Séries de Potências – Manipulações

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

Conteúdo

Função Definida por Série de Potências

Se

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

Função Definida por Série de Potências

Se

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

possui um raio de convergência $R > 0$,

Função Definida por Série de Potências

Se

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

possui um raio de convergência $R > 0$, então a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

Função Definida por Série de Potências

Se

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

possui um raio de convergência $R > 0$, então a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

está definida no intervalo $(a-R, a+R)$

Função Definida por Série de Potências

Se

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

possui um raio de convergência $R > 0$, então a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

está definida no intervalo $(a - R, a + R)$

é infinitamente derivável nesse intervalo

Manipulando Funções Definidas por Séries

Podemos fazer mudanças de variáveis e somar as séries

Manipulando Funções Definidas por Séries

Podemos fazer mudanças de variáveis e somar as séries

Desde que estejamos atentos ao intervalo de convergência

Exemplo 1

Escreva $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$ como uma série de potências

Exemplo 1

Escreva $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ como uma série de potências

Sabemos que

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots + u^n + \cdots$$

para $|u| < 1$

Exemplo 1

Fazendo $u = x^2$

Exemplo 1

Fazendo $u = x^2$, temos

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots + u^n + \cdots$$

Exemplo 1

Fazendo $u = x^2$, temos

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots + u^n + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n$$

Exemplo 1

Fazendo $u = x^2$, temos

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots + u^n + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

Exemplo 1

Fazendo $u = x^2$, temos

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots + u^n + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \cdots$$

Exemplo 1

Fazendo $u = x^2$, temos

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots + u^n + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \cdots$$

Analisando o intervalo de convergência

Exemplo 1

Fazendo $u = x^2$, temos

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots + u^n + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \cdots$$

Analisando o intervalo de convergência

$$|u| < 1$$

Exemplo 1

Fazendo $u = x^2$, temos

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots + u^n + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \cdots$$

Analisando o intervalo de convergência

$$|u| < 1$$

$$x^2 < 1$$

Exemplo 1

Fazendo $u = x^2$, temos

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots + u^n + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \cdots$$

Analisando o intervalo de convergência

$$|u| < 1$$

$$x^2 < 1$$

$$|x| < \sqrt{1}$$

Exemplo 1

Fazendo $u = x^2$, temos

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots + u^n + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \cdots$$

Analisando o intervalo de convergência

$$|u| < 1$$

$$x^2 < 1$$

$$|x| < \sqrt{1}$$

$$-1 < x < 1$$

Exemplo 2

Escreva $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ como uma série de potências

Exemplo 2

Escreva $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ como uma série de potências

Sabemos que

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots + u^n + \cdots$$

para $|u| < 1$

Exemplo 2

Precisamos manipular f

Exemplo 2

Precisamos manipular f

$$f(x) = \frac{1}{x+2}$$

Exemplo 2

Precisamos manipular f

$$f(x) = \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)}$$

Exemplo 2

Precisamos manipular f

$$f(x) = \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left[1-\left(-\frac{x}{2}\right)\right]}$$

Exemplo 2

Precisamos manipular f

$$f(x) = \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{1}{\left[1-\left(-\frac{x}{2}\right)\right]}$$

Fazendo $u = -\frac{x}{2}$

Exemplo 2

Precisamos manipular f

$$f(x) \;=\; \frac{1}{x+2} \;=\; \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left[1-\left(-\frac{x}{2}\right)\right]}$$

Fazendo $u = -\dfrac{x}{2}$, temos

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^{n}$$

Exemplo 2

Precisamos manipular f

$$f(x) = \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left[1-\left(-\frac{x}{2}\right)\right]}$$

Fazendo $u = -\dfrac{x}{2}$, temos

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\,\frac{(-1)^n x^n}{2^n}$$

Exemplo 2

Precisamos manipular f

$$f(x) = \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left[1-\left(-\frac{x}{2}\right)\right]}$$

Fazendo $u = -\dfrac{x}{2}$, temos

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\,\frac{(-1)^n\,x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\,x^n$$

Exemplo 2

Analisando o intervalo de convergência

Exemplo 2

Analisando o intervalo de convergência

$$|u| < 1$$

Exemplo 2

Analisando o intervalo de convergência

$$\begin{aligned} |u| &< 1 \\ \left|-\frac{x}{2}\right| &< 1 \end{aligned}$$

Exemplo 2

Analisando o intervalo de convergência

$$\begin{aligned} |u| &< 1 \\ \left|-\frac{x}{2}\right| &< 1 \\ \frac{|x|}{2} &< 1 \end{aligned}$$

Exemplo 2

Analisando o intervalo de convergência

$$\begin{aligned} |u| &< 1 \\ \left|-\frac{x}{2}\right| &< 1 \\ \frac{|x|}{2} &< 1 \\ |x| &< 2 \end{aligned}$$

Exemplo 2

Analisando o intervalo de convergência

$$
\begin{aligned}
|u| &< 1 \\
\left|-\frac{x}{2}\right| &< 1 \\
\frac{|x|}{2} &< 1 \\
|x| &< 2
\end{aligned}
$$

A série converge para $x \in (-2, 2)$

Conteúdo

Derivação Termo a Termo

Podemos calcular a derivada de $f(x)$ construindo a série

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n\right)$$

Derivação Termo a Termo

Podemos calcular a derivada de $f(x)$ construindo a série

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(c_n(x-a)^n\right)$$

Derivação Termo a Termo

Podemos calcular a derivada de $f(x)$ construindo a série

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(c_n(x-a)^n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, n\,(x-a)^{n-1}$$

Derivação Termo a Termo

Podemos calcular a derivada de $f(x)$ construindo a série

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(c_n(x-a)^n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, n\,(x-a)^{n-1}$$

que converge em $(a-R, a+R)$

Derivação Termo a Termo

Podemos calcular a derivada de $f(x)$ construindo a série

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(c_n(x-a)^n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, n\,(x-a)^{n-1}$$

Note que o índice dessa série começa em 1

que converge em $(a-R, a+R)$

Exemplo 3

Calcule a derivada da função de Bessel

Exemplo 3

Calcule a derivada da função de Bessel

$$\mathrm{J}_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$$

Exemplo 3

$\mathrm{J}_0'(x)$

Exemplo 3

$$\mathrm{J}_0'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\right)$$

Exemplo 3

$$\mathrm{J}_0'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\right)$$

Exemplo 3

$$\mathrm{J}_0'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\frac{d}{dx}\left(x^{2n}\right)$$

Exemplo 3

$$J_0'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \frac{d}{dx}\left(x^{2n}\right)$$

$$J_0'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\, 2nx^{2n-1}$$

Exemplo 3

$$J_0'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \frac{d}{dx}\left(x^{2n}\right)$$

$$J_0'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\, 2nx^{2n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n\, x^{2n-1}}{(n!)^2\, 2^{2n-1}}$$

Exemplo 4

Qual a inclinação da reta tangente ao gráfico da função de Bessel em $x = 2$?

Exemplo 4

Já verificamos que

$$J_0'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, n \, x^{2n-1}}{2^{2n-1}(n!)^2}$$

Exemplo 4

Já verificamos que

$$J_0'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, n \, x^{2n-1}}{2^{2n-1}(n!)^2}$$

Avaliando a derivada em $x = 2$, temos

$$J_0'(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, n \, x^{2n-1}}{2^{2n-1}(n!)^2}\Bigg|_{x=2}$$

Exemplo 4

Já verificamos que

$$J_0'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, n \, x^{2n-1}}{2^{2n-1}(n!)^2}$$

Avaliando a derivada em $x = 2$, temos

$$J_0'(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, n \, x^{2n-1}}{2^{2n-1}(n!)^2}\Bigg|_{x=2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, n}{(n!)^2} \, \frac{2^{2n-1}}{2^{2n-1}}$$

Exemplo 4

Já verificamos que

$$J_0'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n\, x^{2n-1}}{2^{2n-1}(n!)^2}$$

Avaliando a derivada em $x = 2$, temos

$$J_0'(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n\, x^{2n-1}}{2^{2n-1}(n!)^2}\Bigg|_{x=2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n}{(n!)^2}\,\frac{2^{2n-1}}{2^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n}{(n!)^2}$$

Exemplo 5

Determine a inclinação da reta tangente ao gráfico da função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \qquad |x| < 1$$

em $x = \dfrac{1}{4}$

Exemplo 6

Calculando a derivada de f, temos

Exemplo 6

Calculando a derivada de f, temos

$$f'(x)$$

Exemplo 6

Calculando a derivada de f, temos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}\right)$$

Exemplo 6

Calculando a derivada de f, temos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}\right)$$

Exemplo 6

Calculando a derivada de f, temos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} \frac{d}{dx}\left(x^{2n+1}\right)$$

Exemplo 6

Calculando a derivada de f, temos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} \frac{d}{dx}\left(x^{2n+1}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} (2n+1)x^{2n}$$

Exemplo 6

Calculando a derivada de f, temos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} \frac{d}{dx}\left(x^{2n+1}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}(2n+1)x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}x^{2n}$$

Exemplo 6

$f'\left({}^{1}\!/_{4}\right)$

Exemplo 6

$$f'\left({}^{1}\!/\!_{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^{2n} \Bigg|_{x={}^{1}\!/\!_{4}}$$

Exemplo 6

$$f'\left({}^{1}\!/_{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^{2n} \bigg|_{x={}^{1}\!/_{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{1}{4^{2n}}$$

Exemplo 6

$$f'\left({}^{1}\!/_{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^{2n} \bigg|_{x={}^{1}\!/_{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{1}{4^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^{3n} (n!)^2}$$

Conteúdo

Integração Termo a Termo

Para calcularmos a integral de f construímos a série

$$\int f(x)dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \right) dx$$

Integração Termo a Termo

Para calcularmos a integral de f construímos a série

$$\int f(x)dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \right) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int c_n (x-a)^n dx \right)$$

Integração Termo a Termo

Para calcularmos a integral de f construímos a série

$$\int f(x)dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \right) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int c_n (x-a)^n dx \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$$

Integração Termo a Termo

Para calcularmos a integral de f construímos a série

$$\int f(x)dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \right) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int c_n (x-a)^n dx \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$$

que também converge em $(a-R, a+R)$

Exemplo 7

Calcule a integral da função de Bessel

Exemplo 7

Calcule a integral da função de Bessel

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$$

Exemplo 7

$$\int \mathrm{J}_0(x)\,dx$$

Exemplo 7

$$\int \mathrm{J}_0(x)\,dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{2^{2n}\,(n!)^2} \right) dx$$

Exemplo 7

$$\int \mathrm{J}_0(x)\,dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{2^{2n}\,(n!)^2} \right) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{2^{2n}\,(n!)^2}\, dx \right)$$

Exemplo 7

$$\int \mathrm{J}_0(x)\,dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \right) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} dx \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int x^{2n} dx$$

Exemplo 7

$$\int \mathrm{J}_0(x)\,dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{2^{2n}\,(n!)^2} \right) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{2^{2n}\,(n!)^2}\,dx \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}\,(n!)^2} \int x^{2n}\,dx$$

$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}\,(n!)^2}\, \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Exemplo 7

$$\int \mathrm{J}_0(x)\,dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{2^{2n}\,(n!)^2} \right) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{2^{2n}\,(n!)^2}\, dx \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}\,(n!)^2} \int x^{2n}\, dx$$

$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}\,(n!)^2}\, \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \;=\; C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{2^{2n}(2n+1)\,(n!)^2}$$

Exemplo 8

Calcule a integral da função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \qquad |x| < 1$$

Exemplo 8

$$\int f(x)dx$$

Exemplo 8

$$\int f(x)dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \right) dx$$

Exemplo 8

$$\int f(x)dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \right) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int \left(\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \right) dx$$

Exemplo 8

$$\int f(x)dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \right) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int \left(\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \right) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} \int x^{2n+1} dx$$

Exemplo 8

$$\int f(x)dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \right) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int \left(\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \right) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} \int x^{2n+1} dx$$

$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} \frac{x^{2n+2}}{2n+2}$$

Exemplo 8

$$\int f(x)dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \right) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int \left(\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \right) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} \int x^{2n+1} dx$$

$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} \frac{x^{2n+2}}{2n+2} = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!\, x^{2n+2}}{4^n (n!)^2 (2n+2)(2n+1)}$$

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar a Seção 7.2 da Apostila

Exercícios: 1a-b, 2

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações