Séries Numéricas – Teste da Integral

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

Conteúdo

Teste da Integral

Trocamos o problema de verificar se uma série converge para o de verificar se uma integral converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{ converge?} \qquad \text{por} \qquad \int_1^{\infty} f(x)\,dx \ \text{ converge?}$$

Teste da Integral

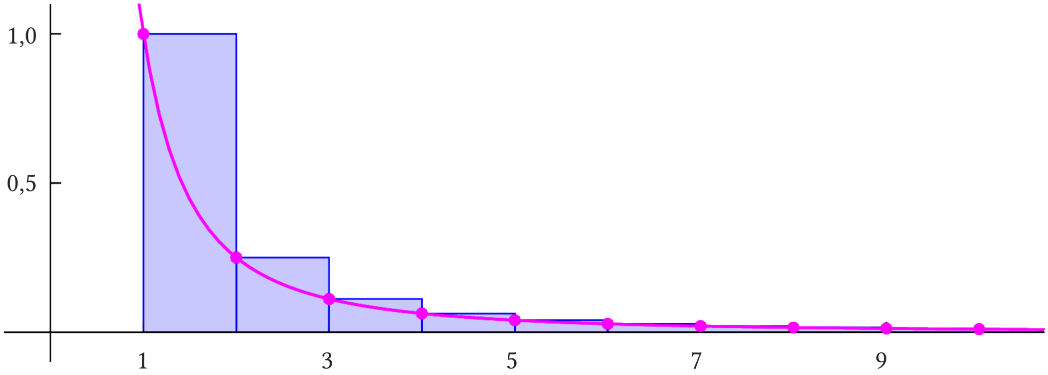
Trocamos o problema de verificar se uma série converge para o de verificar se uma integral converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge?} \qquad \text{por} \qquad \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ converge?}$$

O valor da integral **não é** uma boa aproximação para a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \not\approx \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

Diferença Entre a Integral e a Série



Teste da Integral

Seja (a_n) uma sequência tal que

Teste da Integral

Seja (a_n) uma sequência tal que

1. seus termos são positivos, $a_n > 0$

Teste da Integral

Seja (a_n) uma sequência tal que

1. seus termos são positivos, $a_n > 0$
2. $a_n = f(n)$

Teste da Integral

Seja (a_n) uma sequência tal que

1. seus termos são positivos, $a_n > 0$
2. $a_n = f(n)$
3. a função f é contínua, positiva e decrescente para todo $x \geq N$

Teste da Integral

Seja (a_n) uma sequência tal que

1. seus termos são positivos, $a_n > 0$
2. $a_n = f(n)$
3. a função f é contínua, positiva e decrescente para todo $x \geq N$

Então, a série $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ converge

Teste da Integral

Seja (a_n) uma sequência tal que

1. seus termos são positivos, $a_n > 0$
2. $a_n = f(n)$
3. a função f é contínua, positiva e decrescente para todo $x \geq N$

Então, a série $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ converge

se, e somente se

Teste da Integral

Seja (a_n) uma sequência tal que

1. seus termos são positivos, $a_n > 0$
2. $a_n = f(n)$
3. a função f é contínua, positiva e decrescente para todo $x \geq N$

Então, a série $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ converge

se, e somente se

a integral $\displaystyle\int_N^{\infty} f(x)dx$ converge

Ilustração do Teste da Integral – 1

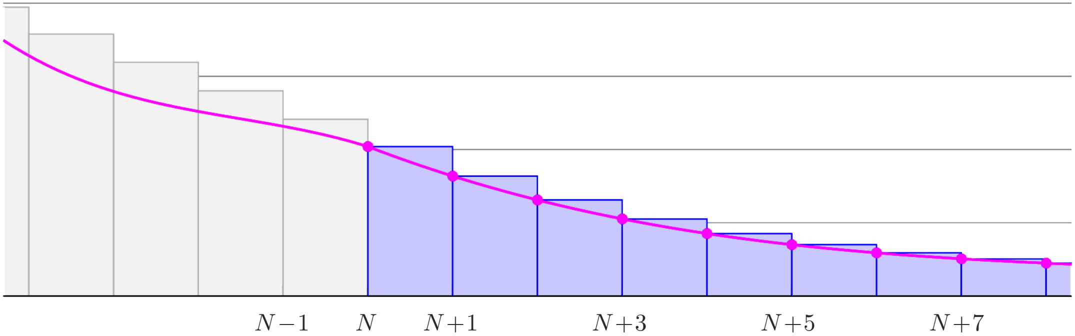
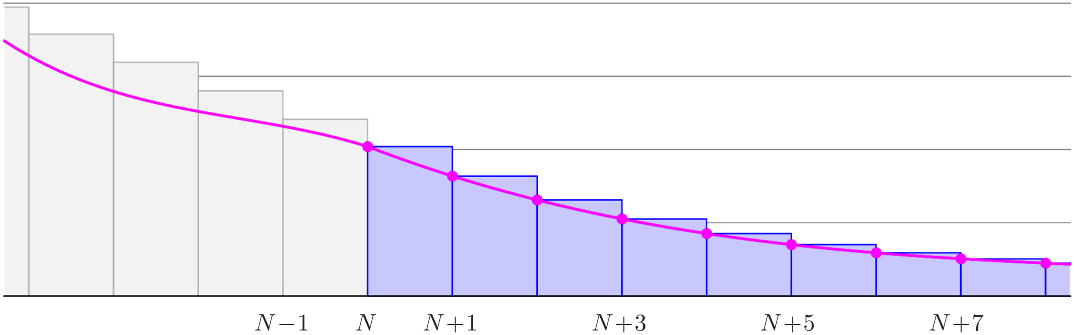
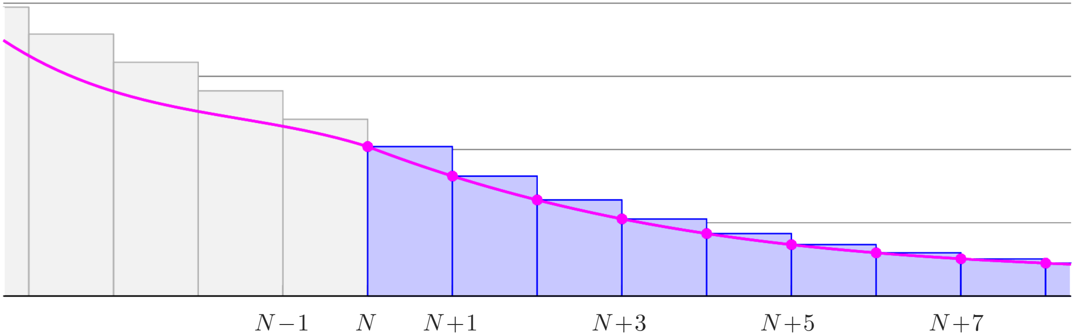


Ilustração do Teste da Integral – 1



A série é “maior” do que a integral

Ilustração do Teste da Integral – 1



A série é “maior” do que a integral $$\int_N^\infty f(x)\,dx \quad \leq \quad \sum_{n=N}^{\infty} a_n$$

Ilustração do Teste da Integral – 2

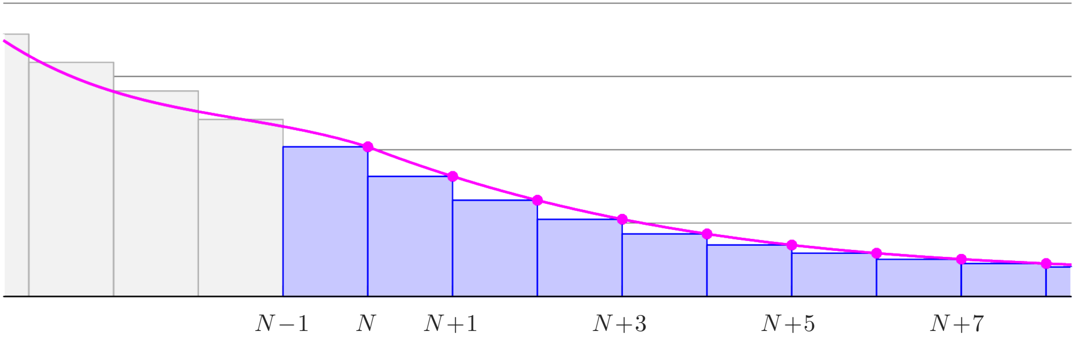
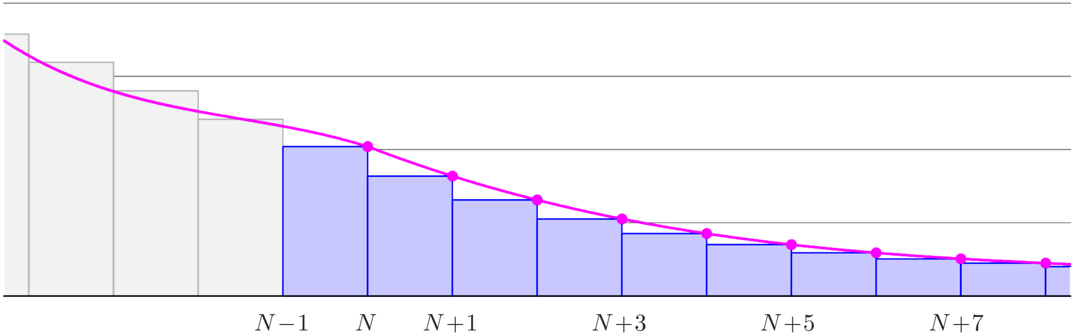
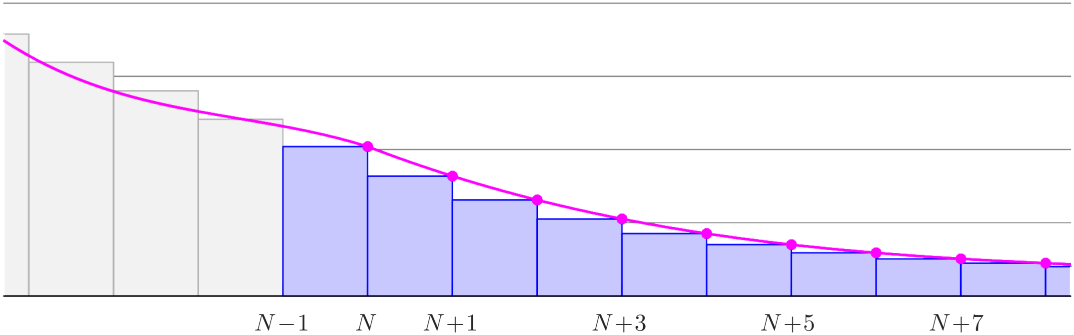


Ilustração do Teste da Integral – 2



A série é “menor” do que a integral

Ilustração do Teste da Integral – 2



A série é "menor" do que a integral

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_k \quad \leq \quad a_N + \int_N^{\infty} f(x)\,dx$$

Comparação entre a Série e a Integral

Temos portanto as relações

$$\int_N^\infty f(x)\,dx \quad \le \quad \sum_{k=N}^\infty a_k \quad \le \quad a_N + \int_N^\infty f(x)\,dx$$

Lembrando como Calcular uma Integral Imprópria

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

Lembrando como Calcular uma Integral Imprópria

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Lembrando como Calcular uma Integral Imprópria

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \;=\; \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx \;=\; \lim_{b\to\infty} \left(F(x)\Big|_a^b \right)$$

Lembrando como Calcular uma Integral Imprópria

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \;=\; \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx \;=\; \lim_{b\to\infty} \left(F(x)\Big|_a^b \right) \;=\; \lim_{b\to\infty} \big(F(b) - F(a)\big)$$

Conteúdo

Exemplo 1

Use o teste da integral para determinar se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge ou diverge

Exemplo 1

Use o teste da integral para determinar se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge ou diverge

Certifique-se de que as condições do teste da integral sejam satisfeitas

Exemplo 1 – Solução

Podemos aplicar o teste da integral, pois, a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$,

Exemplo 1 – Solução

Podemos aplicar o teste da integral, pois, a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$,

para $x \geq 1$,

Exemplo 1 – Solução

Podemos aplicar o teste da integral, pois, a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$,

para $x \geq 1$, é positiva,

Exemplo 1 – Solução

Podemos aplicar o teste da integral, pois, a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$,

para $x \geq 1$, é positiva, contínua

Exemplo 1 – Solução

Podemos aplicar o teste da integral, pois, a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$,

para $x \geq 1$, é positiva, contínua e decrescente

Exemplo 1 – Solução

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$$

Exemplo 1 – Solução

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^2}\, dx$$

Exemplo 1 – Solução

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right)\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) \;=\; 1$$

Exemplo 1 – Solução

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) \;=\; 1$$

Como a integral converge a série também converge

Exemplo 1 – Diferença Entre a Soma e a Integral

Note que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449 \neq 1$$

O cálculo da soma da série está na Seção 9.6 – Problema de Basileia

Exemplo 2

Use o teste da integral para determinar se a série converge ou diverge.
Certifique-se de que as condições do teste da integral sejam satisfeitas.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$$

Exemplo 2 – Solução

A função $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ é positiva e contínua para $x \geq 1$

Exemplo 2 – Solução

A função $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ é positiva e contínua para $x \geq 1$

Para verificar que ela é decrescente, calculamos sua derivada

$$f'(x)$$

Exemplo 2 – Solução

A função $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ é positiva e contínua para $x \geq 1$

Para verificar que ela é decrescente, calculamos sua derivada

$$f'(x) = \frac{1(x^2+4) - x(2x)}{(x^2+4)^2}$$

Exemplo 2 – Solução

A função $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ é positiva e contínua para $x \geq 1$

Para verificar que ela é decrescente, calculamos sua derivada

$$f'(x) = \frac{1(x^2+4) - x(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{4 - x^2}{(x^2+4)^2}$$

Exemplo 2 – Solução

A função $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ é positiva e contínua para $x \geq 1$

Para verificar que ela é decrescente, calculamos sua derivada

$$f'(x) = \frac{1(x^2+4) - x(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$$

$f'(x) < 0$, e, portanto, f é decrescente, para todo $x > 2$

Exemplo 2 – Solução

A função $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ é positiva e contínua para $x \geq 1$

Para verificar que ela é decrescente, calculamos sua derivada

$$f'(x) = \frac{1(x^2+4) - x(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$$

$f'(x) < 0$, e, portanto, f é decrescente, para todo $x > 2$

Precisamos de um N inteiro a partir do qual f seja decrescente

Exemplo 2 – Solução

A função $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ é positiva e contínua para $x \geq 1$

Para verificar que ela é decrescente, calculamos sua derivada

$$f'(x) = \frac{1(x^2+4) - x(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$$

$f'(x) < 0$, e, portanto, f é decrescente, para todo $x > 2$

Precisamos de um N inteiro a partir do qual f seja decrescente

Escolhemos $N = 3$

Exemplo 2 – Solução

Podemos, agora, aplicar o teste da integral

Exemplo 2 – Solução

Podemos, agora, aplicar o teste da integral

Primeiro calculamos a primitiva de $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

Exemplo 2 – Solução

Podemos, agora, aplicar o teste da integral

Primeiro calculamos a primitiva de $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$ usando substituição

$$u = x^2 + 4 \qquad \text{e} \qquad du = 2x dx$$

Exemplo 2 – Solução

Podemos, agora, aplicar o teste da integral

Primeiro calculamos a primitiva de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ usando substituição

$$u = x^2 + 4 \qquad \text{e} \qquad du = 2x dx$$

$$F(x) = \int \frac{x}{x^2+4}\, dx = \int \frac{1}{2u}\, du$$

Exemplo 2 – Solução

Podemos, agora, aplicar o teste da integral

Primeiro calculamos a primitiva de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ usando substituição

$$u = x^2 + 4 \qquad \text{e} \qquad du = 2x dx$$

$$F(x) = \int \frac{x}{x^2+4}\, dx = \int \frac{1}{2u}\, du$$

$$= \frac{1}{2} \ln u + C$$

Exemplo 2 – Solução

Podemos, agora, aplicar o teste da integral

Primeiro calculamos a primitiva de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ usando substituição

$$u = x^2 + 4 \qquad \text{e} \qquad du = 2x dx$$

$$F(x) = \int \frac{x}{x^2+4}\, dx = \int \frac{1}{2u}\, du$$

$$= \frac{1}{2} \ln u + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(x^2+4\right) + C$$

Exemplo 2 – Solução

Calculando a integral imprópria temos

Exemplo 2 – Solução

Calculando a integral imprópria temos

$$\int_3^{\infty} \frac{x}{x^2+4}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_3^{b} \frac{x}{x^2+4}\,dx$$

Exemplo 2 – Solução

Calculando a integral imprópria temos

$$\int_3^{\infty} \frac{x}{x^2+4}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_3^{b} \frac{x}{x^2+4}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[F(x)\right]\Big|_3^b$$

Exemplo 2 – Solução

Calculando a integral imprópria temos

$$\int_3^\infty \frac{x}{x^2+4}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_3^b \frac{x}{x^2+4}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[F(x)\right]\Big|_3^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)\right]\Big|_3^b$$

Exemplo 2 – Solução

Calculando a integral imprópria temos

$$\int_3^\infty \frac{x}{x^2+4}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_3^b \frac{x}{x^2+4}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[F(x)\right]\Big|_3^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)\right]\Bigg|_3^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{\ln\left(b^2+4\right)-\ln\left(3^2+4\right)}{2}\right]$$

Exemplo 2 – Solução

Calculando a integral imprópria temos

$$\int_3^{\infty} \frac{x}{x^2+4}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_3^{b} \frac{x}{x^2+4}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[F(x)\right]\Big|_3^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)\right]\Big|_3^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{\ln\left(b^2+4\right) - \ln\left(3^2+4\right)}{2}\right] = \infty$$

Exemplo 2 – Solução

Calculando a integral imprópria temos

$$\int_3^\infty \frac{x}{x^2+4}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_3^b \frac{x}{x^2+4}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[F(x)\right]\Big|_3^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)\right]\Big|_3^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{\ln(b^2+4)-\ln(3^2+4)}{2}\right] = \infty$$

Como a integral diverge a série também diverge

Conteúdo

Estimativa de Erro

Não temos uma fórmula para a soma da série

Estimativa de Erro

Não temos uma fórmula para a soma da série

Podemos usar as somas parciais para aproximar a soma

Estimativa de Erro

Não temos uma fórmula para a soma da série

Podemos usar as somas parciais para aproximar a soma

Quantos termos precisamos?

Resto ou Erro

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Resto ou Erro

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k
\end{aligned}
$$

Resto ou Erro

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \\
&= S_n + R_n
\end{aligned}
$$

Resto ou Erro

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \\
&= S_n + R_n
\end{aligned}
$$

R_n é o resto da série, isso é, o que faltou ser calculado

$$
R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k
$$

Estimativa de Erro

Se uma série é convergente pelo teste da integral podemos estimar o resto

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \cdots$$

Estimativa de Erro

Se uma série é convergente pelo teste da integral podemos estimar o resto

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \cdots$$

comparando a área dos retângulos com a da integral temos

Estimativa de Erro

Se uma série é convergente pelo teste da integral podemos estimar o resto

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \cdots$$

comparando a área dos retângulos com a da integral temos

$$R_n \geq \int_{n+1}^{\infty} f(x)\, dx$$

Estimativa de Erro

Se uma série é convergente pelo teste da integral podemos estimar o resto

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \cdots$$

comparando a área dos retângulos com a da integral temos

$$R_n \geq \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$R_n \leq \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx$$

Limitantes para o resto no teste da integral

Se a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

converge segundo o teste da integral, então o resto satisfaz

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \quad \leq \quad R_n \quad \leq \quad \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx$$

Conteúdo

Exemplo 3

Sabemos que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge, pois é uma série p, com $p = 2$

Descubra n tal que o resto R_n da aproximação S_n seja menor que $0{,}01$

Exemplo 3 – Solução

Sabemos que o Teste da Integral pode ser aplicado, pois

$$\int_n^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}+\frac{1}{n}\right] = \frac{1}{n}$$

Exemplo 3 – Solução

Sabemos que o Teste da Integral pode ser aplicado, pois

$$\int_n^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{b} + \frac{1}{n} \right] = \frac{1}{n}$$

Assim

$$\frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}$$

Exemplo 3 – Solução

Para garantir que $R_n < 0{,}01$ impomos que

$$\frac{1}{n} < 0{,}01$$

isolando n obtemos $n > 100$

Exemplo 3 – Solução

Para garantir que $R_n < 0{,}01$ impomos que

$$\frac{1}{n} < 0{,}01$$

isolando n obtemos $n > 100$

A aproximação S_{100} tem um erro menor do que $0{,}01$

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar as Seção 6.4 da Apostila

Exercícios: 3, 7a, 8, 9, 10

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações