $n \to \infty$ portanto S_n diverge

$|r| < 1$ $\quad$ $r^n \to 0$ quando $n \to \infty$ portanto $S_n \to \dfrac{\alpha}{1-r}$

Séries Geométricas

Uma série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha r^{n-1}$$

é convergente se $|r| < 1$ com soma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha r^{n-1} = \frac{\alpha}{1-r}$$

e divergente se $|r| \geq 1$

Conteúdo

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar as Seção 6.1 da Apostila

Exercícios: 8a-c, 10, 11a-b

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações