Séries Numéricas – Teste da Série Alternada

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

9 de junho de 2026

https://material-didatico.github.io/pages/is

Conteúdo

Séries Alternadas

Os termos trocam de sinal

Séries Alternadas

Os termos trocam de sinal alternando entre um positivo e um negativo

Séries Alternadas

Os termos trocam de sinal alternando entre um positivo e um negativo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

com $a_n > 0$ para todo n

Série Harmônica Alternada

Exemplo, Série Harmônica Alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Teste da Série Alternada – Teste de Leibniz

Seja a_n tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

Teste da Série Alternada – Teste de Leibniz

Seja a_n tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

1. $a_n > 0$ $\quad$ a_n são os módulos dos termos da série

Teste da Série Alternada – Teste de Leibniz

Seja a_n tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

1. $a_n > 0$ — a_n são os módulos dos termos da série
2. $a_n \geq a_{n+1}$ — os termos são decrescentes em módulo

Teste da Série Alternada – Teste de Leibniz

Seja a_n tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

1. $a_n > 0$ — a_n são os módulos dos termos da série
2. $a_n \geq a_{n+1}$ — os termos são decrescentes em módulo
3. $a_n \to 0$ — os termos tendem a zero

Teste da Série Alternada – Teste de Leibniz

Seja a_n tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

1. $a_n > 0$ — a_n são os módulos dos termos da série
2. $a_n \geq a_{n+1}$ — os termos são decrescentes em módulo
3. $a_n \to 0$ — os termos tendem a zero

Então, a série alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ converge

Exemplo 1

Vamos analisar a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{n-1}}$$

Exemplo 1

Vamos analisar a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n-1}}$$

Percebemos que

- a série é alternada

Exemplo 1

Vamos analisar a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{n-1}}$$

Percebemos que

- a série é alternada
- o módulo do termo geral é $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$

Exemplo 1

Vamos analisar a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n-1}}$$

Percebemos que

- a série é alternada
- o módulo do termo geral é $\quad a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$
- $a_n \geq a_{n+1}$

Exemplo 1

Vamos analisar a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n-1}}$$

Percebemos que

- a série é alternada
- o módulo do termo geral é $\quad a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$
- $a_n \geq a_{n+1}$
- $a_n \to 0$

Exemplo 1

Vamos analisar a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n-1}}$$

Percebemos que

- a série é alternada
- o módulo do termo geral é $\quad a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$
- $a_n \geq a_{n+1}$
- $a_n \to 0$

Portanto a série converge pelo Teste da Série Alternada

Exemplo 1

Por outro lado

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{n-1}}$$

Exemplo 1

Por outro lado

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^2(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$$

Exemplo 1

Por outro lado

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^2(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Exemplo 1

Por outro lado

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^2(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Série geométrica com $a = 1$ e $r = -\dfrac{1}{2}$

Exemplo 1

Por outro lado

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^2(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Série geométrica com $a = 1$ e $r = -\dfrac{1}{2}$

Como $|r| < 1$ ela converge

Exemplo 1

Por outro lado

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^2(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Série geométrica com $a = 1$ e $r = -\dfrac{1}{2}$

Como $|r| < 1$ ela converge

sua soma é $S = \dfrac{a}{1-r}$

Exemplo 1

Por outro lado

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^2(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Série geométrica com $a = 1$ e $r = -\dfrac{1}{2}$

Como $|r| < 1$ ela converge

sua soma é $S = \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{1}{1+{}^{1}\!/_{2}} = \dfrac{2}{3}$

Conteúdo

Estimativa do Erro

Dada uma série que satisfaz as condições do teste da série alternada

Estimativa do Erro

Dada uma série que satisfaz as condições do teste da série alternada

$$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n$$

converge para a soma da série S

Estimativa do Erro

Dada uma série que satisfaz as condições do teste da série alternada

$$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n$$

converge para a soma da série S

- $|R_n| < a_{n+1}$

Estimativa do Erro

Dada uma série que satisfaz as condições do teste da série alternada

$$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n$$

converge para a soma da série S

- $|R_n| < a_{n+1}$
- S está entre S_n e S_{n+1}

Estimativa do Erro

Dada uma série que satisfaz as condições do teste da série alternada

$$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n$$

converge para a soma da série S

- $|R_n| < a_{n+1}$
- S está entre S_n e S_{n+1}
- $R_n = S - S_n$ tem o mesmo sinal do primeiro termo não utilizado

Conteúdo

Exemplo 2

Use o Teste de Leibniz para mostrar que a série a seguir converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Exemplo 2 – Condição 1: $a_n > 0$

Exemplo 2 – Condição 1: $a_n > 0$

Como $1 + \dfrac{1}{n} > 1$ para todo $n \geq 1$

Exemplo 2 – Condição 1: $a_n > 0$

Como $1 + \dfrac{1}{n} > 1$ para todo $n \geq 1$

Podemos escolher

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

que garante $a_n > 0$

Exemplo 2 – Condição 2: $a_n \geq a_{n+1}$

Exemplo 2 – Condição 2: $a_n \geq a_{n+1}$

Considerando a função

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Exemplo 2 – Condição 2: $a_n \geq a_{n+1}$

Considerando a função

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln\left(1 + x^{-1}\right)$$

Exemplo 2 – Condição 2: $a_n \geq a_{n+1}$

Considerando a função

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln\left(1 + x^{-1}\right)$$

temos

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^{-1}}\left(-x^{-2}\right)$$

Exemplo 2 – Condição 2: $a_n \geq a_{n+1}$

Considerando a função

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln\left(1 + x^{-1}\right)$$

temos

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^{-1}}\left(-x^{-2}\right) = \frac{-1}{\left(1 + x^{-1}\right)x^2}$$

Exemplo 2 – Condição 2: $a_n \geq a_{n+1}$

Considerando a função

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln\left(1 + x^{-1}\right)$$

temos

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^{-1}}\left(-x^{-2}\right) = \frac{-1}{\left(1 + x^{-1}\right)x^2} = \frac{-1}{x^2 + x}$$

Exemplo 2 – Condição 2: $a_n \geq a_{n+1}$

Considerando a função

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln\left(1 + x^{-1}\right)$$

temos

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^{-1}}\left(-x^{-2}\right) = \frac{-1}{\left(1 + x^{-1}\right)x^2} = \frac{-1}{x^2 + x} < 0 \qquad \forall x \geq 1$$

Exemplo 2 – Condição 2: $a_n \geq a_{n+1}$

Considerando a função

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln\left(1 + x^{-1}\right)$$

temos

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^{-1}} \left(-x^{-2}\right) = \frac{-1}{\left(1 + x^{-1}\right) x^2} = \frac{-1}{x^2 + x} < 0 \qquad \forall x \geq 1$$

Portanto a_n é decrescente $a_n > a_{n+1}$

Exemplo 2 – Condição 3: $a_n \to 0$

Exemplo 2 – Condição 3: $a_n \to 0$

Observando que

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

Exemplo 2 – Condição 3: $a_n \to 0$

Observando que

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

e a função $\ln(x)$ é contínua em 1

Exemplo 2 – Condição 3: $a_n \to 0$

Observando que

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

e a função $\ln(x)$ é contínua em 1

$$\lim a_n = \lim \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Exemplo 2 – Condição 3: $a_n \to 0$

Observando que

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

e a função $\ln(x)$ é contínua em 1

$$\lim a_n = \lim \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Exemplo 2 – Condição 3: $a_n \to 0$

Observando que

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

e a função $\ln(x)$ é contínua em 1

$$\lim a_n = \lim \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 1$$

Exemplo 2 – Condição 3: $a_n \to 0$

Observando que

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

e a função $\ln(x)$ é contínua em 1

$$\lim a_n = \lim \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0$$

Exemplo 2 – Condição 3: $a_n \to 0$

Observando que

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

e a função $\ln(x)$ é contínua em 1

$$\lim a_n = \lim \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0$$

O Teste de Leibniz garante que a série converge

Exemplo 3

Use o Teste de Leibniz para mostrar que a série a seguir converge

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{(\ln n)^2}$$

Exemplo 3 – Condição 1: $a_n > 0$

Exemplo 3 – Condição 1: $a_n > 0$

Vemos que $a_n = \dfrac{4}{(\ln n)^2} > 0$ para todo $n \geq 2$

Exemplo 3 – Condição 2: $a_n \geq a_{n+1}$

Exemplo 3 – Condição 2: $a_n \geq a_{n+1}$

Como $\ln n$ é crescente

Exemplo 3 – Condição 2: $a_n \geq a_{n+1}$

Como $\ln n$ é crescente,

$$a_n = \frac{4}{(\ln n)^2}$$

é decrescente

Exemplo 3 – Condição 3: $a_n \to 0$

Exemplo 3 – Condição 3: $a_n \to 0$

$a_n \to 0$, pois

$$(\ln n)^2 \to \infty$$

Exemplo 3 – Condição 3: $a_n \to 0$

$a_n \to 0$, pois

$$(\ln n)^2 \to \infty$$

O teste de Leibniz garante que a série converge

Exemplo 4

Use o teste de Leibniz para mostrar que a série a seguir converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{10^n}{(n+1)!}$$

Exemplo 4 – Condição 1: $a_n > 0$

Exemplo 4 – Condição 1: $a_n > 0$

$$a_n = \frac{10^n}{(n+1)!} \text{ é positivo para } n \geq 1$$

Exemplo 4 – Condição 2: $a_n \geq a_{n+1}$

$n \geq 8$

Exemplo 4 – Condição 2: $a_n \geq a_{n+1}$

$$n \geq 8$$

$$n + 2 \geq 10$$

Exemplo 4 – Condição 2: $a_n \geq a_{n+1}$

$$n \geq 8$$

$$n + 2 \geq 10$$

$$1 \geq \frac{10}{n+2}$$

Exemplo 4 – Condição 2: $a_n \geq a_{n+1}$

$$a_{n+1} = \frac{10^{n+1}}{(n+2)!}$$

$$n \geq 8$$

$$n + 2 \geq 10$$

$$1 \geq \frac{10}{n+2}$$

Exemplo 4 – Condição 2: $a_n \geq a_{n+1}$

$$n \geq 8$$

$$n + 2 \geq 10$$

$$1 \geq \frac{10}{n+2}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{10^{n+1}}{(n+2)!} \\ &= \frac{10}{(n+2)} \frac{10^n}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Exemplo 4 – Condição 2: $a_n \geq a_{n+1}$

$$n \geq 8$$

$$n + 2 \geq 10$$

$$1 \geq \frac{10}{n+2}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{10^{n+1}}{(n+2)!} \\ &= \frac{10}{(n+2)} \frac{10^n}{(n+1)!} \\ &\leq \frac{10^n}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Exemplo 4 – Condição 2: $a_n \geq a_{n+1}$

$$
\begin{aligned}
n &\geq 8 \\
n + 2 &\geq 10 \\
1 &\geq \frac{10}{n+2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{10^{n+1}}{(n+2)!} \\
&= \frac{10}{(n+2)} \frac{10^n}{(n+1)!} \\
&\leq \frac{10^n}{(n+1)!} \\
&= a_n
\end{aligned}
$$

Exemplo 4 – Condição 2: $a_n \geq a_{n+1}$

$$
\begin{aligned}
n &\geq 8 \\
n + 2 &\geq 10 \\
1 &\geq \frac{10}{n+2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{10^{n+1}}{(n+2)!} \\
&= \frac{10}{(n+2)} \frac{10^n}{(n+1)!} \\
&\leq \frac{10^n}{(n+1)!} \\
&= a_n
\end{aligned}
$$

Portanto, a_n é decrescente para $n \geq 8$

Exemplo 4 – Condição 3: $a_n \to 0$

Exemplo 4 – Condição 3: $a_n \to 0$

Para $n > 10$

Exemplo 4 – Condição 3: $a_n \to 0$

Para $n > 10$

$$(n+1)! = 1 \times 2 \times \cdots \times 9 \times 10 \times 11 \times \cdots \times n \times (n+1)$$

Exemplo 4 – Condição 3: $a_n \to 0$

Para $n > 10$

$$\begin{aligned}(n+1)! &= 1 \times 2 \times \cdots \times 9 \times 10 \times 11 \times \cdots \times n \times (n+1) \\ &\geq 10!\, 10^{n-10}\,(n+1)\end{aligned}$$

Exemplo 4 – Condição 3: $a_n \to 0$

Para $n > 10$

$$
\begin{aligned}
(n+1)! &= 1 \times 2 \times \cdots \times 9 \times 10 \times 11 \times \cdots \times n \times (n+1) \\
&\geq 10!\, 10^{n-10}\,(n+1)
\end{aligned}
$$

Dessa forma

$$
\frac{10^n}{(n+1)!} \leq \frac{10^n}{10!\, 10^{n-10}\,(n+1)}
$$

Exemplo 4 – Condição 3: $a_n \to 0$

Para $n > 10$

$$(n+1)! = 1 \times 2 \times \cdots \times 9 \times 10 \times 11 \times \cdots \times n \times (n+1)$$

$$\geq 10!\ 10^{n-10}\,(n+1)$$

Dessa forma

$$\frac{10^n}{(n+1)!} \leq \frac{10^n}{10!\ 10^{n-10}\,(n+1)} = \frac{10^{10}}{10!}\,\frac{1}{(n+1)}$$

Exemplo 4 – Condição 3: $a_n \to 0$

Para $n > 10$

$$
\begin{aligned}
(n+1)! &= 1 \times 2 \times \cdots \times 9 \times 10 \times 11 \times \cdots \times n \times (n+1) \\
&\geq 10!\; 10^{n-10}\,(n+1)
\end{aligned}
$$

Dessa forma

$$
\frac{10^n}{(n+1)!} \leq \frac{10^n}{10!\; 10^{n-10}\,(n+1)} = \frac{10^{10}}{10!}\,\frac{1}{(n+1)} \to 0
$$

Exemplo 4 – Condição 3: $a_n \to 0$

Para $n > 10$

$$
\begin{aligned}
(n+1)! &= 1 \times 2 \times \cdots \times 9 \times 10 \times 11 \times \cdots \times n \times (n+1) \\
&\geq 10!\, 10^{n-10}\, (n+1)
\end{aligned}
$$

Dessa forma

$$\frac{10^n}{(n+1)!} \leq \frac{10^n}{10!\, 10^{n-10}\, (n+1)} = \frac{10^{10}}{10!} \frac{1}{(n+1)} \to 0$$

Como $0 < \dfrac{10^n}{(n+1)!} \leq \dfrac{10^{10}}{10!} \dfrac{1}{(n+1)}$

Exemplo 4 – Condição 3: $a_n \to 0$

Para $n > 10$

$$\begin{aligned}(n+1)! &= 1 \times 2 \times \cdots \times 9 \times 10 \times 11 \times \cdots \times n \times (n+1) \\ &\geq 10!\ 10^{n-10}\,(n+1)\end{aligned}$$

Dessa forma

$$\frac{10^n}{(n+1)!} \leq \frac{10^n}{10!\ 10^{n-10}\,(n+1)} = \frac{10^{10}}{10!}\ \frac{1}{(n+1)} \to 0$$

Como $0 < \dfrac{10^n}{(n+1)!} \leq \dfrac{10^{10}}{10!}\ \dfrac{1}{(n+1)}$

o Teorema do Confronto garante que $a_n \to 0$

Exemplo 4

O teste de Leibniz garante que a série converge

Exemplo 5

Estime o erro cometido quando aproximamos o valor da soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

pela soma dos seus quatro primeiros termos

Exemplo 5

A série converge pelo teste da série alternada, portanto

$$|R_n| < a_{n+1}$$

Exemplo 5

A série converge pelo teste da série alternada, portanto

$$|R_n| < a_{n+1}$$

Como somamos quatro quatro termos (S_4), temos que

$$|R_4| < a_5$$

Exemplo 5

A série converge pelo teste da série alternada, portanto

$$|R_n| < a_{n+1}$$

Como somamos quatro quatro termos (S_4), temos que

$$|R_4| < a_5 = \frac{1}{5}$$

Exemplo 6

Determine quantos termos devem ser somados para aproximar a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+3}$$

com erro menor do que 0,0001

Exemplo 6

A série converge pelo teste da série alternada, portanto

$$|R_n| < a_{n+1}$$

Exemplo 6

A série converge pelo teste da série alternada, portanto

$$|R_n| < a_{n+1}$$

Para garantir que o erro é menor do que 0,001 devemos impor que

$$a_{n+1} < 10^{-4}$$

Exemplo 6

A série converge pelo teste da série alternada, portanto

$$|R_n| < a_{n+1}$$

Para garantir que o erro é menor do que 0,001 devemos impor que

$$a_{n+1} < 10^{-4}$$

$$\frac{1}{n^2+3} < 10^{-4}$$

Exemplo 6

A série converge pelo teste da série alternada, portanto

$$|R_n| < a_{n+1}$$

Para garantir que o erro é menor do que 0,001 devemos impor que

$$a_{n+1} < 10^{-4}$$

$$\frac{1}{n^2+3} < 10^{-4}$$

$$\frac{1}{10^{-4}} < n^2 + 3$$

Exemplo 6

A série converge pelo teste da série alternada, portanto

$$|R_n| < a_{n+1}$$

Para garantir que o erro é menor do que 0,001 devemos impor que

$$a_{n+1} < 10^{-4}$$

$$\frac{1}{n^2+3} < 10^{-4}$$

$$\frac{1}{10^{-4}} < n^2 + 3$$

$$n^2 > 10^4 - 3$$

Exemplo 6

A série converge pelo teste da série alternada, portanto

$$|R_n| < a_{n+1}$$

Para garantir que o erro é menor do que 0,001 devemos impor que

$$a_{n+1} < 10^{-4}$$

$$\frac{1}{n^2+3} < 10^{-4}$$

$$\frac{1}{10^{-4}} < n^2 + 3$$

$$n^2 > 10^4 - 3$$

$$n^2 > 10^4$$

Exemplo 6

A série converge pelo teste da série alternada, portanto

$$|R_n| < a_{n+1}$$

Para garantir que o erro é menor do que 0,001 devemos impor que

$$a_{n+1} < 10^{-4}$$

$$\frac{1}{n^2+3} < 10^{-4}$$

$$\frac{1}{10^{-4}} < n^2 + 3$$

$$n^2 > 10^4 - 3$$

$$n^2 > 10^4$$

$$n > 10^2$$

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar a Seção ? da Apostila

Exercícios:

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações