Séries Numéricas – Teste da Razão

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

Conteúdo

Motivação – Analise da Série Geométrica

Considere a série geométrica com a e r positivos

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

Motivação – Analise da Série Geométrica

Considere a série geométrica com a e r positivos

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

Podemos comparar o crescimento de seus termos calculando a razão

$$\rho = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Motivação – Analise da Série Geométrica

Considere a série geométrica com a e r positivos

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

Podemos comparar o crescimento de seus termos calculando a razão

$$\rho = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^n}{ar^{n-1}}$$

Motivação – Analise da Série Geométrica

Considere a série geométrica com a e r positivos

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

Podemos comparar o crescimento de seus termos calculando a razão

$$\rho = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^n}{ar^{n-1}} = r$$

Motivação – Analise da Série Geométrica

Considere a série geométrica com a e r positivos

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

Podemos comparar o crescimento de seus termos calculando a razão

$$\rho = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^n}{ar^{n-1}} = r$$

Se $\rho < 1$ a série converge

Motivação – Analise da Série Geométrica

Considere a série geométrica com a e r positivos

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

Podemos comparar o crescimento de seus termos calculando a razão

$$\rho = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ar^n}{ar^{n-1}} = r$$

Se $\rho < 1$ a série converge

Se $\rho \geq 1$ a série diverge

Teste da Razão

Seja $\sum a_n$ tal que $a_n > 0$ para $n \geq N$

Teste da Razão

Seja $\sum a_n$ tal que $a_n > 0$ para $n \geq N$ e

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Teste da Razão

Seja $\sum a_n$ tal que $a_n > 0$ para $n \geq N$ e

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Se $\rho < 1$ a série converge

Teste da Razão

Seja $\sum a_n$ tal que $a_n > 0$ para $n \geq N$ e

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Se $\rho < 1$ a série converge

Se $\rho > 1$ ou $\rho \to \infty$ a série diverge

Teste da Razão

Seja $\sum a_n$ tal que $a_n > 0$ para $n \geq N$ e

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Se $\rho < 1$ a série converge

Se $\rho > 1$ ou $\rho \to \infty$ a série diverge

Se $\rho = 1$ o teste é inconclusivo

Conteúdo

Exemplo 1

Analisar a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Exemplo 1 – Solução

Calculando os termos

Exemplo 1 – Solução

Calculando os termos

$$a_n = \frac{(2n)!}{n!n!}$$

$$a_{n+1} = \frac{\big(2(n+1)\big)!}{(n+1)!(n+1)!}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \right) \left(\frac{n!n!}{(2n)!} \right)$$

Exemplo 1 – Solução

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \right) \left(\frac{n!n!}{(2n)!} \right)$$

$$= \frac{n!}{(n+1)!} \, \frac{n!}{(n+1)!} \, \frac{(2n+2)!}{(2n)!}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \right) \left(\frac{n!n!}{(2n)!} \right)$$

$$= \frac{n!}{(n+1)!} \, \frac{n!}{(n+1)!} \, \frac{(2n+2)!}{(2n)!}$$

$$= \frac{n!}{(n+1)n!} \, \frac{n!}{(n+1)n!} \, \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)!}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left(\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \right) \left(\frac{n!n!}{(2n)!} \right) \\
&= \frac{n!}{(n+1)!} \, \frac{n!}{(n+1)!} \, \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \\
&= \frac{n!}{(n+1)n!} \, \frac{n!}{(n+1)n!} \, \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)} \, \frac{1}{(n+1)} \, (2n+2)(2n+1)
\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left(\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \right) \left(\frac{n!n!}{(2n)!} \right) \\
&= \frac{n!}{(n+1)!} \, \frac{n!}{(n+1)!} \, \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \\
&= \frac{n!}{(n+1)n!} \, \frac{n!}{(n+1)n!} \, \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)} \, \frac{1}{(n+1)} \, (2n+2)(2n+1) \\
&= \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}
\end{aligned}
$$

Exemplo 1 – Solução

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left(\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \right) \left(\frac{n!n!}{(2n)!} \right) \\
&= \frac{n!}{(n+1)!} \, \frac{n!}{(n+1)!} \, \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \\
&= \frac{n!}{(n+1)n!} \, \frac{n!}{(n+1)n!} \, \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)} \, \frac{1}{(n+1)} \, (2n+2)(2n+1) \\
&= \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{4n+2}{n+1}
\end{aligned}
$$

Exemplo 1 – Solução

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left(\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}\right)\left(\frac{n!n!}{(2n)!}\right) \\
&= \frac{n!}{(n+1)!}\,\frac{n!}{(n+1)!}\,\frac{(2n+2)!}{(2n)!} \\
&= \frac{n!}{(n+1)n!}\,\frac{n!}{(n+1)n!}\,\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)}\,\frac{1}{(n+1)}\,(2n+2)(2n+1) \\
&= \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{4n+2}{n+1} = \frac{4+{}^{2}/_{n}}{1+{}^{1}/_{n}}
\end{aligned}
$$

Exemplo 1 – Solução

$$\rho = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}
\rho &= \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \\
&= \lim \frac{4 + {}^{2}\!/_{n}}{1 + {}^{1}\!/_{n}}
\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}
\rho &= \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \\
&= \lim \frac{4 + {}^{2}\!/_{n}}{1 + {}^{1}\!/_{n}} \\
&= 4
\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

$$
\begin{aligned}
\rho &= \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \\
&= \lim \frac{4 + {}^{2}\!/_{n}}{1 + {}^{1}\!/_{n}} \\
&= 4 \\
&> 1
\end{aligned}
$$

Exemplo 1 – Solução

$$
\begin{aligned}
\rho &= \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \\
&= \lim \frac{4 + {}^2\!/_n}{1 + {}^1\!/_n} \\
&= 4 \\
&> 1
\end{aligned}
$$

Pelo teste da razão concluímos que a série diverge

Exemplo 2

Use o teste da razão para verificar a convergência ou divergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{\ln(n)}$$

Exemplo 2 – Solução

$$a_n = \frac{3^{n+2}}{\ln(n)}$$

Exemplo 2 – Solução

$$a_n = \frac{3^{n+2}}{\ln(n)}$$

$$a_{n+1} = \frac{3^{n+3}}{\ln(n+1)}$$

Exemplo 2 – Solução

$$a_n = \frac{3^{n+2}}{\ln(n)}$$

$$a_{n+1} = \frac{3^{n+3}}{\ln(n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Exemplo 2 – Solução

$$a_n = \frac{3^{n+2}}{\ln(n)}$$

$$a_{n+1} = \frac{3^{n+3}}{\ln(n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+3}}{\ln(n+1)} \frac{\ln(n)}{3^{n+2}}$$

Exemplo 2 – Solução

$$a_n = \frac{3^{n+2}}{\ln(n)}$$

$$a_{n+1} = \frac{3^{n+3}}{\ln(n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+3}}{\ln(n+1)} \frac{\ln(n)}{3^{n+2}} = \frac{3\ln(n)}{\ln(n+1)}$$

Exemplo 2 – Solução

ρ

Exemplo 2 – Solução

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Exemplo 2 – Solução

$$
\begin{aligned}
\rho &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3\ln(n)}{\ln(n+1)}
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 – Solução

$$
\begin{aligned}
\rho &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3\ln(n)}{\ln(n+1)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3\ln(x)}{\ln(x+1)}
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 – Solução

$$
\begin{aligned}
\rho &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3\ln(n)}{\ln(n+1)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3\ln(x)}{\ln(x+1)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3(x+1)}{x}
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}
\rho &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3\ln(n)}{\ln(n+1)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3\ln(x)}{\ln(x+1)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3(x+1)}{x} \\
&= 3
\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$
\begin{aligned}
\rho &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3\ln(n)}{\ln(n+1)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3\ln(x)}{\ln(x+1)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3(x+1)}{x} \\
&= 3 \; > \; 1
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 – Solução

$$
\begin{aligned}
\rho &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3\ln(n)}{\ln(n+1)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3\ln(x)}{\ln(x+1)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3(x+1)}{x} \\
&= 3 \ > \ 1
\end{aligned}
$$

A série diverge pelo teste da razão

Exemplo 3

Use o teste da razão para verificar a convergência ou divergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Exemplo 3 – Solução

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

Exemplo 3 – Solução

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \; \frac{n^n}{n!}$$

$$= \frac{(n+1)\, n!\, n^n}{(n+1)^n\, (n+1)\, n!}$$

Exemplo 3 – Solução

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{n!} \\
&= \frac{(n+1)\,n!\,n^n}{(n+1)^n\,(n+1)\,n!} \\
&= \frac{n^n}{(n+1)^n}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Solução

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \, \frac{n^n}{n!} \\
&= \frac{(n+1)\, n! \, n^n}{(n+1)^n \, (n+1) \, n!} \\
&= \frac{n^n}{(n+1)^n}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n
$$

Exemplo 3 – Solução

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{n!}$$

$$= \frac{(n+1)\,n!\,n^n}{(n+1)^n\,(n+1)\,n!}$$

$$= \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{1+{}^1\!/_n}\right)^n$$

Exemplo 3 – Solução

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \, \frac{n^n}{n!}$$

$$= \frac{(n+1)\, n!\, n^n}{(n+1)^n\, (n+1)\, n!}$$

$$= \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{1 + {}^{1}\!/_{n}}\right)^n$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\rho = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Exemplo 3 – Solução

$$
\begin{aligned}
\rho &= \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \\
&= \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^{-1}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Solução

$$
\begin{aligned}
\rho &= \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \\
&= \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^{-1} \\
&= \left[\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^{-1}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Solução

$$
\begin{aligned}
\rho &= \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \\
&= \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} \\
&= \left[\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} \\
&= e^{-1}
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Solução

$$
\begin{aligned}
\rho &= \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \\
&= \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^{-1} \\
&= \left[\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^{-1} \\
&= e^{-1} \approx 0{,}3679
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Solução

$$\rho = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$= \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1}$$

$$= \left[\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1}$$

$$= e^{-1} \approx 0{,}3679 < 1$$

A série converge pelo teste da razão

Exemplo 4

Use o teste da razão para verificar a convergência ou divergência da série

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$$

Exemplo 4 – Solução

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$$

Exemplo 4 – Solução

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$$

Exemplo 4 – Solução

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$$

ρ

Exemplo 4 – Solução

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$$

$$\rho = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Exemplo 4 – Solução

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$$

$$\rho = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$$

Exemplo 4 – Solução

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$$

$$\rho = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

Exemplo 4 – Solução

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$$

$$\rho \ = \ \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \ = \ \lim \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \ = \ \frac{1}{2} \ < \ 1$$

Exemplo 4 – Solução

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$$

$$\rho \ = \ \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \ = \ \lim \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \ = \ \frac{1}{2} \ < \ 1$$

A série converge pelo teste da razão

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar as Seção 6.6 da Apostila

Exercícios: 3a-f, 4a-f

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações