Séries Numéricas – Teste da Raiz

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

Conteúdo

Teste da Raiz

Seja $\sum a_n$ tal que $a_n \geq 0$ para $n \geq N$

Teste da Raiz

Seja $\sum a_n$ tal que $a_n \geq 0$ para $n \geq N$ e

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Teste da Raiz

Seja $\sum a_n$ tal que $a_n \geq 0$ para $n \geq N$ e

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Se $\rho < 1$ a série converge

Teste da Raiz

Seja $\sum a_n$ tal que $a_n \geq 0$ para $n \geq N$ e

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Se $\rho < 1$ a série converge

Se $\rho > 1$ ou $\rho \to \infty$ a série diverge

Teste da Raiz

Seja $\sum a_n$ tal que $a_n \geq 0$ para $n \geq N$ e

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Se $\rho < 1$ a série converge

Se $\rho > 1$ ou $\rho \to \infty$ a série diverge

Se $\rho = 1$ o teste é inconclusivo

Limite Importante

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$$

Limite Importante

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim n^{1/n}$$

Limite Importante

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} &= \lim n^{1/n} \\ &= \lim \exp\left(\ln n^{1/n}\right)\end{aligned}$$

Limite Importante

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} &= \lim n^{1/n} \\
&= \lim \exp\left(\ln n^{1/n} \right) \\
&= \lim \exp\left(\frac{\ln n}{n} \right)
\end{aligned}
$$

Limite Importante

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim n^{1/n}$$

$$= \lim \exp\left(\ln n^{1/n} \right)$$

$$= \lim \exp\left(\frac{\ln n}{n} \right)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$$

Limite Importante

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim n^{1/n}$$

$$= \lim \exp\left(\ln n^{1/n} \right)$$

$$= \lim \exp\left(\frac{\ln n}{n} \right)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim \frac{1/x}{1}$$

Limite Importante

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim n^{1/n}$$

$$= \lim \exp\left(\ln n^{1/n}\right)$$

$$= \lim \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim \frac{1/x}{1} = \lim \frac{1}{x}$$

Limite Importante

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} &= \lim n^{1/n} \\
&= \lim \exp\left(\ln n^{1/n}\right) \\
&= \lim \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right)
\end{aligned}
$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \;=\; \lim \frac{1/x}{1} \;=\; \lim \frac{1}{x} \;=\; 0$$

Limite Importante

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim n^{1/n}$$

$$= \lim \exp\left(\ln n^{1/n} \right)$$

$$= \lim \exp\left(\frac{\ln n}{n} \right)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim \frac{1/x}{1} = \lim \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$$

Limite Importante

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim n^{1/n}$$

$$= \lim \exp\left(\ln n^{1/n}\right)$$

$$= \lim \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim \frac{1/x}{1} = \lim \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \exp\left(\lim \frac{\ln n}{n}\right)$$

Limite Importante

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} &= \lim n^{1/n} \\
&= \lim \exp\left(\ln n^{1/n}\right) \\
&= \lim \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right)
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \;=\; \lim \frac{1/x}{1} \;=\; \lim \frac{1}{x} \;=\; 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \;=\; \exp\left(\lim \frac{\ln n}{n}\right) \;=\; e^0$$

Limite Importante

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim n^{1/n}$$

$$= \lim \exp\left(\ln n^{1/n}\right)$$

$$= \lim \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \;=\; \lim \frac{1/x}{1} \;=\; \lim \frac{1}{x} \;=\; 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \;=\; \exp\left(\lim \frac{\ln n}{n}\right) \;=\; e^0 \;=\; 1$$

Conteúdo

Exemplo 1

Use o teste da raiz para analisar a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(3n)^n}$

Exemplo 1 – Solução

$$a_n = \frac{4^n}{(3n)^n}$$

Exemplo 1 – Solução

$$a_n = \frac{4^n}{(3n)^n} = \left(\frac{4}{3n}\right)^n$$

Exemplo 1 – Solução

$$a_n = \frac{4^n}{(3n)^n} = \left(\frac{4}{3n}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{a_n}$$

Exemplo 1 – Solução

$$a_n = \frac{4^n}{(3n)^n} = \left(\frac{4}{3n}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{4}{3n}\right)^n}$$

Exemplo 1 – Solução

$$a_n = \frac{4^n}{(3n)^n} = \left(\frac{4}{3n}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{4}{3n}\right)^n} = \frac{4}{3n}$$

Exemplo 1 – Solução

$$a_n = \frac{4^n}{(3n)^n} = \left(\frac{4}{3n}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{4}{3n}\right)^n} = \frac{4}{3n}$$

$$\rho$$

Exemplo 1 – Solução

$$a_n = \frac{4^n}{(3n)^n} = \left(\frac{4}{3n}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{4}{3n}\right)^n} = \frac{4}{3n}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Exemplo 1 – Solução

$$a_n = \frac{4^n}{(3n)^n} = \left(\frac{4}{3n}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{4}{3n}\right)^n} = \frac{4}{3n}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3n}$$

Exemplo 1 – Solução

$$a_n = \frac{4^n}{(3n)^n} = \left(\frac{4}{3n}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{4}{3n}\right)^n} = \frac{4}{3n}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3n} = 0$$

Como $\rho < 1$,

Exemplo 1 – Solução

$$a_n = \frac{4^n}{(3n)^n} = \left(\frac{4}{3n}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{4}{3n}\right)^n} = \frac{4}{3n}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3n} = 0$$

Como $\rho < 1$, a série converge pelo teste da raiz

Exemplo 2

Analise a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ com $a_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2^n} & n \text{ impar} \\ \dfrac{1}{2^n} & n \text{ par} \end{cases}$

Exemplo 2 – Solução

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2^n} & n \text{ impar} \\ \\ \dfrac{1}{2^n} & n \text{ par} \end{cases}$$

Exemplo 2 – Solução

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2^n} & n \text{ impar} \\[2ex] \dfrac{1}{2^n} & n \text{ par} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[n]{n}}{2} & n \text{ impar} \\[2ex] \dfrac{1}{2} & n \text{ par} \end{cases}$$

Exemplo 2 – Solução

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2^n} & n \text{ impar} \\[2ex] \dfrac{1}{2^n} & n \text{ par} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[n]{n}}{2} & n \text{ impar} \\[2ex] \dfrac{1}{2} & n \text{ par} \end{cases}$$

Exemplo 2 – Solução

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2^n} & n \text{ impar} \\ \dfrac{1}{2^n} & n \text{ par} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$$

Sabemos que $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[n]{n}}{2} & n \text{ impar} \\ \dfrac{1}{2} & n \text{ par} \end{cases}$$

Exemplo 2 – Solução

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2^n} & n \text{ impar} \\[2ex] \dfrac{1}{2^n} & n \text{ par} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[n]{n}}{2} & n \text{ impar} \\[2ex] \dfrac{1}{2} & n \text{ par} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$$

Sabemos que $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

Pelo teorema do confronto

$$\rho = \lim \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1$$

Exemplo 2 – Solução

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2^n} & n \text{ impar} \\ \dfrac{1}{2^n} & n \text{ par} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[n]{n}}{2} & n \text{ impar} \\ \dfrac{1}{2} & n \text{ par} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$$

Sabemos que $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

Pelo teorema do confronto

$$\rho = \lim \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1$$

Portanto, pelo teste da raiz, a série é convergente

Exemplo 3

Use o teste da raiz para analisar a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n+1}}$

Exemplo 3 – Solução

Fazendo a mudança de índice $k = n + 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n+1}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^k}$$

Exemplo 3 – Solução

Fazendo a mudança de índice $k = n + 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n+1}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^k}$$

$$a_k = \frac{1}{(k-1)^k}$$

Exemplo 3 – Solução

Fazendo a mudança de índice $k = n + 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n+1}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^k}$$

$$a_k = \frac{1}{(k-1)^k}$$

$$\sqrt[k]{a_k}$$

Exemplo 3 – Solução

Fazendo a mudança de índice $k = n + 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n+1}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^k}$$

$$a_k = \frac{1}{(k-1)^k}$$

$$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{\frac{1}{(k-1)^k}}$$

Exemplo 3 – Solução

Fazendo a mudança de índice $k = n + 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n+1}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^k}$$

$$a_k = \frac{1}{(k-1)^k}$$

$$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{\frac{1}{(k-1)^k}} = \frac{1}{k-1}$$

Exemplo 3 – Solução

Fazendo a mudança de índice $k = n + 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n+1}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^k}$$

$$a_k = \frac{1}{(k-1)^k}$$

$$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{\frac{1}{(k-1)^k}} = \frac{1}{k-1}$$

$$\rho$$

Exemplo 3 – Solução

Fazendo a mudança de índice $k = n + 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n+1}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^k}$$

$$a_k = \frac{1}{(k-1)^k}$$

$$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{\frac{1}{(k-1)^k}} = \frac{1}{k-1}$$

$$\rho = \lim \sqrt[k]{a_k}$$

Exemplo 3 – Solução

Fazendo a mudança de índice $k = n + 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n+1}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^k}$$

$$a_k = \frac{1}{(k-1)^k}$$

$$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{\frac{1}{(k-1)^k}} = \frac{1}{k-1}$$

$$\rho = \lim \sqrt[k]{a_k} = \lim \frac{1}{k-1}$$

Exemplo 3 – Solução

Fazendo a mudança de índice $k = n + 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n+1}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^k}$$

$$a_k = \frac{1}{(k-1)^k}$$

$$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{\frac{1}{(k-1)^k}} = \frac{1}{k-1}$$

$$\rho = \lim \sqrt[k]{a_k} = \lim \frac{1}{k-1} = 0$$

Como $\rho < 1$,

Exemplo 3 – Solução

Fazendo a mudança de índice $k = n + 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n+1}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^k}$$

$$a_k = \frac{1}{(k-1)^k}$$

$$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{\frac{1}{(k-1)^k}} = \frac{1}{k-1}$$

$$\rho = \lim \sqrt[k]{a_k} = \lim \frac{1}{k-1} = 0$$

Como $\rho < 1$, a série converge pelo teste da raiz

Exemplo 4

Use o teste da raiz para analisar a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln\left(e^2 + \frac{1}{n} \right) \right]^{n+1}$$

Exemplo 4 – Solução

Fazendo a mudança de índice $k = n + 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln\left(e^2 + \frac{1}{n}\right)\right]^{n+1} = \sum_{k=2}^{\infty} \left[\ln\left(e^2 + \frac{1}{k-1}\right)\right]^{k}$$

Exemplo 4 – Solução

Fazendo a mudança de índice $k = n + 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \left(e^2 + \frac{1}{n} \right) \right]^{n+1} = \sum_{k=2}^{\infty} \left[\ln \left(e^2 + \frac{1}{k-1} \right) \right]^{k}$$

$$a_k = \left[\ln \left(e^2 + \frac{1}{k-1} \right) \right]^{k}$$

Exemplo 4 – Solução

Fazendo a mudança de índice $k = n + 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln\left(e^2 + \frac{1}{n}\right)\right]^{n+1} = \sum_{k=2}^{\infty} \left[\ln\left(e^2 + \frac{1}{k-1}\right)\right]^{k}$$

$$a_k = \left[\ln\left(e^2 + \frac{1}{k-1}\right)\right]^{k} \qquad \sqrt[k]{a_k} = \ln\left(e^2 + \frac{1}{k-1}\right)$$

Exemplo 4 – Solução

Fazendo a mudança de índice $k = n + 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln\left(e^2 + \frac{1}{n}\right)\right]^{n+1} = \sum_{k=2}^{\infty} \left[\ln\left(e^2 + \frac{1}{k-1}\right)\right]^{k}$$

$$a_k = \left[\ln\left(e^2 + \frac{1}{k-1}\right)\right]^{k} \qquad \sqrt[k]{a_k} = \ln\left(e^2 + \frac{1}{k-1}\right)$$

Aplicando o Teste da Raiz

$$\rho = \lim \sqrt[k]{a_k}$$

Exemplo 4 – Solução

Fazendo a mudança de índice $k = n + 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln\left(e^2 + \frac{1}{n}\right)\right]^{n+1} = \sum_{k=2}^{\infty} \left[\ln\left(e^2 + \frac{1}{k-1}\right)\right]^{k}$$

$$a_k = \left[\ln\left(e^2 + \frac{1}{k-1}\right)\right]^{k} \qquad \sqrt[k]{a_k} = \ln\left(e^2 + \frac{1}{k-1}\right)$$

Aplicando o Teste da Raiz

$$\rho = \lim \sqrt[k]{a_k} = \lim \ln\left(e^2 + \frac{1}{k-1}\right)$$

Exemplo 4 – Solução

Fazendo a mudança de índice $k = n + 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln\left(e^2 + \frac{1}{n}\right)\right]^{n+1} = \sum_{k=2}^{\infty} \left[\ln\left(e^2 + \frac{1}{k-1}\right)\right]^{k}$$

$$a_k = \left[\ln\left(e^2 + \frac{1}{k-1}\right)\right]^{k} \qquad \sqrt[k]{a_k} = \ln\left(e^2 + \frac{1}{k-1}\right)$$

Aplicando o Teste da Raiz

$$\rho = \lim \sqrt[k]{a_k} = \lim \ln\left(e^2 + \frac{1}{k-1}\right) = \ln\left(e^2 + \lim \frac{1}{k-1}\right)$$

Exemplo 4 – Solução

Fazendo a mudança de índice $k = n + 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln\left(e^2 + \frac{1}{n}\right)\right]^{n+1} = \sum_{k=2}^{\infty} \left[\ln\left(e^2 + \frac{1}{k-1}\right)\right]^{k}$$

$$a_k = \left[\ln\left(e^2 + \frac{1}{k-1}\right)\right]^{k} \qquad \sqrt[k]{a_k} = \ln\left(e^2 + \frac{1}{k-1}\right)$$

Aplicando o Teste da Raiz

$$\rho = \lim \sqrt[k]{a_k} = \lim \ln\left(e^2 + \frac{1}{k-1}\right) = \ln\left(e^2 + \lim \frac{1}{k-1}\right) = \ln\left(e^2\right)$$

Exemplo 4 – Solução

Fazendo a mudança de índice $k = n + 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln\left(e^2 + \frac{1}{n}\right)\right]^{n+1} = \sum_{k=2}^{\infty} \left[\ln\left(e^2 + \frac{1}{k-1}\right)\right]^{k}$$

$$a_k = \left[\ln\left(e^2 + \frac{1}{k-1}\right)\right]^{k} \qquad \sqrt[k]{a_k} = \ln\left(e^2 + \frac{1}{k-1}\right)$$

Aplicando o Teste da Raiz

$$\rho = \lim \sqrt[k]{a_k} = \lim \ln\left(e^2 + \frac{1}{k-1}\right) = \ln\left(e^2 + \lim \frac{1}{k-1}\right) = \ln\left(e^2\right) = 2$$

Como $\rho > 1$,

Exemplo 4 – Solução

Fazendo a mudança de índice $k = n + 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \left(e^2 + \frac{1}{n} \right) \right]^{n+1} = \sum_{k=2}^{\infty} \left[\ln \left(e^2 + \frac{1}{k-1} \right) \right]^{k}$$

$$a_k = \left[\ln \left(e^2 + \frac{1}{k-1} \right) \right]^{k} \qquad \sqrt[k]{a_k} = \ln \left(e^2 + \frac{1}{k-1} \right)$$

Aplicando o Teste da Raiz

$$\rho = \lim \sqrt[k]{a_k} = \lim \ln \left(e^2 + \frac{1}{k-1} \right) = \ln \left(e^2 + \lim \frac{1}{k-1} \right) = \ln \left(e^2 \right) = 2$$

Como $\rho > 1$, a série diverge pelo teste da raiz

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar as Seção 6.7 da Apostila

Exercícios: 1a-f

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações