Séries Telescópicas

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

Conteúdo

Séries Telescópicas

Raramente conseguimos fórmulas exatas para a soma de séries

Séries Telescópicas

Raramente conseguimos fórmulas exatas para a soma de séries

Séries Telescópicas são um caso especial onde quase todos os termos se anulam

Conteúdo

Exemplo 1

Calcular a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

Exemplo 1 – Somas Parciais

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

Exemplo 1 – Somas Parciais

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+1} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+1} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

Exemplo 1 – Somas Parciais

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+1} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+1} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}
$$

Exemplo 1 – Somas Parciais

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+1} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+1} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{1} - \color{blue}{\frac{1}{2}} + \color{blue}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Exemplo 1 – Somas Parciais

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Exemplo 1 – Somas Parciais

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+1} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+1} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Exemplo 1 – Somas Parciais

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+1} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+1} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}
$$

Exemplo 1 – Somas Parciais

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+1} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+1} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Exemplo 1 – Somas Parciais

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+1} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+1} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}
$$

Exemplo 1 – Calculando o Limite

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \to \infty} S_n$$

Exemplo 1 – Calculando o Limite

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n\to\infty} S_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

Exemplo 1 – Calculando o Limite

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1$$

Exemplo 2

Calcular a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Exemplo 2 – Pode Não Ser Óbvio

Usando frações parciais

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Exemplo 2 – Pode Não Ser Óbvio

Usando frações parciais

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar as Seção 6.1 da Apostila

Exercícios: 8a-c, 10, 11a-b

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações