Séries de Potências – Definição

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries

Conteúdo

Séries de Potências

Uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$$

Séries de Potências

Uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

Séries de Potências

Uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

onde c_n e a são constantes e $x \in \mathbb{R}$ é uma variável

Séries de Potências

Uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \;=\; c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

onde c_n e a são constantes e $x \in \mathbb{R}$ é uma variável

é chamada de Série de Potências

Séries de Potências

Uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \;=\; c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

onde c_n e a são constantes e $x \in \mathbb{R}$ é uma variável

é chamada de Série de Potências centrada em a

Séries de Potências

Uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

onde c_n e a são constantes e $x \in \mathbb{R}$ é uma variável

é chamada de Série de Potências centrada em a

Note que o índice começa em zero

Atenção

Séries de Potência e Séries de Taylor não são a mesma coisa

Somas Parciais

As Somas Parciais de uma Série de Potências são Polinômios

Somas Parciais

As Somas Parciais de uma Série de Potências são Polinômios

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k$$

Somas Parciais

As Somas Parciais de uma Série de Potências são Polinômios

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k \\ &= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n \end{aligned}$$

Conteúdo

Exemplo 1

Determine a soma da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Exemplo 1

Determine a soma da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Essa é uma Série de Potências com $a = 0$ e $c_n = 1$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

Exemplo 1

Fixando x, temos uma Série Geométrica

Exemplo 1

Fixando x, temos uma Série Geométrica com

$$\alpha = 1 \qquad r = x$$

Exemplo 1

Fixando x, temos uma Série Geométrica com

$$\alpha = 1 \qquad r = x$$

converge quando $|r| = |x| < 1$

Exemplo 1

Fixando x, temos uma Série Geométrica com

$$\alpha = 1 \qquad r = x$$

converge quando $|r| = |x| < 1$

Assim no intervalo aberto $(-1, 1)$ temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{\alpha}{1 - r}$$

Exemplo 1

Fixando x, temos uma Série Geométrica com

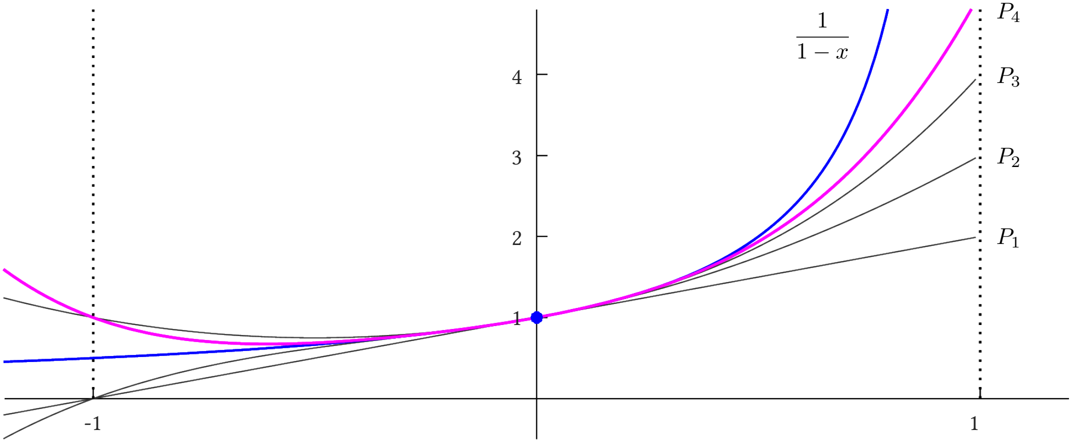
$$\alpha = 1 \qquad r = x$$

converge quando $|r| = |x| < 1$

Assim no intervalo aberto $(-1, 1)$ temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{\alpha}{1-r} = \frac{1}{1-x}$$

Exemplo 1



Exemplo 2

Calcule a soma da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n (x - a)^n$$

a e $\beta \neq 0$ números reais

Exemplo 2

Calcule a soma da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n (x-a)^n$$

a e $\beta \neq 0$ números reais

Série de Potências centrada em a com coeficientes $c_n = \beta^n$

Exemplo 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n (x-a)^n$$

Exemplo 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\beta(x-a)\Big)^n$$

Exemplo 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\beta(x-a)\right)^n$$

Para cada x fixo, é uma Série Geométrica com $\alpha = 1$ e $r = \beta(x-a)$

Exemplo 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n (x-a)^n \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\beta(x-a)\Big)^n$$

Para cada x fixo, é uma Série Geométrica com $\alpha = 1$ e $r = \beta(x-a)$

Converge quando $|r| < 1$

Exemplo 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n (x-a)^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\beta(x-a)\Big)^n$$

Para cada x fixo, é uma Série Geométrica com $\alpha = 1$ e $r = \beta(x-a)$

Converge quando $|r| < 1$

$$|\beta(x-a)| \;<\; 1$$

Exemplo 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n (x-a)^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \big(\beta(x-a)\big)^n$$

Para cada x fixo, é uma Série Geométrica com $\alpha = 1$ e $r = \beta(x-a)$

Converge quando $|r| < 1$

$$|\beta(x-a)| \;<\; 1$$

$$|(x-a)| \;<\; \frac{1}{|\beta|}$$

Exemplo 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \big(\beta(x-a)\big)^n$$

Para cada x fixo, é uma Série Geométrica com $\alpha = 1$ e $r = \beta(x-a)$

Converge quando $|r| < 1$

$$|\beta(x-a)| < 1$$

$$|(x-a)| < \frac{1}{|\beta|}$$

$$-\frac{1}{|\beta|} < x - a < \frac{1}{|\beta|}$$

Exemplo 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n (x-a)^n \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\beta(x-a)\Big)^n$$

Para cada x fixo, é uma Série Geométrica com $\alpha = 1$ e $r = \beta(x-a)$

Converge quando $|r| < 1$

$$|\beta(x-a)| \; < \; 1 \qquad\qquad -\frac{1}{|\beta|} < x - a \; < \; \frac{1}{|\beta|}$$

$$|(x-a)| \; < \; \frac{1}{|\beta|} \qquad\qquad a - \frac{1}{|\beta|} < x \; < \; a + \frac{1}{|\beta|}$$

Exemplo 2

A série converge no intervalo

$$I = \left(a - \frac{1}{|\beta|} \, , a + \frac{1}{|\beta|} \right)$$

Exemplo 2

A série converge no intervalo

$$I = \left(a - \frac{1}{|\beta|} \, , a + \frac{1}{|\beta|} \right)$$

Sua soma é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n (x-a)^n \; = \; \frac{\alpha}{1-r}$$

Exemplo 2

A série converge no intervalo

$$I = \left(a - \frac{1}{|\beta|} \, , a + \frac{1}{|\beta|} \right)$$

Sua soma é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n (x-a)^n \; = \; \frac{\alpha}{1-r} \; = \; \frac{1}{1-\beta(x-a)}$$

Exemplo 3

Calcule a soma da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-2}{2} \right)^n$$

Exemplo 3

Calcule a soma da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (x-1)^n$$

Exemplo 3

Calcule a soma da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-2}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (x-1)^n$$

Série de Potências com $a = 1$ e $c_n = \dfrac{1}{2^n}$

Exemplo 3

Calcule a soma da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (x-1)^n$$

Série de Potências com $a = 1$ e $c_n = \dfrac{1}{2^n}$

Caso particular do exemplo anterior com $\beta = \dfrac{1}{2}$ e $a = 1$

Exemplo 3

Calcule a soma da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (x-1)^n$$

Série de Potências com $a = 1$ e $c_n = \dfrac{1}{2^n}$

Caso particular do exemplo anterior com $\beta = \dfrac{1}{2}$ e $a = 1$

Série Geométrica com $\alpha = 1$ e $r = \dfrac{x-2}{2}$

Exemplo 3

Série Geométrica com $\alpha = 1$ e $r = \dfrac{x-2}{2}$

Exemplo 3

Série Geométrica com $\alpha = 1$ e $r = \dfrac{x-2}{2}$

$$|r| < 1$$

Exemplo 3

Série Geométrica com $\alpha = 1$ e $r = \dfrac{x-2}{2}$

$$|r| < 1$$

$$\left|\frac{x-2}{2}\right| < 1$$

Exemplo 3

Série Geométrica com $\alpha = 1$ e $r = \dfrac{x-2}{2}$

$$|r| < 1$$

$$\left|\frac{x-2}{2}\right| < 1$$

$$-1 < \frac{x-2}{2} < 1$$

Exemplo 3

Série Geométrica com $\alpha = 1$ e $r = \dfrac{x-2}{2}$

$$|r| < 1$$

$$\left|\frac{x-2}{2}\right| < 1$$

$$-1 < \frac{x-2}{2} < 1$$

$$-2 < x-2 < 2$$

Exemplo 3

Série Geométrica com $\alpha = 1$ e $r = \dfrac{x-2}{2}$

$$|r| < 1$$

$$\left|\frac{x-2}{2}\right| < 1$$

$$-1 < \frac{x-2}{2} < 1$$

$$-2 < x - 2 < 2$$

$$0 < x < 4$$

Exemplo 3

Série Geométrica com $\alpha = 1$ e $r = \dfrac{x-2}{2}$

$$|r| < 1$$

$$\left|\frac{x-2}{2}\right| < 1$$

$$-1 < \frac{x-2}{2} < 1$$

$$-2 < x - 2 < 2$$

$$0 < x < 4$$

A série converge no intervalo $(0, 4)$

Exemplo 3

Para $x \in (0, 4)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-2}{2} \right)^n$$

Exemplo 3

Para $x \in (0, 4)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-2}{2}\right)^n = \frac{\alpha}{1-r}$$

Exemplo 3

Para $x \in (0,4)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-2}{2}\right)^n = \frac{\alpha}{1-r} = \frac{1}{1-\dfrac{x-2}{2}}$$

Exemplo 3

Para $x \in (0,4)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-2}{2}\right)^n = \frac{\alpha}{1-r} = \frac{1}{1-\dfrac{x-2}{2}} = \frac{2}{2-(x-2)}$$

Exemplo 3

Para $x \in (0,4)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n = \frac{\alpha}{1-r} = \frac{1}{1-\dfrac{x-2}{2}} = \frac{2}{2-(x-2)} = \frac{2}{4-x}$$

Conteúdo

Lista Mínima

Estudar a Seção 7.1 da Apostila

Revisar Séries Geométricas, Seção 6.1 da Apostila

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações