

Série- p

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries



Conteúdo

Série- p e Série Harmônica

Aplicando o Teste da Integral para $p \neq 1$

Convergência da Série p

Lista Mínima

Série- p ou p -série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \dots$$

onde p é uma constante real

Série- p

Série- p ou p -série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \dots$$

onde p é uma constante real

Não confundir com a [Série Geométrica](#)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha r^n = \alpha r^0 + \alpha r^1 + \alpha r^2 + \alpha r^3 + \alpha r^4 + \dots$$

Série Harmônica

Série Harmônica é um caso particular da série- p com $p = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

Série Harmônica

Série Harmônica é um caso particular da série- p com $p = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

Essa série passa no teste da divergência, pois, $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$

Série Harmônica

Série Harmônica é um caso particular da série- p com $p = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

Essa série passa no teste da divergência, pois, $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$

mas mesmo assim diverge

Somas Parciais da Série Harmônica

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

Somas Parciais da Série Harmônica

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Somas Parciais da Série Harmônica

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

Somas Parciais da Série Harmônica

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

Somas Parciais da Série Harmônica

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2}$$

Somas Parciais da Série Harmônica

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2}$$

$$S_8 = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$$

Somas Parciais da Série Harmônica

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2}$$

$$S_8 = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

Somas Parciais da Série Harmônica

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2}$$

$$S_8 = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} > \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Somas Parciais da Série Harmônica

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2}$$

$$S_8 = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} > \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$S_{16} = S_8 + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}$$

Somas Parciais da Série Harmônica

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2}$$

$$S_8 = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} > \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$S_{16} = S_8 + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} > S_8 + \frac{8}{16}$$

Somas Parciais da Série Harmônica

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2}$$

$$S_8 = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} > \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$S_{16} = S_8 + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} > S_8 + \frac{8}{16} > \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2}$$

Somas Parciais da Série Harmônica

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2}$$

$$S_8 = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} > \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$S_{16} = S_8 + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} > S_8 + \frac{8}{16} > \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2}$$

$$S_{2^k} \geq \frac{2+k}{2}$$

Somas Parciais da Série Harmônica

Considerando os termos $n = 2^k$ da sequência de somas parciais

Somas Parciais da Série Harmônica

Considerando os termos $n = 2^k$ da sequência de somas parciais observamos que

$$S_{2^k} \geq \frac{2+k}{2}$$

Somas Parciais da Série Harmônica

Considerando os termos $n = 2^k$ da sequência de somas parciais observamos que

$$S_{2^k} \geq \frac{2+k}{2}$$

portanto, $S_n \rightarrow \infty$ e a série harmônica diverge

Conteúdo

Série- p e Série Harmônica

Aplicando o Teste da Integral para $p \neq 1$

Convergência da Série p

Lista Mínima

Exemplo 1

Utilize o teste da integral para verificar a convergência da série p com $p \neq 1$

Exemplo 1 – Teste da Integral

Observamos que

$$a_n = \frac{1}{n^p} = f(n) \quad \text{para} \quad f(x) = \frac{1}{x^p}$$

Exemplo 1 – Teste da Integral

Observamos que

$$a_n = \frac{1}{n^p} = f(n) \quad \text{para} \quad f(x) = \frac{1}{x^p}$$

Para $x \in [1, \infty)$ a **função** $f(x)$ é

Exemplo 1 – Teste da Integral

Observamos que

$$a_n = \frac{1}{n^p} = f(n) \quad \text{para} \quad f(x) = \frac{1}{x^p}$$

Para $x \in [1, \infty)$ a função $f(x)$ é **decrecente**,

Exemplo 1 – Teste da Integral

Observamos que

$$a_n = \frac{1}{n^p} = f(n) \quad \text{para} \quad f(x) = \frac{1}{x^p}$$

Para $x \in [1, \infty)$ a função $f(x)$ é **decrescente**, **contínua**

Exemplo 1 – Teste da Integral

Observamos que

$$a_n = \frac{1}{n^p} = f(n) \quad \text{para} \quad f(x) = \frac{1}{x^p}$$

Para $x \in [1, \infty)$ a função $f(x)$ é **decrescente**, **contínua** e **positiva**

Exemplo 1 – Teste da Integral

Observamos que

$$a_n = \frac{1}{n^p} = f(n) \quad \text{para} \quad f(x) = \frac{1}{x^p}$$

Para $x \in [1, \infty)$ a função $f(x)$ é **decrecente**, **contínua** e **positiva**

Pelo Teste da Integral

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx \text{ converge}$$

Exemplo 1 – Calculando a Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

Exemplo 1 – Calculando a Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-p} dx \quad p \neq 1$$

Exemplo 1 – Calculando a Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-p} dx \quad p \neq 1$$
$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^b \right]$$

Exemplo 1 – Calculando a Integral

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-p} dx \quad p \neq 1 \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^b \right] \\ &= \frac{1}{1-p} \lim_{b \rightarrow \infty} (b^{1-p} - 1)\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Calculando a Integral

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-p} dx \quad p \neq 1 \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^b \right] \\ &= \frac{1}{1-p} \lim_{b \rightarrow \infty} (b^{1-p} - 1)\end{aligned}$$

A convergência de $\lim_{b \rightarrow \infty} b^{1-p}$ depende do valor de p

Exemplo 1 – Convergência

Se $p > 1$

Se $p < 1$

Exemplo 1 – Convergência

Se $p > 1$

$$1 - p < 0 \quad \lim_{b \rightarrow \infty} b^{1-p} = 0$$

Se $p < 1$

Exemplo 1 – Convergência

Se $p > 1$

$$1 - p < 0 \quad \lim_{b \rightarrow \infty} b^{1-p} = 0$$

Se $p < 1$

$$1 - p > 0 \quad \lim_{b \rightarrow \infty} b^{1-p} \text{ diverge}$$

Conteúdo

Série- p e Série Harmônica

Aplicando o Teste da Integral para $p \neq 1$

Convergência da Série p

Lista Mínima

Convergência da Série- p

A série- p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \dots$$

converge para $p > 1$ e diverge caso contrário

Conteúdo

Série- p e Série Harmônica

Aplicando o Teste da Integral para $p \neq 1$

Convergência da Série p

Lista Mínima

Lista Mínima

Estudar as Seção 6.4 da Apostila

Exercícios:

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações