

Usos da Séries de Taylor – Identidade de Euler

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries



Identidade de Euler

Identidade de Euler

Com os devidos cuidados todos os resultados sobre sequências e séries valem para os **números complexos**

$$z = a + bi \quad \text{onde} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad i = \sqrt{-1}$$

Identidade de Euler

Com os devidos cuidados todos os resultados sobre sequências e séries valem para os **números complexos**

$$z = a + bi \quad \text{onde} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1 \quad i^3 = -i \quad i^4 = 1 \quad i^5 = i \quad \dots$$

Identidade de Euler

Definições Formais para $z \in \mathbb{C}$

Identidade de Euler

Definições Formais para $z \in \mathbb{C}$

$$\text{sen}(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

Identidade de Euler

Definições Formais para $z \in \mathbb{C}$

$$\text{sen}(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

$$\text{cos}(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

Identidade de Euler

Definições Formais para $z \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{sen}(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

$$\operatorname{cos}(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

Identidade de Euler

Escolhendo $z = i\theta$

$$e^{i\theta}$$

Identidade de Euler

Escolhendo $z = i\theta$

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \dots$$

Identidade de Euler

Escolhendo $z = i\theta$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \dots \\ &= 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

Identidade de Euler

Escolhendo $z = i\theta$

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \dots$$

$$= 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \dots$$

$$= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots$$

Identidade de Euler

Escolhendo $z = i\theta$

$$\begin{aligned}e^{i\theta} &= 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \dots \\&= 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \dots \\&= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \\&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right)\end{aligned}$$

Identidade de Euler

Escolhendo $z = i\theta$

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \dots$$

$$= 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \dots$$

$$= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right)$$

$$= \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$$

Identidade de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$$

Identidade de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$$

“Todas as Constantes da Matemática”

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1 + i0 = -1$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Identidade de Euler