

Usos da Séries de Taylor – Arco Tangente

Luis Alberto D'Afonseca

Integração e Séries



<https://material-didatico.github.io/pages/is>

Cálculo da Série de Taylor para o Arco Tangente

Arco Tangente

Calcular a Série de Taylor de

$$\operatorname{arctg}(x)$$

Arco Tangente

Calcular a Série de Taylor de

$$\operatorname{arctg}(x)$$

Sabemos que

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg}(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Arco Tangente

Calculando as derivadas

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg}(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Arco Tangente

Calculando as derivadas

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg}(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \operatorname{arctg}(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

Arco Tangente

Calculando as derivadas

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg}(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \operatorname{arctg}(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{d^3}{dx^3} \operatorname{arctg}(x) = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$$

Arco Tangente

Calculando as derivadas

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg}(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \operatorname{arctg}(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{d^3}{dx^3} \operatorname{arctg}(x) = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$$

$$\frac{d^4}{dx^4} \operatorname{arctg}(x) = -\frac{24x(x^2 - 1)}{(1+x^2)^4}$$

Arco Tangente

Calculando as derivadas

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg}(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \operatorname{arctg}(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{d^3}{dx^3} \operatorname{arctg}(x) = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$$

$$\frac{d^4}{dx^4} \operatorname{arctg}(x) = -\frac{24x(x^2 - 1)}{(1+x^2)^4}$$

Não é um bom método!

Arco Tangente

Cálculos formais (sem rigor)

Arco Tangente

Cálculos formais (sem rigor)

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg}(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Arco Tangente

Cálculos formais (sem rigor)

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg}(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Soma de uma série geométrica com $a = 1$ e $r = -x^2$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg}(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{1-r} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

Arco Tangente

Cálculos formais (sem rigor)

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg}(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Soma de uma série geométrica com $a = 1$ e $r = -x^2$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg}(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{1-r} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

Integrando os dois lados

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$$

Como sabemos se os limites convergem?

Demonstrando a Série de Taylor do Arco Tangente

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^n t^{2n} + (-1)^{n+1} t^{2(n+1)} + \dots$$

Demonstrando a Série de Taylor do Arco Tangente

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^n t^{2n} + (-1)^{n+1} t^{2(n+1)} + \dots$$

Usando a fórmula da soma da Série Geométrica a partir de $n + 1$

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2(n+1)}}{1+t^2}$$

Demonstrando a Série de Taylor do Arco Tangente

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^n t^{2n} + (-1)^{n+1} t^{2(n+1)} + \dots$$

Usando a fórmula da soma da Série Geométrica a partir de $n + 1$

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2(n+1)}}{1+t^2}$$

Agora temos um número finito de termos

Integrando a Soma Finita

Escrevendo a derivada como uma soma finita

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} x = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)}}{1 + x^2}$$

Integrando a Soma Finita

Escrevendo a derivada como uma soma finita

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} x = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)}}{1 + x^2}$$

Integrando

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2(n+1)}}{1+t^2} dt$$

A Série de Taylor Converge se o Erro Tende a Zero

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2(n+1)}}{1+t^2} dt$$

A Série de Taylor Converge se o Erro Tende a Zero

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2(n+1)}}{1+t^2} dt$$

como $1+t^2 \geq 1$

$$|R_n(x)| \leq \int_0^{|x|} t^{2(n+1)} dt$$

A Série de Taylor Converge se o Erro Tende a Zero

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2(n+1)}}{1+t^2} dt$$

como $1+t^2 \geq 1$

$$|R_n(x)| \leq \int_0^{|x|} t^{2(n+1)} dt = \frac{t^{2n+3}}{2n+3} \Big|_0^{|x|}$$

A Série de Taylor Converge se o Erro Tende a Zero

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2(n+1)}}{1+t^2} dt$$

como $1+t^2 \geq 1$

$$|R_n(x)| \leq \int_0^{|x|} t^{2(n+1)} dt = \frac{t^{2n+3}}{2n+3} \Big|_0^{|x|} = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

A Série de Taylor Converge se o Erro Tende a Zero

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2(n+1)}}{1+t^2} dt$$

como $1+t^2 \geq 1$

$$|R_n(x)| \leq \int_0^{|x|} t^{2(n+1)} dt = \frac{t^{2n+3}}{2n+3} \Big|_0^{|x|} = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

Portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad \text{quando} \quad |x| \leq 1$$

Série de Taylor do Arco Tangente

Para todo $x \in [-1, 1]$ temos

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$$

Cálculo da Série de Taylor para o Arco Tangente