

# Séries Numéricas – Teste da Razão

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries



<https://material-didatico.github.io/pages/is>

# Conteúdo

Teste da Razão

Exemplos do Teste da Razão

Lista Mínima

# Motivação – Análise da Série Geométrica

Considere a série geométrica com  $a$  e  $r$  positivos

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

# Motivação – Análise da Série Geométrica

Considere a série geométrica com  $a$  e  $r$  positivos

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

Podemos comparar o crescimento de seus termos calculando a razão

$$\rho = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

# Motivação – Análise da Série Geométrica

Considere a série geométrica com  $a$  e  $r$  positivos

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

Podemos comparar o crescimento de seus termos calculando a razão

$$\rho = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^n}{ar^{n-1}}$$

# Motivação – Análise da Série Geométrica

Considere a série geométrica com  $a$  e  $r$  positivos

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

Podemos comparar o crescimento de seus termos calculando a razão

$$\rho = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^n}{ar^{n-1}} = r$$

# Motivação – Análise da Série Geométrica

Considere a série geométrica com  $a$  e  $r$  positivos

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

Podemos comparar o crescimento de seus termos calculando a razão

$$\rho = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^n}{ar^{n-1}} = r$$

Se  $\rho < 1$  a série converge

# Motivação – Análise da Série Geométrica

Considere a série geométrica com  $a$  e  $r$  positivos

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

Podemos comparar o crescimento de seus termos calculando a razão

$$\rho = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^n}{ar^{n-1}} = r$$

Se  $\rho < 1$  a série converge

Se  $\rho \geq 1$  a série diverge

# Teste da Razão

Seja  $\sum a_n$  tal que  $a_n > 0$  para  $n \geq N$

# Teste da Razão

Seja  $\sum a_n$  tal que  $a_n > 0$  para  $n \geq N$  e

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

# Teste da Razão

Seja  $\sum a_n$  tal que  $a_n > 0$  para  $n \geq N$  e

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Se  $\rho < 1$  a série converge

# Teste da Razão

Seja  $\sum a_n$  tal que  $a_n > 0$  para  $n \geq N$  e

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Se  $\rho < 1$  a série **converge**

Se  $\rho > 1$  ou  $\rho \rightarrow \infty$  a série **diverge**

# Teste da Razão

Seja  $\sum a_n$  tal que  $a_n > 0$  para  $n \geq N$  e

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Se  $\rho < 1$  a série **converge**

Se  $\rho > 1$  ou  $\rho \rightarrow \infty$  a série **diverge**

Se  $\rho = 1$  o teste é **inconclusivo**

# Conteúdo

Teste da Razão

Exemplos do Teste da Razão

Lista Mínima

# Exemplo 1

Analisar a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

# Exemplo 1

Analisar a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Calculando os termos

$$a_n = \frac{(2n)!}{n!n!}$$

# Exemplo 1

Analisar a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Calculando os termos

$$a_n = \frac{(2n)!}{n!n!}$$

$$a_{n+1} = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!}$$

# Exemplo 1

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

# Exemplo 1

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left( \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \right) \left( \frac{n!n!}{(2n)!} \right)$$

# Exemplo 1

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left( \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \right) \left( \frac{n!n!}{(2n)!} \right) \\ &= \frac{n!}{(n+1)!} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{(2n+2)!}{(2n)!}\end{aligned}$$

## Exemplo 1

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left( \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \right) \left( \frac{n!n!}{(2n)!} \right) \\ &= \frac{n!}{(n+1)!} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \\ &= \frac{n!}{(n+1)n!} \frac{n!}{(n+1)n!} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)!}\end{aligned}$$

## Exemplo 1

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left( \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \right) \left( \frac{n!n!}{(2n)!} \right) \\&= \frac{n!}{(n+1)!} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \\&= \frac{n!}{(n+1)n!} \frac{n!}{(n+1)n!} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)!} \\&= \frac{1}{(n+1)} \frac{1}{(n+1)} (2n+2)(2n+1)\end{aligned}$$

# Exemplo 1

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left( \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \right) \left( \frac{n!n!}{(2n)!} \right) \\&= \frac{n!}{(n+1)!} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \\&= \frac{n!}{(n+1)n!} \frac{n!}{(n+1)n!} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)!} \\&= \frac{1}{(n+1)} \frac{1}{(n+1)} (2n+2)(2n+1) \\&= \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}\end{aligned}$$

## Exemplo 1

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left( \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \right) \left( \frac{n!n!}{(2n)!} \right) \\&= \frac{n!}{(n+1)!} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \\&= \frac{n!}{(n+1)n!} \frac{n!}{(n+1)n!} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)!} \\&= \frac{1}{(n+1)} \frac{1}{(n+1)} (2n+2)(2n+1) \\&= \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{4n+2}{n+1}\end{aligned}$$

## Exemplo 1

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left( \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \right) \left( \frac{n!n!}{(2n)!} \right) \\&= \frac{n!}{(n+1)!} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \\&= \frac{n!}{(n+1)n!} \frac{n!}{(n+1)n!} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)!} \\&= \frac{1}{(n+1)} \frac{1}{(n+1)} (2n+2)(2n+1) \\&= \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{4n+2}{n+1} = \frac{4 + 2/n}{1 + 1/n}\end{aligned}$$

# Exemplo 1

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left( \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \right) \left( \frac{n!n!}{(2n)!} \right) \\&= \frac{n!}{(n+1)!} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \\&= \frac{n!}{(n+1)n!} \frac{n!}{(n+1)n!} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)!} \\&= \frac{1}{(n+1)} \frac{1}{(n+1)} (2n+2)(2n+1) \\&= \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{4n+2}{n+1} = \frac{4 + 2/n}{1 + 1/n} \rightarrow 4\end{aligned}$$

## Exemplo 1

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left( \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \right) \left( \frac{n!n!}{(2n)!} \right) \\&= \frac{n!}{(n+1)!} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \\&= \frac{n!}{(n+1)n!} \frac{n!}{(n+1)n!} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)!} \\&= \frac{1}{(n+1)} \frac{1}{(n+1)} (2n+2)(2n+1) \\&= \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{4n+2}{n+1} = \frac{4 + 2/n}{1 + 1/n} \rightarrow 4 > 1\end{aligned}$$

## Exemplo 1

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left( \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \right) \left( \frac{n!n!}{(2n)!} \right) \\&= \frac{n!}{(n+1)!} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \\&= \frac{n!}{(n+1)n!} \frac{n!}{(n+1)n!} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)!} \\&= \frac{1}{(n+1)} \frac{1}{(n+1)} (2n+2)(2n+1) \\&= \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{4n+2}{n+1} = \frac{4 + 2/n}{1 + 1/n} \rightarrow 4 > 1 \quad \text{série divergente}\end{aligned}$$

## Exemplo 2

Use o teste da razão para verificar a convergência ou divergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{\ln(n)}$$

## Exemplo 2

$$a_n = \frac{3^{n+2}}{\ln(n)}$$

## Exemplo 2

$$a_n = \frac{3^{n+2}}{\ln(n)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+3}}{\ln(n+1)} \frac{\ln(n)}{3^{n+2}}$$

## Exemplo 2

$$a_n = \frac{3^{n+2}}{\ln(n)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+3}}{\ln(n+1)} \frac{\ln(n)}{3^{n+2}} = \frac{3 \ln(n)}{\ln(n+1)}$$

## Exemplo 2

$$a_n = \frac{3^{n+2}}{\ln(n)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+3}}{\ln(n+1)} \frac{\ln(n)}{3^{n+2}} = \frac{3 \ln(n)}{\ln(n+1)}$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

## Exemplo 2

$$a_n = \frac{3^{n+2}}{\ln(n)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+3}}{\ln(n+1)} \frac{\ln(n)}{3^{n+2}} = \frac{3 \ln(n)}{\ln(n+1)}$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \ln(n)}{\ln(n+1)}$$

## Exemplo 2

$$a_n = \frac{3^{n+2}}{\ln(n)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+3}}{\ln(n+1)} \frac{\ln(n)}{3^{n+2}} = \frac{3 \ln(n)}{\ln(n+1)}$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \ln(n)}{\ln(n+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \ln(x)}{\ln(x+1)}$$

## Exemplo 2

$$a_n = \frac{3^{n+2}}{\ln(n)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+3}}{\ln(n+1)} \frac{\ln(n)}{3^{n+2}} = \frac{3 \ln(n)}{\ln(n+1)}$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \ln(n)}{\ln(n+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \ln(x)}{\ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3(x+1)}{x}$$

## Exemplo 2

$$a_n = \frac{3^{n+2}}{\ln(n)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+3}}{\ln(n+1)} \frac{\ln(n)}{3^{n+2}} = \frac{3 \ln(n)}{\ln(n+1)}$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \ln(n)}{\ln(n+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \ln(x)}{\ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3(x+1)}{x} = 3$$

## Exemplo 2

$$a_n = \frac{3^{n+2}}{\ln(n)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+3}}{\ln(n+1)} \frac{\ln(n)}{3^{n+2}} = \frac{3 \ln(n)}{\ln(n+1)}$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \ln(n)}{\ln(n+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \ln(x)}{\ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3(x+1)}{x} = 3 > 1$$

A série diverge

## Exemplo 3

Use o teste da razão para verificar a convergência ou divergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

## Exemplo 3

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

## Exemplo 3

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!}$$

## Exemplo 3

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} \\ &= \frac{(n+1) n! n^n}{(n+1)^n (n+1) n!}\end{aligned}$$

## Exemplo 3

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} \\ &= \frac{(n+1) n! n^n}{(n+1)^n (n+1) n!} \\ &= \frac{n^n}{(n+1)^n}\end{aligned}$$

## Exemplo 3

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left( \frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} \\ &= \frac{(n+1) n! n^n}{(n+1)^n (n+1) n!} \\ &= \frac{n^n}{(n+1)^n} \end{aligned}$$

## Exemplo 3

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} \\ &= \frac{(n+1) n! n^n}{(n+1)^n (n+1) n!} \\ &= \frac{n^n}{(n+1)^n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \\ &= \left( \frac{1}{1 + 1/n} \right)^n\end{aligned}$$

## Exemplo 3

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} \\ &= \frac{(n+1) n! n^n}{(n+1)^n (n+1) n!} \\ &= \frac{n^n}{(n+1)^n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \\ &= \left( \frac{1}{1 + 1/n} \right)^n \\ &= \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{-1}\end{aligned}$$

## Exemplo 3

$$\rho = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

## Exemplo 3

$$\begin{aligned}\rho &= \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ &= \lim \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{-1}\end{aligned}$$

## Exemplo 3

$$\begin{aligned}\rho &= \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ &= \lim \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{-1} \\ &= \left[ \lim \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{-1}\end{aligned}$$

## Exemplo 3

$$\begin{aligned}\rho &= \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \\&= \lim \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{-1} \\&= \left[ \lim \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{-1} \\&= e^{-1}\end{aligned}$$

## Exemplo 3

$$\begin{aligned}\rho &= \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \\&= \lim \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{-1} \\&= \left[ \lim \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{-1} \\&= e^{-1} \approx 0,3679\end{aligned}$$

## Exemplo 3

$$\begin{aligned}\rho &= \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \\&= \lim \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{-1} \\&= \left[ \lim \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{-1} \\&= e^{-1} \approx 0,3679 < 1\end{aligned}$$

A série converge

## Exemplo 4

Use o teste da razão para verificar a convergência ou divergência da série

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$$

## Exemplo 4

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$$

## Exemplo 4

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$$

## Exemplo 4

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

## Exemplo 4

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$$

A série converge

# Conteúdo

Teste da Razão

Exemplos do Teste da Razão

**Lista Mínima**

# Lista Mínima

Estudar as Seção 6.6 da Apostila

Exercícios: 3a-f, 4a-f

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações