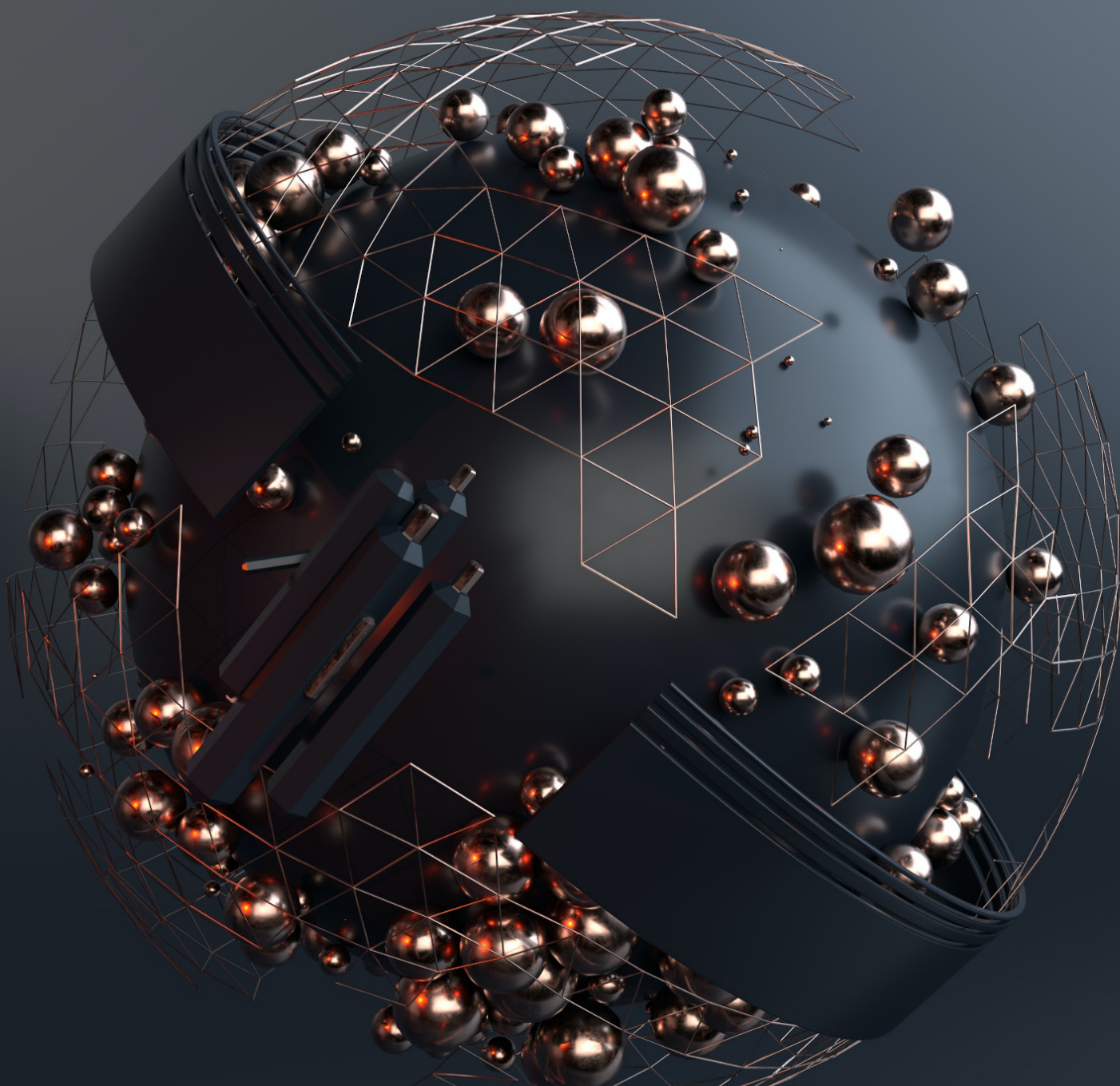




MATEMÁTICA BÁSICA

Camila F. de Souza
Jeanne C. Amaral
Jônathas D. S. Oliveira
Luis A. D'Afonseca

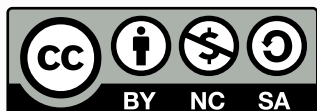
Matemática Básica

Camila F. de Souza
Jeanne C. Amaral
Jônathas D. S. Oliveira
Luis A. D'Afonseca

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – [CEFET-MG](#)
2 de março de 2026

Esta apostila é ...

Arte da capa: [Imagem](#) de [Javier Miranda](#) baixada de [Unsplash](#)



Esta obra tem a licença [Creative Commons](#) “[Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 4.0 Internacional](#)”.

Prefácio

Este texto ainda está em construção e, portanto, está incompleto e contém erros, ele não é um substituto para as aulas e livros da bibliografia.

Essa apostila foi idealizada para apresentar o conteúdo programático previsto para a disciplina de **Matemática Básica** no **CEFET-MG**.

O conteúdo dessa apostila está distribuído nos seguintes capítulos:

1. Pensamento Matemático
2. Funções
3. Funções Polinomiais
4. Funções Definidas Por Partes e Função Modular
5. Funções Exponenciais
6. Funções Inversas e Funções Logarítmicas
7. Trigonometria e Funções Trigonométricas

Cada capítulo apresenta a teoria, exemplos e exercícios sobre o tópico correspondente.

Como os textos matemáticos costumam ser muito densos em informação, não absorvemos todas as sutilezas apenas em uma leitura. Por isso, fazer exercícios é parte

fundamental do processo de aprendizado, ao manipularmos os conceitos no processo de resolução do exercício somos forçados a utilizar os resultados e a explorar suas sutilezas. A regra geral é que cada passagem da resolução precisa ser embasada em um resultado verdadeiro explicitamente descrito antes, essa é a razão pela qual os textos numeraram os resultados e fórmulas. Mesmo que não escrevamos essas referências, precisamos estar plenamente conscientes delas.

Uma sugestão é utilizar os exemplos contidos no texto como exercícios, tente resolver o problema proposto antes de ler a resolução apresentada. Depois dessa tentativa leia a resolução e a compare criticamente à sua resposta. Seu resultado coincide com o apresentado? Se sim verifique se você apresentou todos os argumentos necessários para embasar sua resposta. Quando os resultados ou argumentos não coincidirem revise sua resolução e verifique se ela corresponde a uma solução alternativa ou contém algum erro. Nas disciplinas de Matemática, na maioria das vezes, a argumentação é muito mais importante do que o resultado.

Alguns exercícios possuem resposta no final da apostila, nesses casos o *link* [\[resp\]](#) no enunciado do exercício leva para sua resposta. Para retornar ao enunciado clique no número da resposta. Em alguns casos a resposta consiste apenas do resultado final, em outros toda a resolução está escrita.

Sumário

1	Pensamento Matemático	1
1.1	Proposição, Teoremas	1
1.2	Tipos de demonstração	5
1.3	Demonstração direta	5
1.4	Demonstração por contraposição	8
1.5	Demonstração por redução ao absurdo ou por contradição	9
1.6	Exercícios	10
2	Funções	12
2.1	Funções	12
2.2	Simetria	17
2.3	Zeros de Função	18
2.4	Monotonicidade	19
2.5	Função Injetora	20
2.6	Algumas Funções Usuais	22
2.7	Transformação de Funções	28
2.8	Função composta	31
2.9	Exercícios	32
3	Funções Polinomiais	35
3.1	Introdução	35
3.2	Função Afim ou do 1º grau	36

3.3	Função do segundo grau ou função quadrática	44
3.4	Inequação do Segundo Grau	52
3.5	Divisão de polinômios	53
3.6	Produtos notáveis	55
3.7	Fatoração	58
3.8	Exercícios	67
4	Funções Definidas Por Partes e Função Modular	70
4.1	Função definida por partes	70
4.2	Função modular	71
4.3	Equações e Inequações modulares	78
4.4	Exercícios	81
5	Funções Exponenciais	83
5.1	Potências	83
5.2	Potências de números negativos	87
5.3	Funções Exponenciais	89
5.4	Esboçar o Gráfico da Função Exponencial	91
5.5	O Número de Euler (e)	93
5.6	Equações exponenciais	94
5.7	Inequações Exponenciais	97
5.8	Exercícios	99
6	Funções Inversas e Funções Logarítmicas	100
6.1	Funções Inversas	100
6.2	Função Logarítmica	105
6.3	Propriedades	109
6.4	Equações Logarítmicas	116
6.5	Exercícios	119

7	Trigonometria e Funções Trigonométricas	121
7.1	Introdução	122
7.2	O conceito de Ângulo	123
7.3	Relações no Triângulo Retângulo	125
7.4	Generalização da Noção de Ângulo	130
7.5	Círculo Trigonométrico Unitário	131
7.6	Fórmulas de redução ao primeiro quadrante	134
7.7	Gráficos de Funções Trigonométricas	139
7.8	Outras Funções Trigonométricas	144
7.9	Identidades Trigonométricas	146
7.10	Equações Trigonométricas	150
7.11	Funções Trigonométricas Inversas	156
7.12	Exercícios	163
	Respostas	166
	Índice Remissivo	177

Pensamento Matemático

1.1	Proposição, Teoremas	1
1.2	Tipos de demonstração	5
1.3	Demonstração direta	5
1.4	Demonstração por contraposição	8
1.5	Demonstração por redução ao absurdo ou por contradição	9
1.6	Exercícios	10

Resolver problemas matemáticos vai além de “fazer contas”. É necessário saber argumentar e justificar cada passagem e o que estamos assumindo como verdade. Sendo assim, resolver um exercício de matemática consiste na construção de um texto argumentativo onde é fundamental que o aluno pense na resolução como uma redação argumentativa. Pensando nisso, é inevitável que os estudantes tenham em mente alguns conceitos referentes a lógica matemática que irão auxiliar-los na construção do pensamento matemático.

1.1 Proposição, Teoremas

Uma **Proposição** é uma oração afirmativa, cujo valor lógico é falso ou verdadeiro, sem dar espaço para uma terceira alternativa. Considere, como exemplo, as seguintes proposições:

- a) Todo triângulo é retângulo;
- b) A soma de todos os ângulos de um triângulo é 180° ;

- c) A soma de dois números pares é sempre um número par;
- d) Todo Brasileiro é carioca;
- e) Se $a > 1$ então $a^2 < a$.

Note que as afirmações (a), (d) e (e) são falsas. Para verificar que, de fato, que uma proposição é falsa, utilizamos o que chamamos de **contraexemplos**. **Contraexemplos** são casos que contrariam uma proposição, ou seja, um exemplo que refuta uma determinada afirmação universal.

Um triângulo cujos ângulos interno são 120° , 40° e 20° não é um triângulo retângulo, uma vez que não possui um ângulo interno de 90° . Logo esse contra-exemplo refuta a proposição (a) mostrando que tal afirmação é falsa. Para verificar a veracidade da afirmação (d) teríamos que consultar o registro de todos os brasileiros e verificar se nasceu no Rio de Janeiro, mas isto é falso, pois o conhecido escritor Graciliano Ramos é um brasileiro nascido em Alagoas. Do mesmo modo, se escolhermos $a = 2$, podemos ver que $a^2 = 4 > a$ e, portanto, esse contraexemplo contradiz a afirmação feita em (e), mostrando que essa também é falsa.

Por outro lado, as proposições (b) e (c) são verdadeiras e para nos convenceremos precisaríamos demonstrar usando argumentos matemáticos. Adiante falaremos mais um pouco sobre isso. Observe que a proposição (e) é do tipo “Se P , então Q ”, onde P e Q são sentenças. No item (e), por exemplo, temos que

$$P: a > 1$$

$$Q: a^2 < a.$$

Isso significa que estamos assumindo que P é verdade e usando este fato devemos verificar se Q é verdade ou não. Uma **proposição condicional** ou **implicativa** é uma nova proposição formada a partir de duas proposições P e Q , que é escrita na forma:

Se P , então Q ou P implica Q

Denotamos a expressão P implica Q por $P \Rightarrow Q$

No caso, a sentença P é chamada de **hipótese** e a sentença Q é denominada de **tese** e a validade da hipótese implica na veracidade da tese.

A **recíproca** de uma proposição condicional ou implicativa é a proposição:

Se Q , então P ou $Q \Rightarrow P$

A **Contrapositiva** ou **Contrarecíproca** de uma afirmação condicional é a expressão :

$$\text{Se } \sim Q, \text{ então } \sim P \text{ ou } \sim Q \Rightarrow \sim P$$

Vale ressaltar que a contrapositiva tem o mesmo valor lógico da proposição a ela associada, ou seja, dizer que $P \Rightarrow Q$ é o mesmo que dizer $\sim Q \Rightarrow \sim P$. Vamos chamar o modo em enunciamos uma proposição de **forma positiva**.

Para que fique claro, considere a seguinte proposição:

Se como laranja então gosto de fruta.

Na proposição enunciada acima temos que a hipótese é “como laranja” e a tese é “gosto de frutas”. Por outro lado a recíproca dessa proposição é

Se gosto de frutas então como laranja.

Por fim, a contrapositiva é

Se não gosto de frutas então não como laranja.

Mais a frente veremos que a forma contrapositiva de uma proposição poderá ser, eventualmente, uma forma indireta muito eficaz de verificar resultados em Matemática.

A teoria matemática é construída pelo **Modelo Axiomático**, isso significa que partimos de alguns conceitos primitivos e afirmações básicas (**axiomas ou postulados**) que aceitamos como verdadeiras, isto é, sem que sejam demonstradas. Os conceitos de ponto, reta e plano são conceitos primitivos. Quando afirmamos que “Por dois pontos passam uma única reta”, temos um exemplo de um axioma. A partir desses conceitos, todos os outros conceitos podem ser definidos e todas as outras proposições demonstradas. Assim, **definições** conceitos dados em função de termos considerados previamente conhecidos.

Existem apenas duas categorias de enunciados: as proposições primitivas (axiomas), que são proposições aceitas sem demonstração (não havendo preocupação se são evidentes ou não); e as proposições demonstradas (teoremas, proposições, corolários e lemas) por meio de raciocínios logicamente corretos, a partir dos postulados e definições pertinentes.

Nesse sentido, entendemos por **demonstração** Matemática, o processo de raciocínio lógico e dedutivo para checar a veracidade de uma proposição condicional. Nesse processo são usados argumentos válidos e definições, ou seja, aqueles que concluem afirmações verdadeiras a partir de fatos que também são verdadeiros.

As proposições que podem ser demonstradas são chamadas de **Teoremas**. Em geral, denominamos de Teorema apenas certas proposições que são de grande importância matemática, chamando-se simplesmente de proposição ao resto das proposições verdadeiras que admitem uma demonstração. Para que um Teorema seja verificado, as hipóteses tem que ser cuidadosamente satisfeitas. Um famoso Teorema é o **Teorema de Pitágoras**, que enunciaremos a seguir:

TEOREMA 1.1: TEOREMA DE PITÁGORAS

Em um triângulo retângulo a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Note que o teorema de Pitágoras não está na forma “Se P então Q ”. No entanto, podemos reescrevê-lo nesse formato.

TEOREMA 1.2: TEOREMA DE PITÁGORAS NO GRADADO

Se T é um triângulo retângulo de catetos b e c e hipotenusa a , então $a^2 = b^2 + c^2$.

No Teorema de Pitágoras temos que as hipóteses são “ T é um triângulo retângulo de catetos b e c e hipotenusa a ” e a tese é “ $a^2 = b^2 + c^2$ ”. Existem algumas sentenças que são diretas consequências de um determinado teorema são chamadas de **Corolários**, já resultados auxiliares que são usados para demonstrar uma determinada proposição ou teorema são chamados de **Lemas**.

Quando em uma sentença temos que $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$, escrevemos $P \Leftrightarrow Q$ e o símbolo $\Leftrightarrow$ é lido como “se e somente se”. Em algumas proposições e teoremas matemáticos vale a recíproca, mas nem sempre isso é verdade.

1.2 Tipos de demonstração

Como já vimos anteriormente, a demonstração é um processo construído afim de constatar a autenticidade de uma proposição. Durante o processo de demonstração as hipóteses são assumidas e através de definições, deduções feitas a partir das hipóteses ou uso de outros resultados e axiomas temos o objetivo de chegar ao resultado, isto é, chegar a tese. Aqui serão apresentadas 3 tipos de demonstrações, a saber:

1. Demonstração direta;
2. Demonstração pela contrapositiva;
3. Demonstração por contradição ou redução ao absurdo.

1.3 Demonstração direta

A demonstração direta é aquela que, por meio de uma sequência lógica, parte das hipóteses e com argumentações coerentes concluimos a veracidade da tese.

PROPOSIÇÃO 1.3: QUADRADO DE NÚMERO PAR

Se x é par, então x^2 é par.

Demonstração

Essa proposição nos diz que se um número x é par, então o seu quadrado também é par. Note que dizemos que um número inteiro é par, se ele tem o formato $2k$, com $k \in \mathbb{Z}$ e dizemos que um número inteiro é ímpar, se ele tem o formato $2k + 1$, com $k \in \mathbb{Z}$. Vamos inicialmente destacar a hipótese e a tese dessa proposição:

Hipótese: x é par.

Tese: x^2 é par.

Assim, partindo da tese, se x é um número par, então $x = 2k$, onde k é algum número inteiro. Assim,

$$x^2 = xx = (2k)(2k) = 4k^2 = 2(2k^2)$$

Chamando $p = 2k^2$, e notando que $2k^2$ é um número inteiro, temos que $x^2 = 2p$, então podemos concluir que x^2 é, também, um número par.

Agora vamos provar o famoso Teorema de Pitágoras

TEOREMA 1.4: TEOREMA DE PITÁGORAS

Se T é um triângulo retângulo de catetos b e c e hipotenusa a , então $a^2 = b^2 + c^2$.

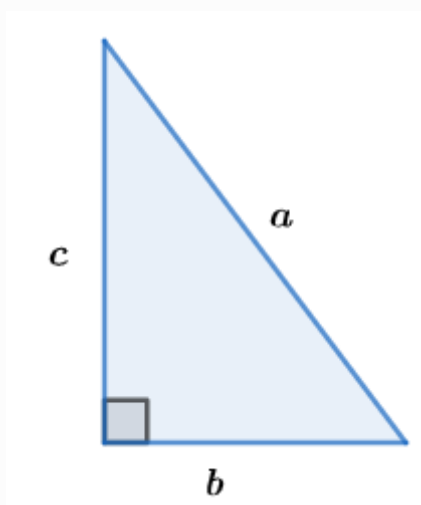


Figura 1.1: Triângulo T

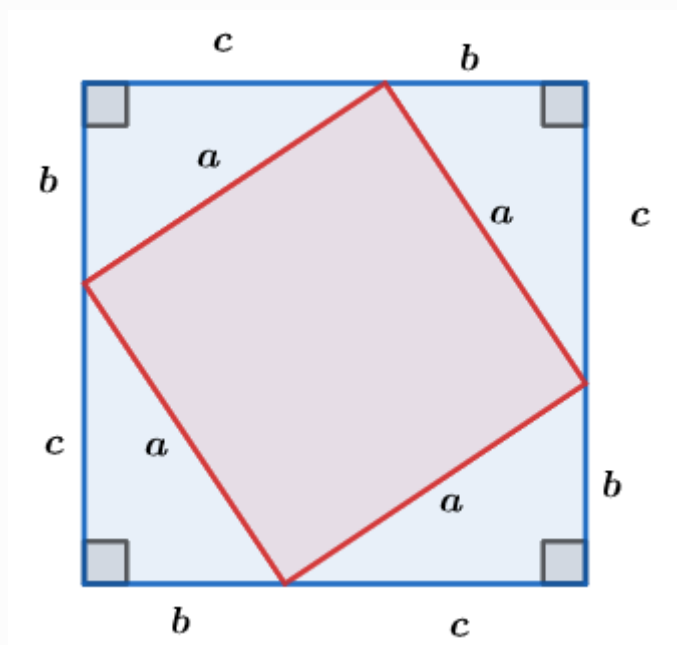


Figura 1.2: Quadrado formado pela junção de 4 triângulos retângulos iguais.

Demonstração

Aqui já sabemos que as hipóteses são que T é um triângulo retângulo de catetos b e c e hipotenusa a e a tese, que é o resultado que queremos chegar é $a^2 = b^2 + c^2$. Logo, considere um triângulo retângulo T conforme a Figura 1.1:

A partir disto, vamos pegar 4 triângulos iguais os da Figura 1.1 e posicionar estes triângulos de modo que formem um quadrado de lado $b + c$. Note que formamos também um quadrado interno de lados cujos lados são as hipotenusas a dos triângulos, conforme ilustra a Figura 1.2.

Podemos calcular a área desse quadrado formado de duas formas. A primeira é notando que o lado desse quadrado é $b + c$, assim:

$$A_{\text{quadrado}} = (b + c)^2 = b^2 + 2bc + c^2 \quad (1.1)$$

Por outro lado, podemos calcular a área desse quadrado maior somando a área dos 5 objetos que o compõem: 4 triângulos retângulos iguais e um quadrado menor de lado a . Ora,

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{bc}{2}$$

$$A_{\text{quadrado menor}} = a^2$$

Assim,

$$A_{\text{quadrado}} = 4 \frac{bc}{2} + a^2 = 2bc + a^2 \quad (1.2)$$

Igualando as expressões obtidas em (1.1) e (1.2) chegamos que

$$b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2$$

organizando os termos e fazendo os cancelamentos necessários, obtemos

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

1.4 Demonstração por contraposição

Sabemos que as proposições

$$P \Rightarrow Q \quad \text{e} \quad \sim Q \Rightarrow \sim P$$

são equivalentes, ou seja,

$$P \Rightarrow Q \quad \Leftrightarrow \quad \sim Q \Rightarrow \sim P.$$

Nesse caso então iremos demonstrar de forma direta a sentença $\sim Q \Rightarrow \sim P$, que implica na demonstração de $P \Rightarrow Q$. Vamos demonstrar as proposições que seguem:

PROPOSIÇÃO 1.5: NÚMERO É PAR SE SEU QUADRADO FOR PAR

Se x^2 é par, então x é par.

Demonstração

Inicialmente é importante observar, que nesse caso fica difícil fazer a demonstração direta (Verifique!). Vamos demonstrar a veracidade dessa afirmação usando a contrapositiva. Nesse caso, temos:

$$P: x^2 \text{ é par.}$$

$$Q: x \text{ é par.}$$

Sendo assim,

$$\sim Q: x \text{ é ímpar.}$$

$$\sim P: x^2 \text{ é ímpar.}$$

Assumindo que x é ímpar, temos que $x = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$x^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Chamando $p = 2k^2 + 2k$ e notando que $2k^2 + 2k$ é um número inteiro, temos que $x^2 = 2p + 1$, que é o mesmo que dizer que x^2 é ímpar.

1.5 Demonstração por redução ao absurdo ou por contradição

O método de redução ao absurdo, utiliza a negação da tese para chegar a uma contradição da hipótese ou de alguma verdade matemática e é baseado na **lei do terceiro excluído** que diz que uma afirmação que não pode ser falsa, deverá ser consequentemente verdadeira. Vamos ver na prática como essa técnica funciona na prática provando a demonstração que segue:

PROPOSIÇÃO 1.6: DESIGUALDADE DAS MÉDIAS

Se a e b são números reais não-negativos, então

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Demonstração

Inicialmente, vamos destacar a hipótese e a tese:

Hipótese: $a, b \in \mathbb{R}_+$

Tese: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Começamos a demonstração negando a tese até chegar em algum absurdo.

Assim, vamos supor que $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$. Desta maneira

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$$

$$a+b < 2\sqrt{ab}$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b < 0$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 < 0$$

Deste modo essa conclusão é um absurdo, já que nenhum número real ao quadrado pode ser negativo. Portanto,

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$$

é falsa e

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

é verdadeira.

Vamos usar a redução ao absurdo para provar a seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 1.7: IRRACIONALIDADE DE RAIZ DE 2

O número $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração

Vamos negar a tese, ou seja, vamos supor que $\sqrt{2}$ é racional. Isso significa dizer que podemos escrever $\sqrt{2}$ na forma de fração irredutível, isto é, $\sqrt{2} = p/q$, com p e q primos entre si (não possui divisores comuns além do 1). Dessa maneira

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

onde a última igualdade nos diz que p é um número par, em outras palavras $p = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim, retornando para a última igualdade

$$p^2 = 2q^2 \Rightarrow (2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$$

Dessa maneira concluímos que q também é um número par. Ora, sendo p e q números pares, então 2 é um divisor comum de p e q , o que é um absurdo, visto que estamos supondo de p e q são primos entre si. Portanto, é um absurdo supor que $\sqrt{2}$ é racional e sendo assim, $\sqrt{2}$ é irracional.

1.6 Exercícios

1) [resp] Nos Teoremas e proposições a seguir, destaque a hipótese e a tese.

a) Se a, b e c são lados de um triângulo e $\hat{A}$ o ângulo oposto ao lado a , então
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

b) Toda função diferenciável em $x = a$ é

contínua em $x = a$. (Ou de modo equivalente: Se f é uma função diferenciável então f é uma função contínua em $x = a$.)

c) Se T é um triângulo equilátero então Q é um triângulo isósceles (Ou de modo equivalente : Todo triângulo equilátero é isósceles).

d) Se $x = 1$, então $x^2 = 1$

2) [resp] Para as sentenças a seguir, dê a recíproca e a contrapositiva das proposições que seguem:

a) Se k é um número par primo então $k = 2$.

b) Toda função diferenciável em $x = a$ é contínua em $x = a$

c) Se T é um triângulo equilátero então T é um triângulo isósceles (Ou de modo equivalente : Todo triângulo equilátero é isósceles).

d) Se $x = 1$, então $x^2 = 1$

3) [resp] A recíproca da proposição apresentada na questão anterior, item e é verdadeira? Justifique.

4) [resp] Demonstre, de duas maneiras diferentes, as seguintes proposições. Em cada item, você deve escolher dois tipos de demonstração para fazer dentre: demonstração direta, redução ao absurdo e usando a contrapositiva.

a) A soma de dois números pares é sempre um número par.

b) A soma de dois números ímpares é sempre um número par.

c) O produto de dois números ímpares é sempre um número ímpar.

d) Se x^2 é ímpar, então x é ímpar.

e) Se $x + y$ é divisível por 2 então $x - y$ é divisível por 2.

5) [resp] Demonstre, usando redução ao absurdo, que $\sqrt{3}$ é um número irracional.

6) [resp] Todas as proposições abaixo são falsas. Dê um contra-exemplo que invalide cada uma das afirmações.

a) Em todo triângulo, de lados a, b e c , e com a sendo o maior lado, vale que $a^2 = b^2 + c^2$.

b) Se a e b são números não-negativos então $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

c) Se a é um número real qualquer, então $a^2 > a$.

d) Todo número natural ímpar é primo.

e) Todo triângulo é retângulo.

Funções

2.1	Funções	12
2.2	Simetria	17
2.3	Zeros de Função	18
2.4	Monotonicidade	19
2.5	Função Injetora	20
2.6	Algumas Funções Usuais	22
2.7	Transformação de Funções	28
2.8	Função composta	31
2.9	Exercícios	32

Esse capítulo será dedicado a apresentar o conceito de função e apresentar algumas funções usuais. Esses conceitos são importantes e servirão de base para o estudo de funções específicas nas aulas posteriores.

2.1 Funções

As funções surgem quando uma quantidade (Grandeza) depende de outra. Por exemplo, podemos dizer que a área de um quadrado está relacionada ao comprimento do lado, isso quer dizer que uma vez conhecido o comprimento do lado, x , conseguimos calcular a área usando a função f descrita pela relação $f(x) = x^2$.

É possível representar uma função de quatro maneiras:

verbalmente descrevendo-a com palavras

numericamente por meio de uma tabela de valores

visualmente através de um gráfico

algebricamente utilizando-se uma fórmula explícita

DEFINIÇÃO 2.1: FUNÇÃO

Uma **função** $f: D \rightarrow C$ é uma relação que associa a cada elemento x de um conjunto D , chamado **domínio**, um **único** elemento $f(x)$ (ou y) de um conjunto C , denominado **contradomínio**.

Quando o domínio de uma função f não for especificado, então o **domínio** (natural) de f é o conjunto de todos os valores de x para os quais f está definida.

Devemos ter cuidado ao analisarmos o domínio de uma função, quando essa é originada de um problema real. Se, por exemplo, a função $f(x) = x + 1$, $f(x)$ representa o valor a ser pago em uma corrida de táxi em função do número de quilômetros rodados x , então o domínio de f será

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\},$$

uma vez que o número de quilômetros rodados é sempre não-negativo.

Note que o contradomínio C de uma função f pode ser qualquer conjunto que contenha, dentre outros elementos, os valores de $f(x)$. Sendo assim, em muitas situações estamos interessados em trabalhar apenas com o conjunto que contém apenas os valores gerados por f , ao qual damos o nome de **conjunto imagem**.

DEFINIÇÃO 2.2: IMAGEM

Dada uma **função** $f: D \rightarrow C$, o valor $f(x)$ para $x \in D$ é chamado **imagem** de x . O conjunto de todas as imagens da função f é denominado **conjunto imagem** (ou simplesmente imagem) e denotado por $\text{Im}(f)$, ou seja,

$$\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in D\}.$$

DEFINIÇÃO 2.3: GRÁFICO

O **gráfico** de f é o conjunto dos pontos (x, y) do plano cartesiano que satisfazem $y = f(x)$, ou seja,

$$G(f) = \{ (x, f(x)) \mid x \in D \}.$$

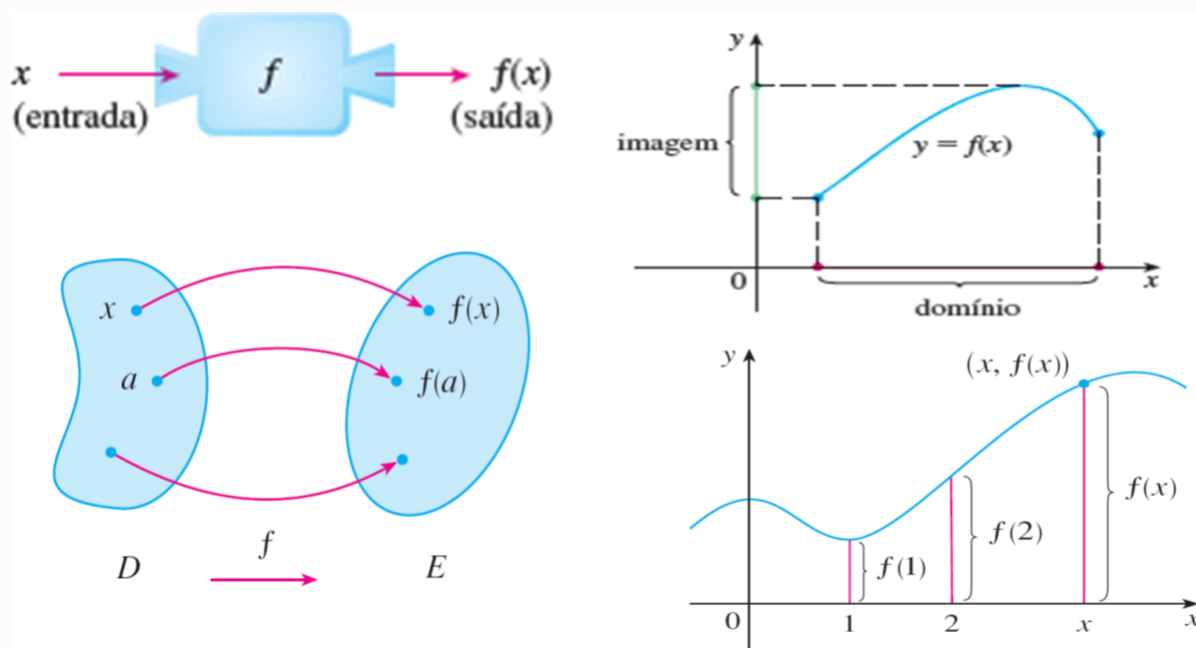


Figura 2.1: Figura retirada do livro Cálculo 1, James Stewart.

2.1.1 Quando uma aplicação não é função? _____

EXEMPLO 2.1.1: Verifique se a equação $y^2 + x^2 - 16 = 0$ permite uma definição de y como função de x .

Inicialmente vamos ver se conseguimos explicitar y como função de x .

$$y^2 = 16 - x^2$$

$$y = \pm \sqrt{16 - x^2}$$

Logo, para cada $x \in \mathbb{R}$, temos dois valores para y . Portanto, a equação $y^2 + x^2 - 16 = 0$ não permite uma definição de y como função de x .

Nos exemplos a seguir vamos explorar como o domínio natural das funções pode ser estudado.

EXEMPLO 2.1.2: Faça o estudo do domínio da Função $f(x) = 1 - x^4$

Note que f está bem definida para todo $x \in \mathbb{R}$, logo

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

EXEMPLO 2.1.3: Faça o estudo do domínio da Função $g(x) = \frac{1}{x+4}$

Nesse caso temos que g está definida quando

$$\begin{aligned}x + 4 &\neq 0 \\x &\neq -4,\end{aligned}$$

logo

$$D(g) = \mathbb{R} - \{-4\}$$

ou

$$D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -4\}.$$

EXEMPLO 2.1.4: Faça o estudo do domínio da Função $h(x) = \sqrt{9-x}$

Para que h seja bem definida

$$\begin{aligned}9 - x &\geq 0 \\x &\leq 9,\end{aligned}$$

logo

$$D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 9\}.$$

EXEMPLO 2.1.5: Faça o estudo do domínio da Função $f(t) = \frac{\sqrt{2+t}}{\sqrt{2t-6}}$

Para que f esteja bem definida teremos que ter

$$2 + t \geq 0$$

$$t \geq -2$$

e

$$2t - 6 > 0$$

$$t > 3,$$

fazendo a interseção desses intervalos temos que

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}.$$

EXEMPLO 2.1.6: Faça o estudo do domínio da Função $f(x) = \sqrt[3]{2x - 3}$

Como o índice a raiz é ímpar, então

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

EXEMPLO 2.1.7: Faça o estudo do domínio da Função $p(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 5x + 6}$

Para que p esteja bem definida teremos que ter

$$x - 1 \geq 0$$

$$x \geq 0$$

e

$$x^2 - 5x + 6 \neq 0$$

que corresponde a

$$x \neq 2 \quad \text{e} \quad x \neq 3,$$

portanto

$$D(p) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1, x \neq 2, x \neq 3\}.$$

2.2 Simetria

Se uma função f satisfaz $f(-x) = f(x)$ para todo número x em seu domínio, então f é chamada **função par**. Por outro lado, se f satisfaz $f(-x) = -f(x)$ para cada número x em seu domínio, uma f é **função ímpar**.

EXEMPLO 2.2.1: Verifique se a função $f(x) = 1 - x^4$ é par, ímpar ou nem par, nem ímpar

Como

$$f(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = f(x),$$

logo f é par.

EXEMPLO 2.2.2: Verifique se a função $g(x) = x^5 + x$ é par, ímpar ou nem par, nem ímpar

Como

$$g(-x) = (-x)^5 - (-x) = -x^5 + x = -(x^5 - x) = -g(x),$$

logo g é ímpar.

EXEMPLO 2.2.3: Verifique se a função $h(x) = 2x - x^2$ é par, ímpar ou nem par, nem ímpar

Nesse caso temos que

$$h(1) = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1$$

e

$$h(-1) = 2(-1) - (-1)^2 = -3,$$

logo h não é nem par, nem ímpar.

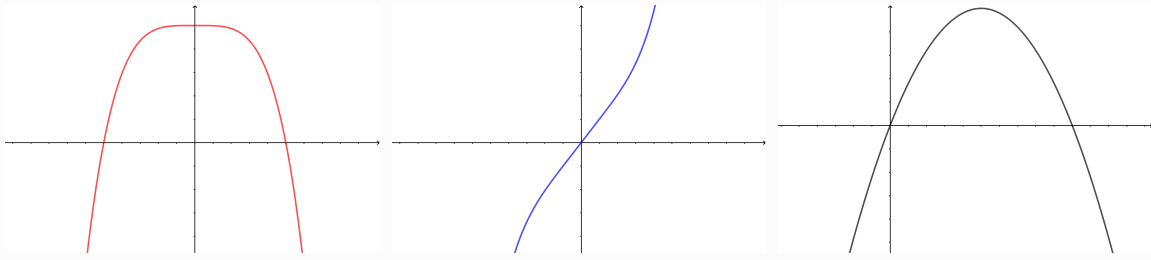


Figura 2.2: Gráfico das funções $f(x) = 1 - x^4$, $g(x) = x^5 + x$ e $h(x) = 2x - x^2$, respectivamente.

2.3 Zeros de Função

Os valores de x que satisfazem a equação $f(x) = 0$ são chamados **zeros** de f . Esses valores correspondem aos interceptos- x do gráfico da função.

EXEMPLO 2.3.1: Encontre os zeros da função $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x$

Para encontrarmos os zeros de f precisamos resolver a equação

$$x^3 + 2x^2 - 5x = 0$$

Colocando x em evidência, obtemos

$$x(x^2 + 2x - 5) = 0,$$

o que implica que

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + 2x - 5 = 0.$$

Para resolver a equação do segundo grau

$$x^2 + 2x - 5 = 0$$

usamos a fórmula de Bhaskara

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Substituindo os coeficientes ($a = 1$, $b = 2$, $c = -5$), obtemos

$$x = -1 \pm \sqrt{6}.$$

Logo, f possui três zeros, a saber

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -1 + \sqrt{6} \quad \text{e} \quad x_3 = -1 - \sqrt{6}.$$

EXEMPLO 2.3.2: Encontre os zeros da função $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 3}$

Para encontrarmos os zeros de g precisamos resolver a equação

$$\frac{x^2 - 4}{x + 3} = 0$$

Note que, para resolver equações do tipo

$$\frac{p}{q} = 0,$$

basta igualar o numerador a zero, desde que o denominador seja diferente de zero ($q \neq 0$).

Assim, fazemos

$$x^2 - 4 = 0,$$

o que resulta em $x = 2$ ou $x = -2$. Como nenhum desses valores anula o denominador ($x + 3$), a função g possui dois zeros: $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$.

2.4 Monotonicidade

DEFINIÇÃO 2.4: MONOTONICIDADE

Seja f uma função definida em um intervalo I , dizemos que

f é **crescente** em I se, dados quaisquer x_1 e x_2 em I

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2);$$

f é **decrescente** em I se, dados quaisquer x_1 e x_2 em I

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2);$$

f é constante em I se, dados quaisquer x_1 e x_2 em I

$$f(x_1) = f(x_2)$$

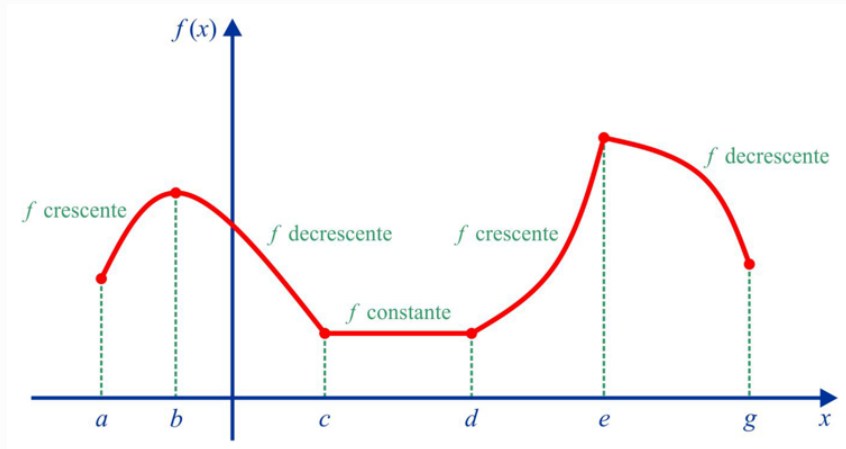


Figura 2.3: f é crescente nos intervalos (a, b) e (d, e) , decrescente nos intervalos (b, c) e (e, g) e constante no intervalo (c, d) . Figura retirada do livro pré-cálculo do autor Francisco Magalhães Gomes.

2.5 Função Injetora

DEFINIÇÃO 2.5

(**Função Injetora**): Uma função f , definida em seu domínio D é **injetora** quando dados quaisquer valores reais $x_1, x_2 \in D$, se $x_1 \neq x_2$, então, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Em outras palavras, se f é uma função injetora então,

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Teste da reta horizontal: Uma função é injetora se e somente se nenhuma reta horizontal intercepta seu gráfico mais de uma vez.

EXEMPLO 2.5.1: Verifique se a função $f(x) = x^2$ é injetora

f não é injetora pois $f(-1) = f(1) = 1$.

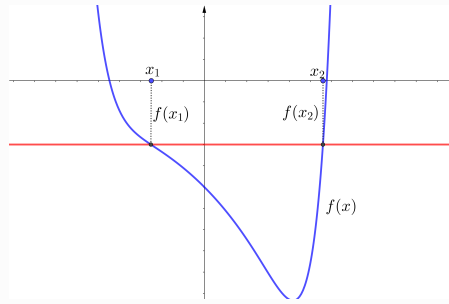


Figura 2.4: Gráfico de uma função que não é injetora, uma vez que $f(x_1) = f(x_2)$ para $x_1 \neq x_2$.

Observação sobre Contraexemplos: Muitas vezes, é mais simples demonstrar que uma função **não** possui determinada propriedade do que provar que ela possui. Para mostrar que uma função não é injetora, por exemplo, basta apresentar um **contraexemplo**.

Um contraexemplo é um caso específico que invalida uma afirmação geral. No exemplo anterior, para mostrar que $f(x) = x^2$ não é injetora, bastou encontrar dois elementos distintos ($x_1 = 1$ e $x_2 = -1$) que resultam na mesma imagem ($f(1) = f(-1) = 1$). Se a regra falha para um par, ela deixa de ser válida para todo o domínio.

EXEMPLO 2.5.2: Verifique se a função $f(x) = x^3$ é injetora

Suponha que

$$f(x_1) = f(x_2)$$

temos então que

$$x_1^3 = x_2^3$$

$$x_1^3 = \sqrt[3]{x_2^3}$$

$$x_1 = x_2,$$

logo f é injetora.

EXEMPLO 2.5.3: Verifique se a função $y = \frac{3}{5x - 2}$ é injetora

Suponha que

$$f(x_1) = f(x_2)$$

temos então que

$$\begin{aligned}\frac{3}{5x_1 - 2} &= \frac{3}{5x_2 - 2} \\ 3(5x_1 - 2) &= 3(5x_2 - 2) \\ 5x_1 - 2 &= 5x_2 - 2 \\ x_1 &= x_2.\end{aligned}$$

Logo, y é injetora.

2.6 Algumas Funções Usuais

A seguir serão apresentados algumas funções usuais, onde algumas delas serão estudadas com mais detalhes em aulas posteriores.

2.6.1 Função Potência

A função

$$f(x) = x^n,$$

n é um número natural, é chamada de **função potência**. A Figura 2.5 mostra o gráfico de algumas funções potências.

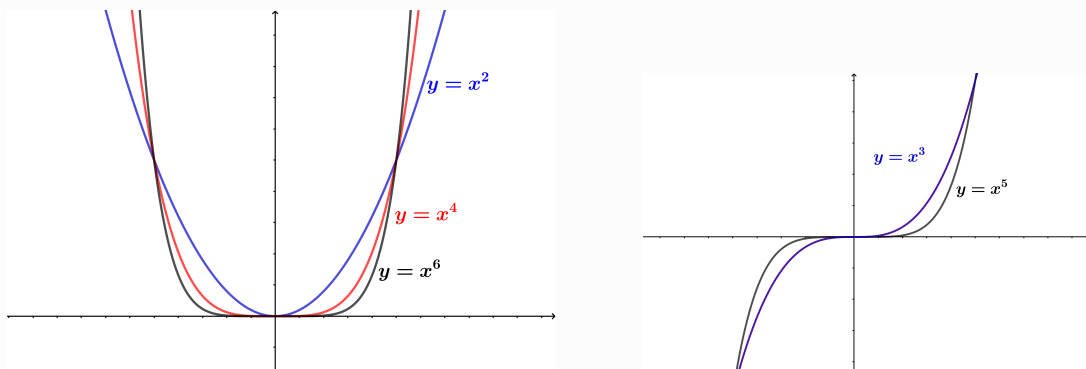


Figura 2.5: ???

O domínio de uma função potência é $\mathbb{R}$.

O conjunto imagem é $\mathbb{R}$ se o expoente for ímpar e é $[0, \infty]$ se o expoente é par.

Há um único zero em $x = 0$.

Quando o expoente é par, f é par, quando o expoente é ímpar, f é ímpar.

Quando o expoente é par, f é decrescente para $x < 0$, e crescente para $x > 0$, quando o expoente é ímpar, f é crescente em $(-\infty, \infty)$.

2.6.2 Função Polinomial

A função

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

onde n é um número inteiro não-negativo e $a_1, a_2, \dots, a_n$ são constantes reais.

O domínio de f é $\mathbb{R}$.

Pode ter até n zeros.

As funções do primeiro grau e quadráticas são exemplos de funções polinomiais.

2.6.3 Função do 1º Grau

É uma função do tipo

$$f(x) = ax + b,$$

com $a, b \in \mathbb{R}$. O gráfico de uma função do 1º grau é uma reta. a é o coeficiente angular da reta e b é a intersecção com o eixo y . Para encontrar a equação de uma reta precisamos de dois pontos, em particular se encontrarmos os interceptos com os eixos conseguimos obter a equação da reta.

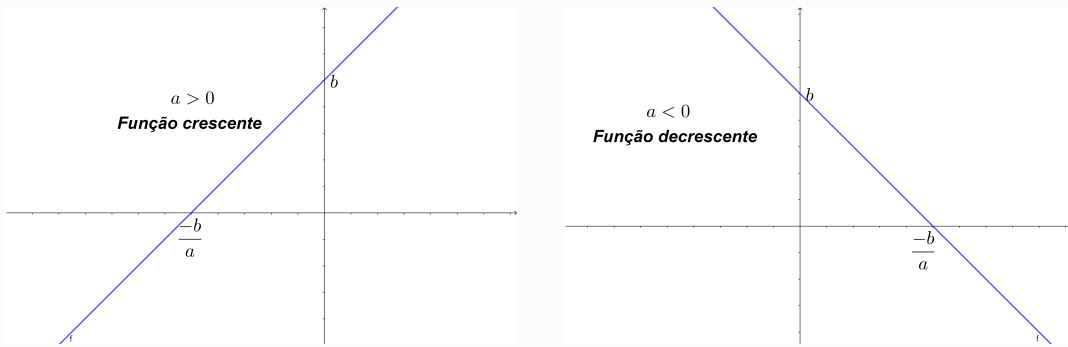


Figura 2.6: Gráfico de uma função do primeiro grau.

2.6.4 Função Quadrática

É uma função polinomial de grau 2, ou seja, tem a forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. O gráfico desse tipo de função é sempre uma parábola e tem concavidade para cima se $a > 0$ e concavidade para baixo se $a < 0$. O gráfico de uma parábola pode ser construído a partir de translações da parábola ax^2 . A figura a seguir mostra o exemplo de duas parábolas.

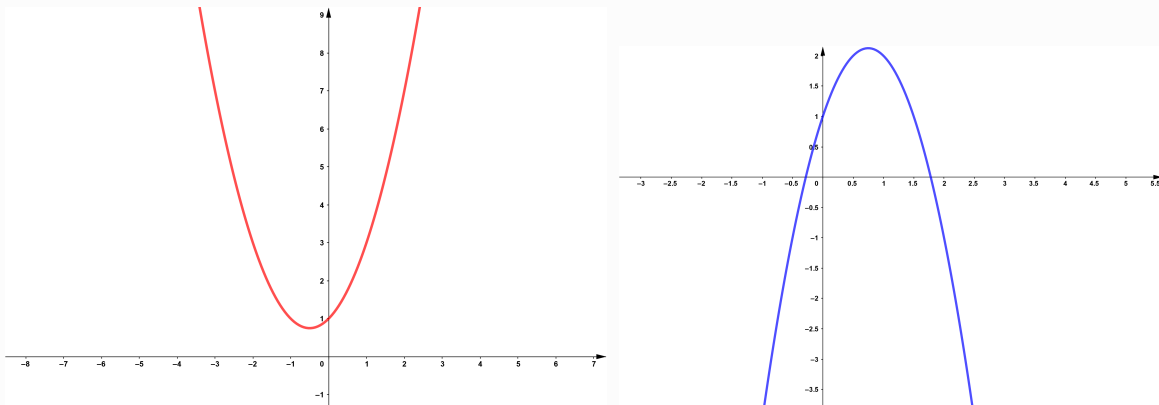


Figura 2.7: Gráfico das funções $y = x^2 + x + 1$ e $-2x^2 + 3x + 1$.

2.6.5 Função Raiz

É uma função do tipo

$$f(x) = \sqrt[n]{x},$$

com n sendo uma constante natural maior que 1.

O domínio é $\mathbb{R}$ se o índice n é ímpar e é $[0, \infty)$ se o índice é par.

O conjunto imagem é $\mathbb{R}$ se o índice n é ímpar e é $[0, \infty)$ se o índice é par.

Há um único zero em $x = 0$.

A função é crescente em todo o domínio.

Quando o índice é ímpar, f é ímpar.

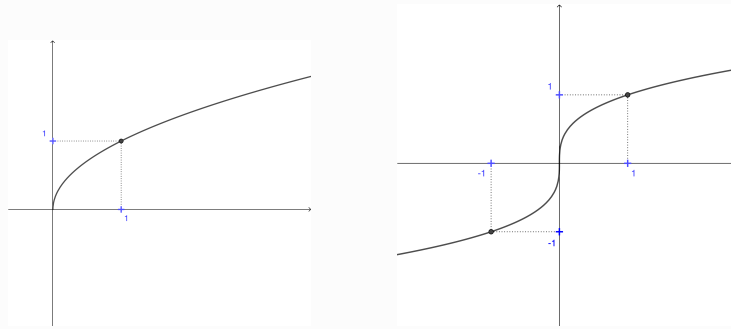


Figura 2.8: Gráficos das funções $y = \sqrt{x}$ e $\sqrt[3]{x}$, respectivamente

2.6.6 Função Recíproca

É uma função do tipo

$$f(x) = \frac{1}{x^n},$$

com $x \neq 0$.

O domínio inclui todos os valores reais, exceto o zero.

O conjunto imagem é $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ se o expoente é ímpar e $(0, \infty)$ se o expoente é par.

A função não tem zeros.

Os exemplos a seguir ilustram Quando o expoente é ímpar, a função é decrescente em todos os pontos do domínio. Já quando o expoente é par, f é crescente para $x < 0$ e decrescente para $x > 0$.

Quando o expoente é par, f é par. Quando o expoente é ímpar, f é ímpar.

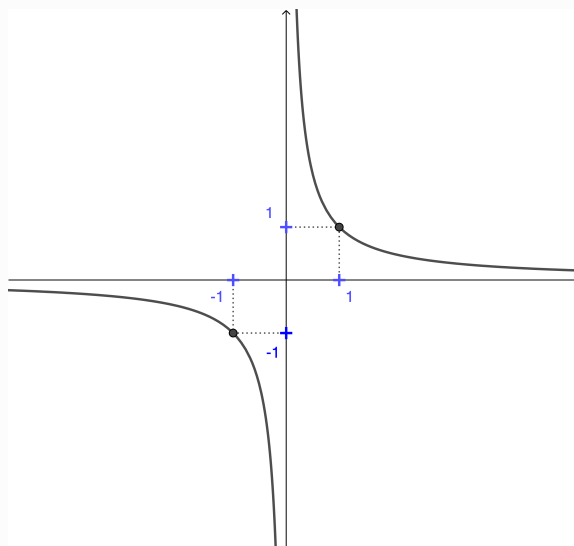


Figura 2.9: Gráfico da função $\frac{1}{x}$.

2.6.7 Função Racional

É uma função do tipo

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

onde $p(x), q(x)$ são polinômios e $q(x) \neq 0$.

Por exemplo, a função

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

é uma função racional e seu domínio é $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 2\}$.

2.6.8 Função exponencial

É uma função do tipo

$$f(x) = a^x.$$

onde a é uma constante positiva.

O domínio de f é $\mathbb{R}$ (ou $(-\infty, \infty)$).

A imagem é $(0, \infty)$.

A função não possui zeros;

Se $a > 1$, a função é crescente em todo o domínio e se $0 < a < 1$ a função é decrescente em todo o domínio.

A função não é par nem ímpar.

A Figura 2.10 mostra o gráfico das funções $y = 2^x$ e $y = (0.5)^x$

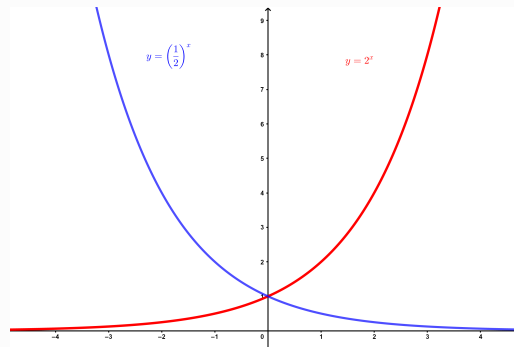


Figura 2.10: Gráficos das funções $y = 2^x$ e $y = (0.5)^x$. Figura retirada do livro Cálculo 1 do autor James Stewart.

2.6.9 Funções Trigonômétricas

As funções trigonométricas são funções angulares obtidas através do auxílio do círculo trigonométrico. As principais funções trigonométricas são as funções

$$y = \text{sen}(x), \quad y = \text{cos}(x) \quad \text{e} \quad y = \text{tg}(x).$$

Essas funções são periódicas, ou seja, os valores da função ($f(x) = y$) se repetem para determinados valores da variável x , ou seja, para cada período determinado pelos valores de x , iremos obter valores repetidos para a função.

O domínio de ambas funções $y = \text{sen}(x)$ e $y = \text{cos}(x)$ é $\mathbb{R}$.

A Imagem de ambas funções $y = \text{sen}(x)$ e $y = \text{cos}(x)$ é $[-1, 1]$, ou seja, $-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$ e $-1 \leq \text{cos}(x) \leq 1$.

A função $y = \text{sen}(x)$ é ímpar e a função $y = \text{cos}(x)$ é par.

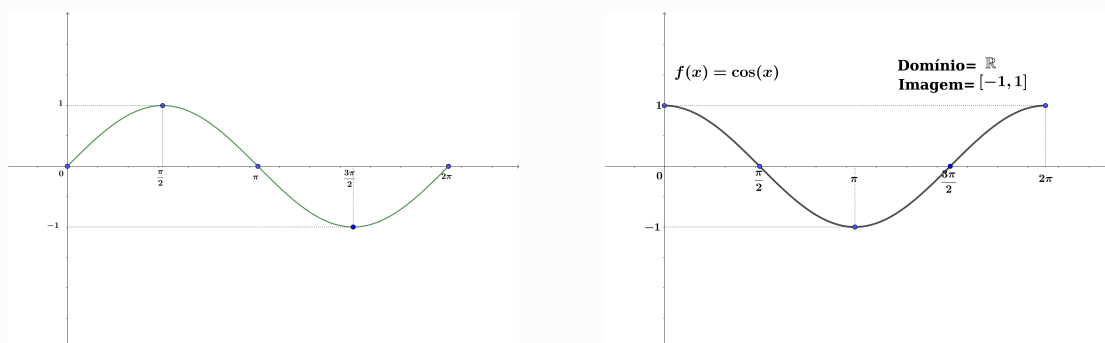


Figura 2.11: Gráfico da função $y = \text{sen}(x)$ e $y = \cos(x)$, respectivamente.

2.6.10 Funções Definidas por Partes

Uma função definida por partes é uma função que tem mais de uma lei para o seu domínio.

A função

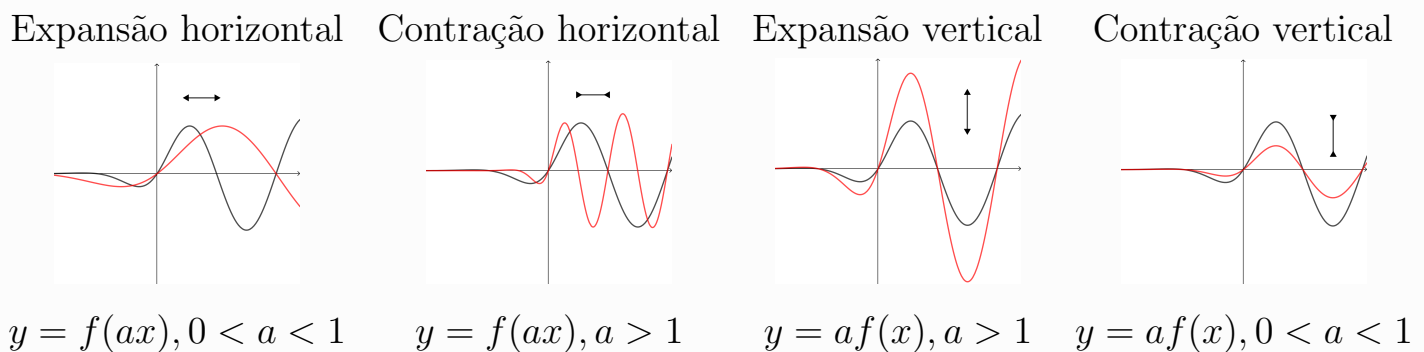
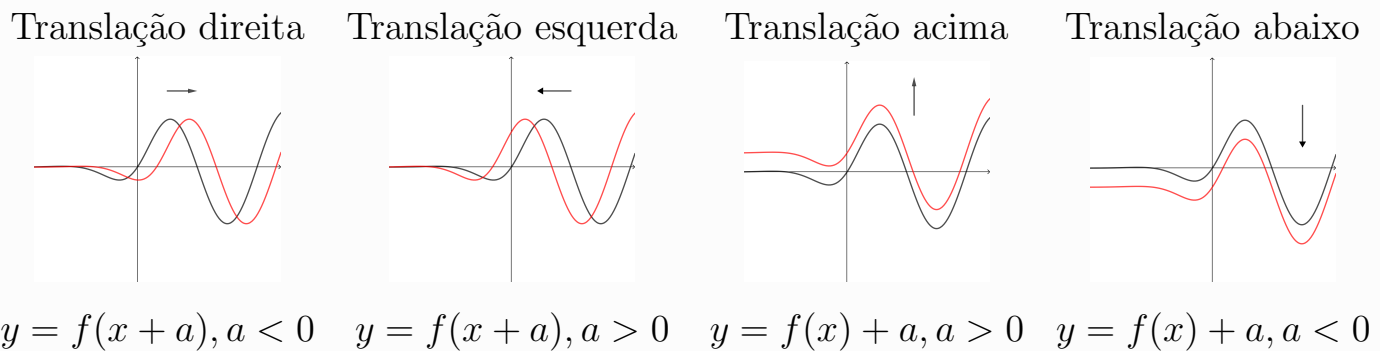
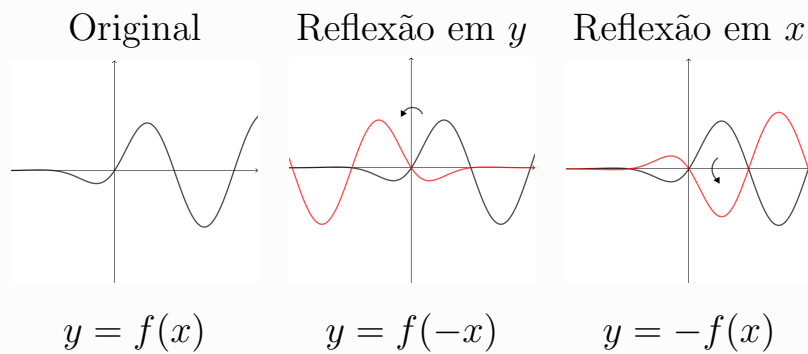
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & \text{se } x < 1 \\ x - 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

é um exemplo de função definida por partes.

2.7 Transformação de Funções

Nessa seção usaremos translações, expansões e reflexões para fazer o esboço de gráfico de algumas funções a partir de funções já conhecidas (seção anterior). Abaixo, listamos algumas transformações nas variáveis x e y e como elas afetam o gráfico de um função $y = f(x)$.

$f(x) \mapsto f(-x)$	Reflexão em torno do eixo y
$f(x) \mapsto -f(x)$	Reflexão em torno do eixo x
$f(x) \mapsto f(x + a)$	Translação horizontal direita se $a < 0$, esquerda se $a > 0$
$f(x) \mapsto f(x) + a$	Translação vertical, abaixo se $a < 0$, acima se $a > 0$
$f(x) \mapsto f(ax)$	Mudança de escala horizontal contração se $a > 1$, expansão se $0 < a < 1$
$f(x) \mapsto af(x)$	Mudança de escala vertical, $a > 0$ expansão se $a > 1$, contração se $0 < a < 1$



EXEMPLO 2.7.1: A partir do gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$, use transformações para obter os gráficos de

a) $y = \sqrt{x} - 1$

b) $y = \sqrt{x - 2}$

c) $y = -\sqrt{x}$

d) $y = 2\sqrt{x}$

e) $y = \sqrt{-x}$

Cada item representa uma transformação geométrica específica aplicada à função base $f(x)$.

a)

Deslocamento Vertical: O gráfico de $y = \sqrt{x} - 1$ é obtido deslocando o gráfico de $f(x)$ em uma unidade para baixo.

b)

Deslocamento Horizontal: O gráfico de $y = \sqrt{x - 2}$ é obtido deslocando o gráfico de $f(x)$ em duas unidades para a direita.

c)

Reflexão no eixo x : O gráfico de $y = -\sqrt{x}$ é a reflexão do gráfico de $f(x)$ em relação ao eixo das abscissas (eixo x).

d)

Alongamento Vertical: O gráfico de $y = 2\sqrt{x}$ é obtido multiplicando as ordenadas de $f(x)$ por 2, o que resulta em um alongamento vertical.

e)

Reflexão no eixo y : O gráfico de $y = \sqrt{-x}$ é a reflexão do gráfico de $f(x)$ em relação ao eixo das ordenadas (eixo y), alterando o domínio para $x \leq 0$.

2.8 Função composta

DEFINIÇÃO 2.6: FUNÇÃO COMPOSTA

Dadas as funções f e g cujos domínios são A e B , respectivamente, definimos a **função composta** $f \circ g$ por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

O domínio de $f \circ g$ é o conjunto dos valores de $x \in B$ tais que $g(x) \in A$

EXEMPLO 2.8.1: Se $f(x) = x^2$ e $g(x) = x - 3$, encontre as compostas $f \circ g$ e $g \circ f$.

Por definição

$$\begin{aligned} f \circ g &= f(g(x)) \\ &= f(x - 3) \\ &= (x - 3)^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g \circ f &= g(f(x)) \\ &= g(x^2) \\ &= x^2 - 3. \end{aligned}$$

EXEMPLO 2.8.2: Se $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = x^{10}$ e $h(x) = x + 3$, encontre $f \circ g \circ h$.

$$\begin{aligned} f \circ g \circ h &= f(g(h(x))) \\ &= f(g(x + 3)) \\ &= f((x + 3)^{10}) \\ &= \frac{(x + 3)^{10}}{(x + 3)^{10} + 1}. \end{aligned}$$

Devemos está atentos ao calcularmos o domínio da função composta. Segundo a definição 2.6 para que sejamos capazes de calcular $f(g(x))$ é preciso que:

1. x pertença ao domínio de g ;
2. $g(x)$ (o valor de g em x) pertença ao domínio de f ;

Para deixar mais clara a definição do domínio da função composta, veremos como obtê-lo de forma prática no exemplo a seguir.

EXEMPLO 2.8.3: Sejam dadas as funções

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Obtenha $f(g(x))$ e determine o domínio dessa composta.

$$f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x^2} - 4} = \frac{1}{\frac{1 - 4x^2}{x^2}} = \frac{x^2}{1 - 4x^2}.$$

Pela Observação, para que $f(g(x))$ esteja bem definida temos que ter:

1. x pertença ao domínio de g , isto é, $x \neq 0$.
2. $g(x)$ pertença ao domínio de f , isto é

$$1 - 4x^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x \neq \frac{1}{2}.$$

Logo

$$D(f(g(x))) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0, x \neq -\frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{2} \right\}$$

2.9 Exercícios

1) [resp] Uma companhia de turismo cobra R\$ 1200,00 por um pacote turístico individual, mas dá um bom desconto quando os turistas viajam em grupo. Se um grupo tem x pessoas,

com $x \leq 70$, cada integrante paga apenas

$$C(x) = 1200 - 12x.$$

Sabendo que a receita da empresa em cada grupo é dada pelo produto do valor pago por pessoa

pelo número de membros do grupo.

a) escreva a função $R(x)$ que fornece a receita obtida pela empresa de turismo com o grupo de x pessoas

b) trace o gráfico da função para $x \in [10, 70]$

c) indique qual o tamanho do grupo fornece a maior receita

2) [resp] Calcule

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

para as funções e os valores de a fornecidos a seguir. Simplifique os resultados e suponha sempre que os denominadores são diferentes de zero.

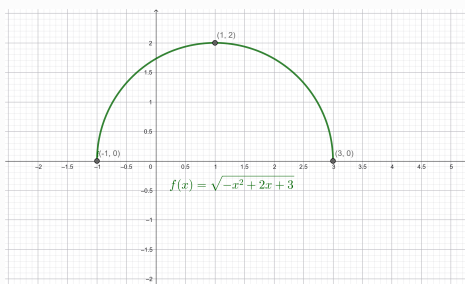
a) $f(x) = 3x + 4, \quad a = 2$

b) $f(x) = x^2 + 6, \quad a = 4$

3) [resp] O gráfico da função

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$$

é mostrado a seguir.



Determine:

- Os valores de $f(0)$, $f(0,5)$ e $f(2)$
- O domínio de f
- O conjunto imagem de f
- Os zeros de f
- Os intervalos de crescimento e decrescimento
- Os pontos de máximo e mínimo absoluto

4) [resp] Encontre o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+5}$

b) $f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{x-5}$

c) $f(x) = \frac{\sqrt{2x-3}}{x^2 - 5x + 4}$

d) $h(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2 - 5x}}$

5) [resp] Verifique algebricamente se as funções a seguir são pares, ímpares ou não possuem simetria.

a) $f(x) = x^2 - 3$

b) $f(x) = -2x$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

d) $f(x) = 2x^5 - x^3 + x$

e) $y = x\sqrt{x}$

f) $f(x) = 2x - 1$

6) [resp] Se $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2 - 4$ e $h(x) = -2x + 5$

a) Verifique se cada uma dessas funções são par, ímpar ou nem par nem ímpar

b) Verifique se essas funções são injetoras

c) Esboce o gráfico dessas funções, encontre o conjunto imagem e os intervalos de crescimento e decrescimento

d) Encontre o valor de $\frac{g(1) - f(0) - h(3)}{h(1)}$

e) Calcule $g(h(2))$

f) A partir do gráfico de $y = 2^x$, esboce o gráfico de $y = 2^{f(x)}$

7) [resp] (**Cercando um pasto**) Um fazendeiro pretende usar 400 m de cerca para delimitar uma área retangular que servirá de pasto. Responda os itens a seguir, lembrando que a área de um terreno retangular com largura l e profundidade p é dada por lp , e que o perímetro desse terreno retangular é igual a $2l + 2p$.

a) Relacione a profundidade com a largura do pasto, considerando o uso dos 400 m de cerca.

b) Escreva uma função que forneça a área cercada em relação a largura do pasto.

c) Calcule a área do pasto, supondo que sua largura é 75 m. Faça o mesmo para uma largura de 150 m.

d) Determine o domínio da função área que você obteve.

e) Esboce o gráfico da função área.

f) Indique os intervalos nos quais a função é crescente e em quais ela é decrescente.

g) Com base no gráfico, indique se é possível cercar uma área de 12 000 m².

h) Ainda com base no gráfico, determine a maior área que pode ser cercada e as dimensões do terreno nesse caso.

8) [resp] A partir do gráfico de $f(x) = x^2$, esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $g(x) = x^2 - 3$

b) $h(x) = 3x^2 - 8$

c) $p(x) = -x^2 + 6$

d) $q(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2$

e) $u(x) = \left(\frac{1}{4}x\right)^2$

9) A partir do gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x}$, esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $g(x) = \sqrt[3]{x + 3}$

b) $h(x) = \sqrt[3]{3x}$

c) $i(x) = -\sqrt[3]{x}$

d) $j(x) = 3\sqrt[3]{x}$

e) $k(x) = 1 - \sqrt[3]{x - 1}$

f) $l(x) = \sqrt[3]{2x} - 1$

10) [resp] Dadas as funções f e g a seguir, defina $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(f(x))$ e $g(g(x))$.

a) $f(x) = 4x$, $g(x) = \frac{x^2}{4}$

b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{x}{3}$

11) [resp] Dadas as funções $f(x) = \frac{1}{x - 4}$ e $g(x) = x^2$,

a) Defina $f(g(x))$ e $g(f(x))$ e seus domínios.

b) Calcule $f(g(-3))$ e $g(f(7))$.

12) [resp] Na cidade de Salicilina, o número de casos de determinada doença viral varia ao longo do ano, sendo dado aproximadamente por

$$d(t) = 1,9245t^4 - 53,485t^3 + 450,18t^2 - 1081,5t + 837,37,$$

em que t é o mês do ano. Por sua vez, o custo em reais do tratamento dessa doença é dado pela função $c(x) = 600x + 12000$, em que x é o número de pessoas infectadas.

a) Determine $c(d(t))$.

b) Indique o que essa função composta representa.

c) Calcule o custo aproximado de tratamento dos salicilinoses infectados no mês de abril. (Use uma calculadora).

Funções Polinomiais

3.1	Introdução	35
3.2	Função Afim ou do 1º grau	36
3.3	Função do segundo grau ou função quadrática	44
3.4	Inequação do Segundo Grau	52
3.5	Divisão de polinômios	53
3.6	Produtos notáveis	55
3.7	Fatoração	58
3.8	Exercícios	67

3.1 Introdução

Conforme vimos no capítulo anterior uma função polinomial tem a forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

onde n é um número inteiro não negativo e é o grau do polinômio e $a_1, a_2, \dots, a_n$ são constantes reais, com $a_n \neq 0$.

Vejamos alguns exemplos de polinômios.

Uma função Afim é um polinômio de grau 1:

$$f(x) = 3x + 1$$

tem coeficientes $a_0 = 1$ e $a_1 = 3$.

Uma função quadrática é um polinômio de grau 2:

$$f(x) = x^2 - x + 2$$

tem coeficientes $a_0 = 2$, $a_1 = -1$ e $a_2 = 1$.

Um polinômio de grau sete:

$$f(x) = x^7 - 1$$

tem coeficientes $a_0 = -1$, $a_7 = 1$ e os demais iguais a zero.

A função

$$f(x) = 2x + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x} = 2x + 3x^{-2} + 4x^{-1}$$

não é uma função polinomial, pois os expoentes não podem ser negativos.

A função

$$g(x) = 3x^2 - 5x^{\frac{1}{2}} + 2$$

não é uma função polinomial, porque os expoentes não podem ser fracionários.

3.2 Função Afim ou do 1º grau

Não sei se você já observou, mas o preço a pagar por uma corrida de táxi depende do número de quilômetros que se percorre, além disso, adicionamos a esse valor uma taxa fixa, a chamada “bandeirada”. Se considerarmos, por exemplo, que a bandeirada custa R\$ 4,70 e cada quilômetro rodado custa R\$ 0,90, então o valor a ser pago por uma corrida de táxi é dado pela função

$$f(x) = 0,90x + 4,70.$$

Essa função é um exemplo de **função afim**, que será estudada neste capítulo.

Uma função é dita **Afim** (ou do 1º grau) se puder ser escrita na forma

$$f(x) = ax + b, \tag{3.1}$$

em que $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Uma função quadrática é um polinômio de grau 2:

As funções

$$y = 3x - 5, \quad y = 3x \quad \text{e} \quad y = -6x - 1989$$

são exemplos de funções do 1º grau.

Os coeficientes a e b recebem o nome respectivamente de **coeficiente angular** e **coeficiente linear**. O coeficiente angular determina a inclinação da reta e o coeficiente linear determina o lugar em que a reta toca o eixo y uma vez que $(0, b) \in G(f)$. Considere uma função $f(x) = ax + b$ e sejam P e Q dois pontos quaisquer do gráfico de f , ou seja, $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ satisfazendo $y_1 = ax_1 + b$ e $y_2 = ax_2 + b$, conforme o gráfico da Figura ??.

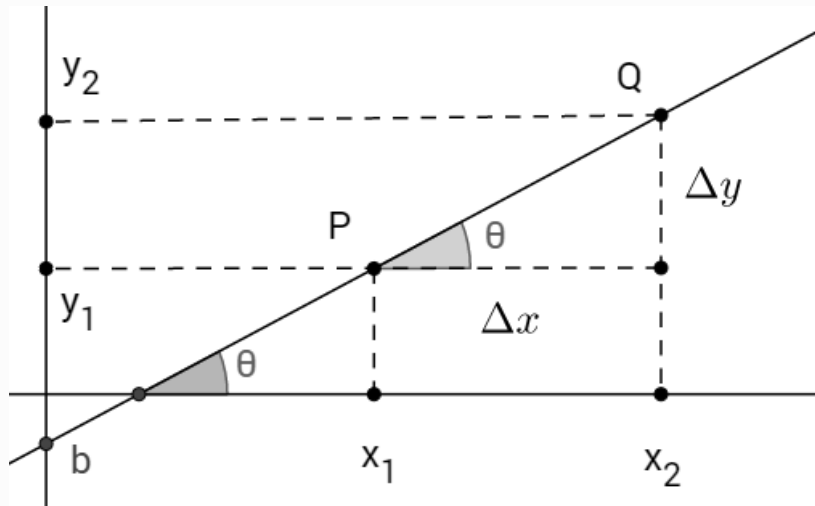


Figura 3.1: ???

Figura 3.2: Representação gráfica de uma função afim e a inclinação da reta (θ).

Segue que a divisão da variação em y pela variação em x nos fornece

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1} = a. \quad (3.2)$$

Isso quer dizer que podemos obter o valor do coeficiente angular da reta a partir de dois pontos quaisquer da reta. Conforme representado na Figura 3.2, essa razão representa a tangente do ângulo θ dado pela inclinação da reta em relação ao eixo x . Se (x, y) é um ponto genérico dessa reta, então

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = a$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}y - y_1 &= a(x - x_1) \\ y &= a(x - x_1) + y_1.\end{aligned}$$

Quando $b = 0$, dizemos que a função é **Linear**.

3.2.1 Como determinar a equação de uma reta dado dois pontos —

Levando em consideração qualquer reta (diferente das retas $x = c$, com c constante) é determinada pela equação (3.1), que é a equação da reta com coeficiente angular a e coeficiente linear b . Além disso, dois pontos determinam uma única reta, então se tivermos dois pontos de uma reta $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ podemos determinar essa equação de duas maneiras práticas:

1º modo: Como $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ pertencem a reta, então suas coordenadas satisfazem a equação 3.1, com isso podemos encontrar a e b resolvendo o sistema

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases}$$

2º modo: Encontramos o coeficiente angular através a expressão

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

e depois encontramos o coeficiente linear b através de uma da equação $y = ax + b$, substituindo um dos pontos dados P e Q .

Se r e s são duas retas paralelas então ambas possuem o mesmo coeficiente angular.

Se r e s são duas retas perpendiculares, sejam a_r e a_s os coeficientes angulares das retas r e s respectivamente. Temos que

$$a_r = -\frac{1}{a_s}.$$

EXEMPLO 3.2.1: Determine a equação da reta que passa pelos pontos $P = (2, 1)$ e $Q = (3, -1)$. (Faça dos dois modos).

1º modo:

Como P e Q pertencem a reta que estamos querendo encontrar ($y = ax + b$), então precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ 3a + b = -1 \end{cases}$$

cujas soluções são $a = -2$ e $b = 5$, logo a equação da reta pedida é $y = -2x + 5$.

2º modo:

O coeficiente angular da reta pedida é

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 1}{3 - 2} = -2.$$

Como a reta passa pelos pontos P e Q , podemos escolher qualquer um desses pontos para substituir na equação da reta $y = -2x + b$, para encontrarmos o valor de b . Substituindo o ponto P , temos que

$$1 = -2 \cdot 2 + b$$

então $b = 5$ e a equação da reta pedida é

$$y = -2x + 5.$$

EXEMPLO 3.2.2: O número de veículos de uma cidade cresceu linearmente a partir do ano 2000. Sabendo que a cidade tinha 150 mil veículos em 2004 e 210 mil veículos em 2012.

Defina uma função que forneça o número de veículos (em milhares) em relação ao tempo (anos) transcorrido desde o ano 2000.

Inicialmente vamos considerar que $x = 0$ corresponde ao ano 2000, $x = 1$ corresponde ao ano 2001, $x = 2$ corresponde ao ano 2002 e assim sucessivamente. Seja y a quantidade de veículos (cada mil) dessa cidade e que cresce linearmente

(a função é uma reta). Temos dois pontos dados no enunciado $P = (4, 150)$, que quer dizer que em $x = 4$ (ano de 2004) a cidade tinha 150 mil veículos e $Q = (12, 210)$, que quer dizer que em $x = 12$ (ano de 2012) a cidade tinha 210 mil veículos. Logo, o coeficiente angular dessa reta será

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{210 - 150}{12 - 4} = \frac{60}{8} = \frac{15}{2} = 7,5$$

Para encontrarmos o valor de b , substituímos o ponto P (poderia ser o Q , tanto faz) na equação

$$y = 7,5x + b,$$

logo

$$150 = 7,5 \cdot 4 + b$$

então $b = 120$, logo a equação da reta pedida é

$$y = 7,5x + 120.$$

Determine aproximadamente o número de veículos no ano 2000.

O ano 2000 corresponde a $x = 0$, então

$$y = 7,5 \cdot 0 + 120 = 120.$$

Logo em 2000 o número de veículos era 120 mil.

Determine em que ano a cidade terá 360 mil veículos.

Nesse caso, basta substituímos y por 360, na equação encontrada, logo

$$360 = 7,5x + 120$$

então $x = 32$. Logo, a cidade terá 360 veículos no ano 2032.

3.2.2 Zero e Monotonicidade da função Afim

Para determinarmos o zero de uma função afim, basta resolver a equação $ax + b = 0$, supondo que $a \neq 0$, temos que o zero de uma função do 1º grau é

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Quanto a monotonicidade de uma função afim se $a > 0$ a função é sempre crescente, se $a < 0$ a função é sempre decrescente. Por definição, uma função do 1º grau exige que $a \neq 0$. Caso o coeficiente a seja igual a zero, a função resulta em $f(x) = b$, sendo classificada apenas como uma função constante, não possuindo inclinação nem sendo considerada uma função de 1º grau.

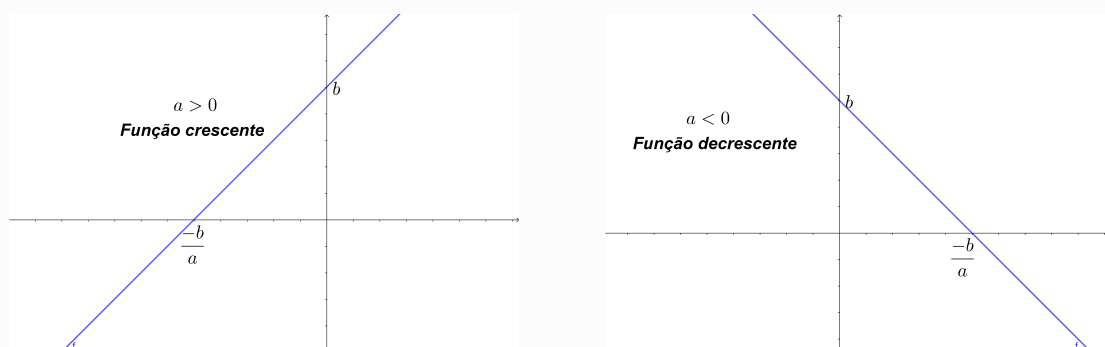


Figura 3.3: Representação gráfica da monotonicidade da função afim, destacando o comportamento crescente, $a > 0$, e decrescente, $a < 0$, e os respectivos zeros da função $x = -\frac{b}{a}$.

3.2.3 Gráfico de uma função Afim

Como já sabemos que o gráfico de uma função do 1º grau é uma reta, precisamos de apenas dois pontos pertencentes a essa reta para o esboço do gráfico. Em particular, se tivermos os interceptos com os eixos coordenados

$$\left(-\frac{b}{a}, 0\right) \quad \text{e} \quad (0, b)$$

conseguimos fazer o esboço do gráfico com muita facilidade.

EXEMPLO 3.2.3: Construa o gráfico da função $f(x) = 2x - 6$.

Crescimento

Como $a = 2$ ($a > 0$), a função é crescente.

Zero da Função (Intercepto no eixo x)

Fazemos $f(x) = 0$

$$2x - 6 = 0$$

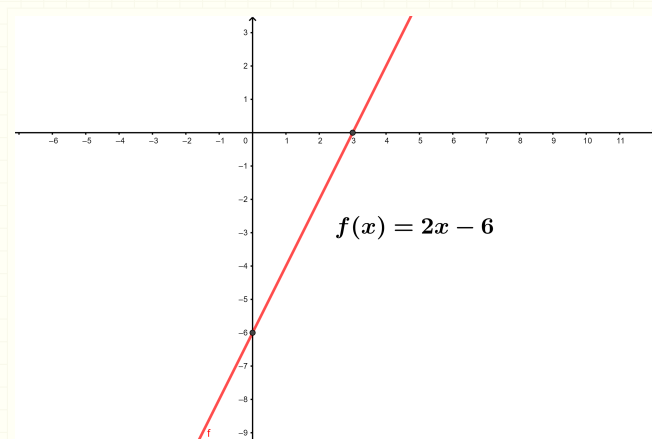
$$2x = 6$$

$$x = 3$$

O intercepto no eixo das abscissas é o ponto $(3, 0)$.

Intercepto no eixo y

É o valor do coeficiente linear b . Como $b = -6$, o ponto é $(0, -6)$.



EXEMPLO 3.2.4: Construa o gráfico da função $g(x) = -x - 4$.

Crescimento

Como $a = -1$ ($a < 0$), a função é decrescente.

Zero da Função (Intercepto no eixo x)

Fazemos $g(x) = 0$:

$$-x - 4 = 0$$

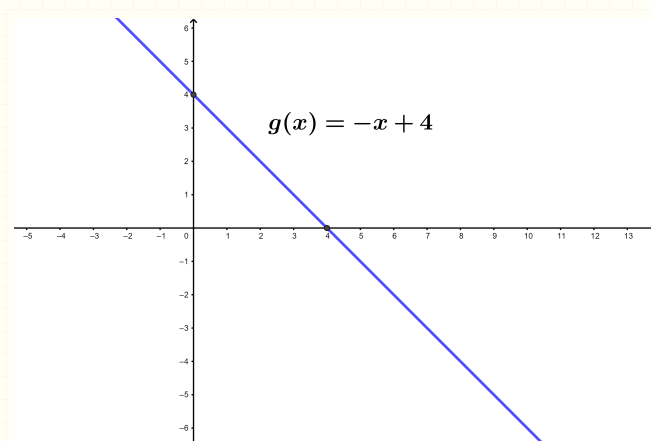
$$-x = 4$$

$$x = -4$$

O intercepto no eixo das abscissas é o ponto $(-4, 0)$.

Intercepto no eixo y

Como $b = -4$, o ponto é $(0, -4)$.



EXEMPLO 3.2.5: Construa o gráfico da função $h(x) = 2x$.

Crescimento

Como $a = 2$ ($a > 0$), a função é crescente.

Zero da Função (Intercepto no eixo x)

$$2x = 0$$

$$x = 0.$$

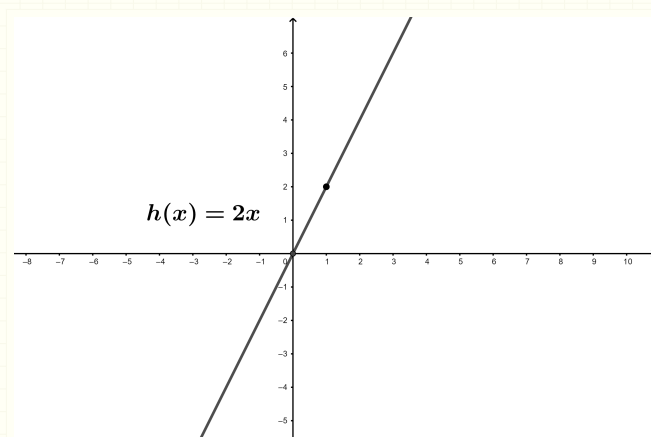
O ponto é $(0, 0)$.

Intercepto no eixo y

Como $b = 0$, o ponto também é $(0, 0)$.

Nota Didática

Como a reta passa pela origem, utiliza-se um ponto auxiliar, como $x = 1$, $h(1) = 2$, resultando no ponto $(1, 2)$.



3.2.4 Algumas retas particulares:

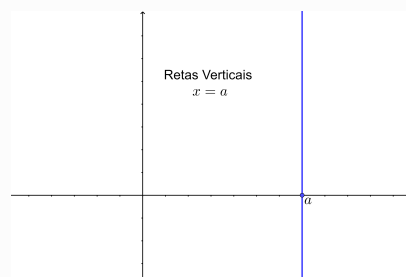
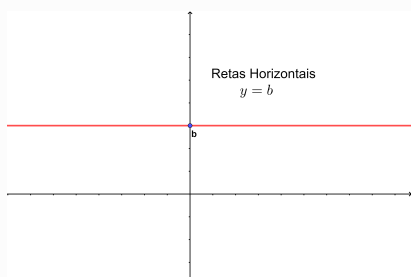


Figura 3.4: Gráfico da reta horizontal $y = b$ e da reta vertical $x = a$.

3.3 Função do segundo grau ou função quadrática

Uma função é dita **quadrática** se pode ser escrita na forma de um polinômio do 2º grau

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

em que $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. O gráfico de uma função quadrática é uma parábola e é possível esboçá-lo a partir de sua(s) raiz(es), caso exista(m), ou das coordenadas do vértice.

3.3.1 Encontrando zeros e as coordenadas do vértice da parábola —

Para que possamos deduzir os zeros de uma função quadrática, vamos completar quadrados.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

colocando a em evidência

$$a \left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} \right) = 0$$

sendo $a \neq 0$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

completando quadrado

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Definindo

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

temos que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui raiz real se e somente se $\Delta \geq 0$ e nesse caso

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Resumindo.

Se $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais (as raízes são complexas).

Se $\Delta > 0$, a equação possui duas raízes reais distintas:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Se $\Delta = 0$, a equação possui uma única raiz real de multiplicidade 2 (raiz dupla)

$$x_1 = \frac{-b}{2a} = x_2.$$

Em ambos os casos, $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser reescrita como

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Logo, o gráfico de f pode ser pensado como uma dupla translação de

$$g(x) = ax^2.$$

Transladamos

$$\frac{-\Delta}{4a}$$

no eixo y e

$$\frac{-b}{2a}$$

no eixo x . Como g possui vértice $(0, 0)$, f possui vértice

$$(x_v, y_v) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$$

e seu gráfico é simétrico em relação à reta $x = x_v$.

Se $a > 0$ então a parábola tem concavidade voltada para cima, além disso f tem um único ponto de mínimo dado por

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

e o valor mínimo é dado por

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}.$$

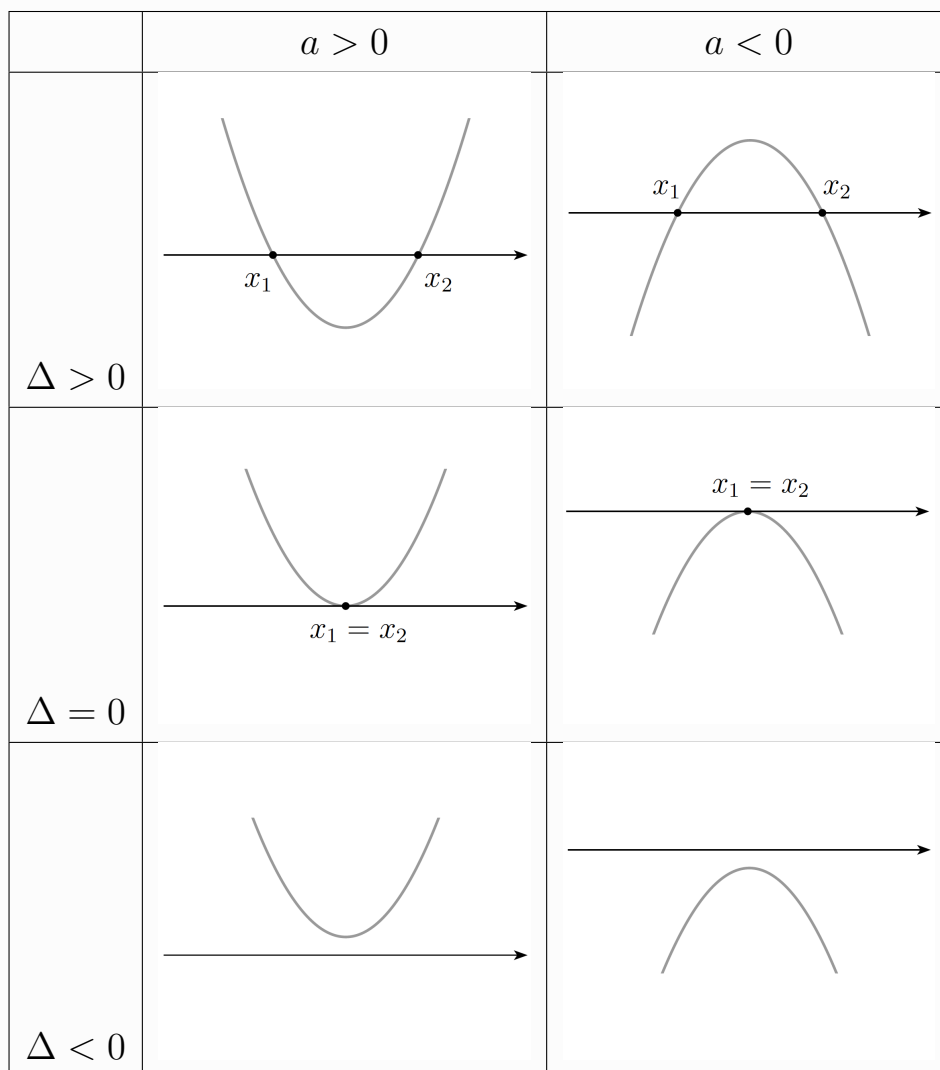
Se $a < 0$ então a parábola tem concavidade voltada para baixo, além disso f tem um único ponto de máximo dado

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

e o valor máximo é dado por

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}.$$

A Figura a seguir ilustra o que foi discutido nessa seção.



Se tivermos as coordenadas dos vértices, os zeros e o interceptos com o eixo y podemos fazer o esboço do gráfico de uma equação do segundo grau com muita facilidade.

EXEMPLO 3.3.1: Considere a seguinte função

$$f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

Encontre os zeros, as coordenadas do vértice, o intercepto com o eixo y e use esses dados para fazer o esboço do gráfico de f .

Zeros

Para encontrarmos os zeros precisamos resolver a equação

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\x^2 - 5x + 6 &= 0,\end{aligned}$$

cujo

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$$

e

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1}$$

obtendo $x = 2$ ou $x = 3$, portanto temos os pontos $P_1 = (2, 0)$ e $P_2 = (3, 0)$, esses pontos são os interceptos com o eixo x .

Vértices

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-5)}{2 \cdot 1} = \frac{5}{2}$$

e

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-1}{4 \cdot 1} = -\frac{1}{4},$$

logo

$$V = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right).$$

Intercepto com o eixo y

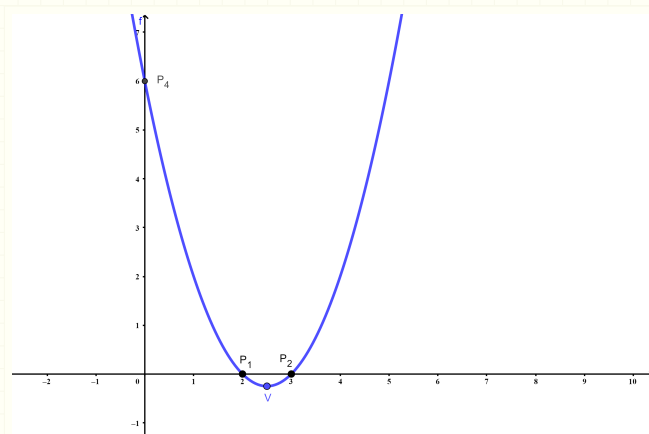
Para encontrarmos o intercepto com o eixo y , temos que encontrar

$$f(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 6,$$

logo temos o ponto $P_4 = (0, 6)$.

Gráfico

O gráfico dessa função está esboçado na imagem a seguir.



EXEMPLO 3.3.2: Faça o esboço do gráfico da parábola $y = x^2 - x + 2$.

Zeros

Para encontrarmos os zeros precisamos resolver a equação

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^2 - x + 2 &= 0, \end{aligned}$$

cujo

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0,$$

logo a função não possui zeros, com isso não intercepta o eixo x .

Vértice

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

e

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-7)}{4 \cdot 1} = \frac{7}{4},$$

logo

$$V = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4} \right).$$

Intercepto com o eixo y

Para encontrarmos o intercepto com o eixo y , temos que encontrar

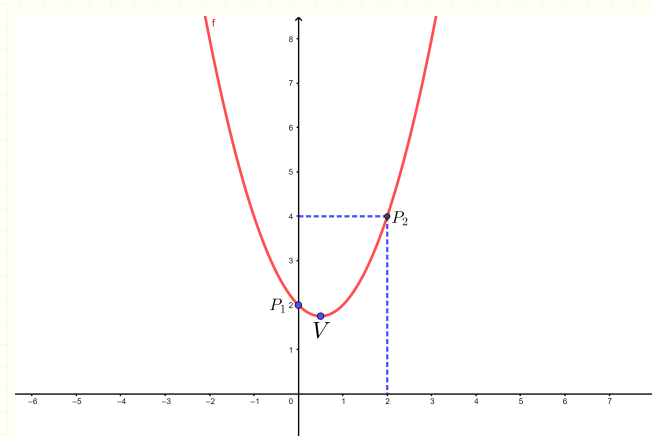
$$f(0) = 0^2 - 0 + 2 = 2,$$

logo temos o ponto $P_1 = (0, 2)$.

Note que temos apenas 2 pontos para marcar no gráfico, para que possamos ter uma ideia melhor da parábola vamos escolher outro ponto do domínio. Como já temos o ponto P_1 , cuja coordenada x está (na reta real) antes do x_v , vamos calcular $f(2) = 4$ e daí temos o ponto $P_2 = (2, 4)$.

Gráfico

O gráfico dessa função está esboçado na imagem a seguir.



EXEMPLO 3.3.3: Faça o esboço do gráfico da parábola $y = -x^2 + 4x$.

Zeros

Para encontrarmos os zeros precisamos resolver a equação

$$f(x) = 0$$

$$-x^2 + 4x = 0,$$

como essa equação é incompleta ($c = 0$), vamos resolver fatorando, ou seja,

$$-x^2 + 4x = x(-x + 4)$$

portanto $x = 0$ ou $x = 4$. Assim, temos os pontos $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (4, 0)$.

Vértice

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2$$

e

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{16}{4(-1)} = 4,$$

logo

$$V = (2, 4).$$

Intercepto com o eixo y

Para encontrarmos o intercepto com o eixo y , temos que encontrar

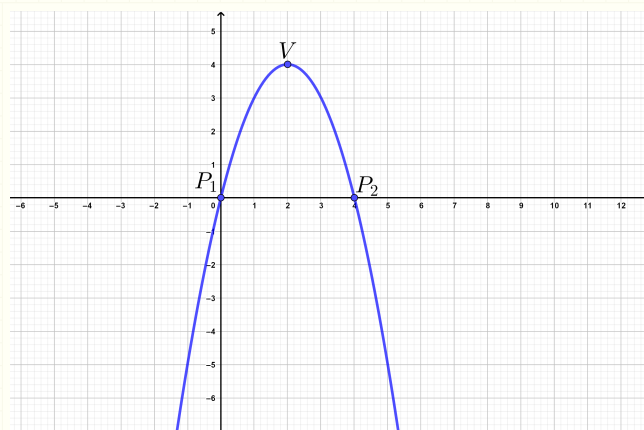
$$f(0) = -0^2 + 4 \cdot 0 = 0,$$

logo temos o ponto

$$P_4 = P_1 = (0, 0).$$

Gráfico

O gráfico dessa função está esboçado na imagem a seguir.



3.4 Inequação do Segundo Grau

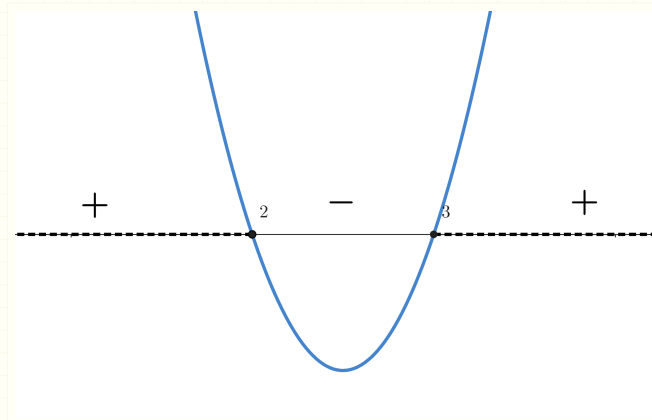
Para resolver uma inequação do segundo grau, você deve resolver a equação do segundo grau correspondente e fazer o estudo do sinal.

EXEMPLO 3.4.1: Resolva a inequação $x^2 - 5x + 6 > 0$

Inicialmente devemos resolver a equação do segundo grau

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

cujas raízes, obtidas pela fórmula de Bhaskara são $x = 2$ e $x = 3$. Portanto, temos uma parábola com concavidade para cima ($a > 0$) e tocando o eixo x em dois pontos. Então “fora da parábola” colocamos o sinal de a e dentro sinal contrário a a como mostra a figura.



]-1

Logo, a solução da inequação é

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}.$$

EXEMPLO 3.4.2: Encontre os valores de x que satisfazem a desigualdade $9 \leq x^2$.

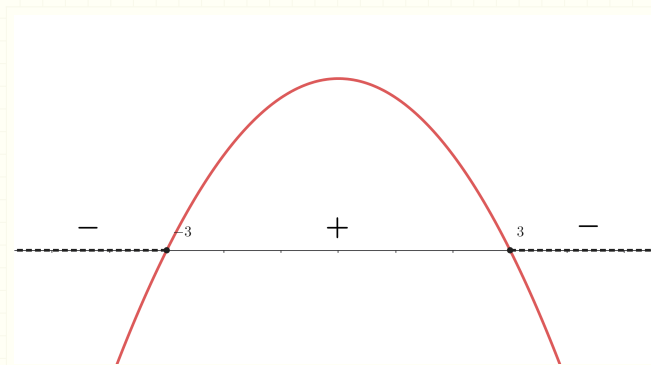
Note que $9 \leq x^2$ é equivalente a $-x^2 + 9 \leq 0$. Portanto, precisamos resolver a inequação do segundo grau

$$-x^2 + 9 \leq 0.$$

A equação do segundo grau correspondente é

$$-x^2 + 9 = 0,$$

onde $a = -1$, $b = 0$ e $c = 9$. As raízes dessa equação são $x = -3$ e $x = 3$. O estudo do final é mostrado na figura.



Logo, a solução pedida é

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ ou } x \geq 3\}.$$

3.5 Divisão de polinômios

Dividir um polinômio $f(x)$ de grau n por um polinômio $g(x) \neq 0$ de grau menor que n é encontrar dois polinômios $q(x)$ e $r(x)$ tais que

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

O grau de $r(x)$ é menor que o grau de $g(x)$.

EXEMPLO 3.5.1: Dividir $f(x) = 6x^3 - 2x^2 + x + 3$ por $g(x) = x^2 - x + 1$.

$$\begin{array}{r|l}
 6x^3 - 2x^2 + x + 3 & x^2 - x + 1 \\
 -(6x^3 - 6x^2 + 6x) & 6x + 4 \\
 \hline
 4x^2 - 5x + 3 & \\
 -(4x^2 - 4x + 4) & \\
 \hline
 -x - 1 &
 \end{array}$$

Logo,

$$6x^3 - 2x^2 + x + 3 = (x^2 - x + 1)(6x + 4) - x - 1.$$

No exemplo anterior, realizamos a divisão do polinômio

$$P(x) = 6x^3 - 2x^2 + x + 3$$

pelo divisor

$$D(x) = x^2 - x + 1.$$

Para tornar o processo mais didático, seguimos as etapas:

1. Primeiro Termo do Quociente:

Dividimos o termo de maior grau do dividendo pelo de maior grau do divisor

$$\frac{6x^3}{x^2} = 6x.$$

Multiplicamos $6x$ por todo o divisor e subtraímos o resultado do dividendo original, obtendo o primeiro resto parcial

$$4x^2 - 5x + 3.$$

2. Segundo Termo do Quociente:

Repetimos o processo com o novo resto

$$\frac{4x^2}{x^2} = 4.$$

Multiplicamos 4 pelo divisor e subtraímos novamente. O resultado final dessa operação é

$$-x - 1.$$

3. Condição de Parada:

Como o grau do resto

$$R(x) = -x - 1$$

é menor que o grau do divisor

$$D(x) = x^2 - x + 1,$$

a divisão está concluída.

Resultado Final: A relação fundamental da divisão nos mostra que:

$$6x^3 - 2x^2 + x + 3 = (x^2 - x + 1)(6x + 4) + (-x - 1)$$

Onde o quociente é $Q(x) = 6x + 4$ e o resto é $R(x) = -x - 1$.

3.6 Produtos notáveis

Alguns produtos de expressões algébricas são encontrados tão frequentemente, que são chamados de **produtos notáveis**. Embora possamos calcular esses produtos usando a propriedade distributiva, acabamos, com o uso, decorando as fórmulas empregadas em sua obtenção. Segue abaixo alguns casos de produtos notáveis. Em todos os casos considere que a e b são números reais, variáveis ou expressões algébricas.

Quadrado da soma de dois termos

A expressão $(a+b)^2$ representa a área de um quadrado de lado $(a+b)$. Ao expandirmos, vemos que

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2.\end{aligned}$$

Assim,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{3.3}$$

Regra Prática: O quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo.

Quadrado da diferença de dois termos

Funciona de forma idêntica à soma, mas com atenção ao sinal negativo no termo central

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &= (a - b)(a - b) \\ &= a^2 - ab - ba + b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2.\end{aligned}$$

Assim,

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (3.4)$$

Regra Prática: O quadrado do primeiro termo, menos duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo termo.

Produto da soma pela diferença

Este é um dos mais úteis para simplificações e fatoração, pois os termos centrais se anulam

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= a^2 - ab + ba - b^2 \\ &= a^2 - b^2.\end{aligned}$$

Assim,

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \quad (3.5)$$

Regra Prática: Resulta sempre na diferença entre os quadrados dos dois termos.

Cubo da soma de dois termos

Para desenvolvermos o cubo da soma $(a + b)^3$, seguimos os seguintes passos. Escrevemos como o produto do quadrado pela base

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b).$$

Substituímos o resultado já conhecido do quadrado da soma

$$(a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b).$$

Aplicamos a distributiva termo a termo

$$(a + b)^3 = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$$

Somamos os termos semelhantes para chegar na fórmula final

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (3.6)$$

Cubo da diferença de dois termos

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad (3.7)$$

EXEMPLO 3.6.1: Calcule o produto notável $(2x + 5)^2$

Nesse caso temos o quadrado da soma de dois termos (3.3), então

$$\begin{aligned}(2x + 5)^2 &= (2x)^2 + 2 \cdot 2x5 + 5^2 \\ &= 4x^2 + 20x + 25\end{aligned}$$

EXEMPLO 3.6.2: Calcule o produto notável $(x - 2)(x + 2)$

Aqui temos o produto da soma pela diferença (3.5), logo

$$\begin{aligned}(x - 2)(x + 2) &= x^2 - 2^2 \\ &= x^2 - 4\end{aligned}$$

EXEMPLO 3.6.3: Calcule o produto notável $(y + 4)^3$

Usando a fórmula do cubo da soma de dois termos (3.6),

$$\begin{aligned}(y + 4)^3 &= y^3 + 3y^24 + 3y4^2 + 4^3 \\ &= y^3 + 12y^2 + 48y + 64\end{aligned}$$

EXEMPLO 3.6.4: Calcule o produto notável $\left(5 - \frac{4}{y}\right)^2$

Aqui temos o quadrado da diferença de dois termos (3.4), portanto

$$\begin{aligned}\left(5 - \frac{4}{y}\right)^2 &= 5^2 - 2 \cdot 5 \frac{4}{y} + \left(\frac{4}{y}\right)^2 \\ &= 25 - \frac{40}{y} + \frac{16}{y^2}.\end{aligned}$$

EXEMPLO 3.6.5: Calcule o produto notável $(\sqrt[3]{x} - 1)^3$

Nesse caso temos o cubo da diferença, então

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{x} - 1)^3 &= (\sqrt[3]{x})^3 - 3(\sqrt[3]{x})^2 \cdot 1 + 3\sqrt[3]{x} \cdot 1^2 - 1^3 \\ &= x - 3\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} - 1\end{aligned}$$

3.7 Fatoração

Na seção anterior, usamos a propriedade distributiva para expandir uma expressão algébrica (produtos notáveis). Nessa seção faremos o processo inverso, tomaremos uma expressão algébrica expressa na forma expandida e reescreveremos em produtos de fatores mais simples, a esse processo daremos o nome de **fatoração**. A seguir serão apresentados algumas maneiras de fatorar expressões algébricas.

3.7.1 Fator Comum

Fator comum

$$ax + bx = x(a + b)$$

EXEMPLO 3.7.1: Fatore a expressão $3x^2 - 6x$.

Primeiramente identificamos o fator comum, note que podemos escrever

$$3x^2 - 6x = 3xx - 2 \cdot 3x$$

Com isso, os fatores 3 e x aparecem nos dois termos. Colocando o termo $3x$ em evidência, obtemos

$$3x^2 - 6x = 3x(x - 2),$$

que é a forma fatorada do polinômio.

3.7.2 Agrupamento

Agrupamento

$$ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$$

EXEMPLO 3.7.2: Fatore a expressão $2xy - 12x + 3by - 18b$.

Note que $2x$ é fator comum dos dois primeiros termos e $3b$ é fator comum nos últimos dois. Portanto, colocando em evidência, chegamos que

$$2xy - 12x + 3by - 18b = 2x(y - 6) + 3b(y - 6)$$

Agora temos que $(y - 6)$ é fator comum. Colocando em evidência, obtemos

$$2xy - 12x + 3by - 18b = 2x(y - 6) + 3b(y - 6) = (y - 6)(2x + 3b)$$

que é a forma fatorada do polinômio.

3.7.3 Diferença de Dois Quadrados

Diferença de dois quadrados

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

EXEMPLO 3.7.3: Suponha que precisamos fatorar a expressão $4x^2 - 9$.

Bata notar que

$$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2$$

Portanto,

$$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x - 3)(2x + 3).$$

3.7.4 Trinômio Quadrado Perfeito

Trinômio quadrado perfeito

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

EXEMPLO 3.7.4: Fatore a expressão $x^2 + 4x - 4$.

Basta notar que

$$x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2 = (x - 2)^2.$$

3.7.5 Soma e Diferença de Dois Cubos

Soma e diferença de dois cubos

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

EXEMPLO 3.7.5: Fatore o polinômio $27x^3 + 64$.

Se notarmos que

$$27x^3 + 64 = (3x)^3 + 4^3$$

então

$$27x^3 + 64 = (3x)^3 + 4^3 = (3x + 4)(9x^2 - 12x + 16)$$

é a forma fatorada do polinômio $27x^3 + 64$.

3.7.6 Fatoração de Polinômios Usando Suas Raízes

Seja $f(x)$ um polinômio de grau n e $a \in \mathbb{R}$. Sabemos que a divisão de $f(x)$ por $x - a$ nos fornece um polinômio $q(x)$ de grau $n - 1$ e resto $f(a)$, ou seja,

$$f(x) = (x - a)q(x) + f(a).$$

Logo, um polinômio $f(x)$ de grau n possui uma raiz real $a \in \mathbb{R}$, se e somente se, $f(x) = (x - a)q(x)$ em que $q(x)$ possui grau $n - 1$.

Um polinômio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

possui n raízes reais $r_1, r_2, \dots, r_n$, se e somente se, pode ser escrito na **forma fatorada**

$$f(x) = a_n (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n).$$

A dificuldade em fatorar um polinômio é exatamente em encontrar suas raízes. Para polinômios de grau 1 e 2 essa missão é simples, mas para polinômios de graus maiores é mais complicado. Temos uma ferramenta para determinar raízes de alguns polinômios que possuem raízes racionais:

TEOREMA 3.1: FATORAÇÃO DE POLINÔMIOS

Seja

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

um polinômio com coeficientes $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$ inteiros. Se essa equação possui uma raiz racional na forma p/q , com p e q números inteiros e p/q fração irredutível então a_0 é divisível por p e a_n é divisível por q .

O Teorema 3.1 não garante que a equação polinomial tenha raízes racionais, mas caso elas existam, o teorema permite identificar todas as raízes racionais do polinômio.

Se $a_n = 1$ e os outros coeficientes são todos inteiros, as candidatas as raízes do polinômio são inteiras.

EXEMPLO 3.7.6: Queremos fatorar o polinômio $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Pelo Teorema 3.1, as possíveis raízes inteiras de f são $\{\pm 1, \pm 2\}$ que são os divisores de $a_0 = 2$. Como

$$f(1) = 1 - 3 + 2 = 0,$$

e 1 é uma raiz de f . Dividindo

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

por $x - 1$ obtemos

$$x^2 + x - 2$$

que pode ser reescrito como

$$(x - 1)(x + 2).$$

Logo, f pode ser fatorado como

$$f(x) = (x - 1)^2(x + 2).$$

EXEMPLO 3.7.7: Fatore o polinômio $p(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$

Nesse item, temos um polinômio de grau 3, vamos verificar se esse polinômio possui raízes racionais. Segundo Teorema 3.1, essas possíveis raízes tem a forma p/q , onde p são os divisores do termo independente, no caso os divisores de -24 e q são os divisores do coeficiente do termo de maior grau, no caso 1. Logo, as possíveis raízes inteiras são

$$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24\}.$$

Vamos testar alguns desses valores para tentarmos encontrar uma raiz racional. Note que

$$p(1) = 1 - 9 + 26 - 24 - 6 = -6 \neq 0,$$

logo $x = 1$ não é uma raiz.

$$p(2) = 8 - 36 + 52 - 24 = 0,$$

logo $x = 2$ é uma raiz. De posse dessa raiz vamos dividir o polinômio $p(x)$ por $x - 2$.

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 9x^2 + 26x - 24 & x - 2 \\
 -(x^3 - 2x^2) & x^2 - 7x + 12 \\
 \hline
 -7x^2 + 26x - 24 & \\
 -(-7x^2 + 14x) & \\
 \hline
 12x - 24 & \\
 -(12x - 24) & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Para encontrar as outras raízes, basta resolver a equação

$$x^2 - 7x + 12 = 0,$$

cujas as raízes (por Bhaskara) são $x = 3$ e $x = 4$. Logo o polinômio fatorado é

$$p(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 4).$$

EXEMPLO 3.7.8: Fatore o polinômio $p(x) = 2x^2 - 10x + 12$

Nesse caso temos um polinômio de grau 2, cujas raízes podem ser encontradas facilmente, usando a fórmula de Bhaskara. As raízes são $x = 2$ e $x = 3$ e o polinômio fatorado é

$$p(x) = 2(x - 2)(x - 3).$$

EXEMPLO 3.7.9: Fatore o polinômio $p(x) = 4x^4 - 34x^2 - 18$ (Equação Biquadrada)

Para encontrarmos os zeros de p precisamos resolver a equação $p(x) = 0$. Uma equação biquadrada tem a forma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

para resolvermos fazemos a mudança de variável $y = x^2$. No nosso, ao fazermos

essa mudança, chegamos na equação

$$\begin{aligned}4y^2 - 34y - 18 &= 0, \\2y^2 - 17y - 9 &= 0,\end{aligned}$$

que é uma equação do segundo grau e, para resolvermos usando a fórmula de Bhaskara.

$$\Delta = (-17)^2 - 4 \cdot 2(-9) = 361$$

que nos leva a

$$y = \frac{17 \pm \sqrt{361}}{4}$$

portanto, $y = 9$ ou $y = -1/2$. Se $y = 9$

$$\begin{aligned}x^2 &= 9 \\x &= \pm 3\end{aligned}$$

Se $y = -1/2$

$$x^2 = -\frac{1}{2},$$

que não tem solução real, pois o polinômio $x^2 + 1/2$ é irreduzível, logo ele “entrará” dessa forma na fatoração. Logo, o polinômio fatorado é

$$p(x) = 4(x - 3)(x + 3) \left(x^2 + \frac{1}{2} \right).$$

3.7.7 Simplificação de Expressões

A fatoração é muito útil para simplificar expressões. Nessa subseção usaremos os casos de fatoração, expostos anteriormente, para simplificar expressões. Vejamos os exemplos a seguir.

EXEMPLO 3.7.10: Simplifique a expressão

$$\frac{2x - 6}{x - 3}$$

fatorando os termos, caso necessário. Suponha que o denominador não é nulo.

No numerador vamos colocar o número 2 em evidência, uma vez que é comum a todos os membros. Assim

$$\begin{aligned}\frac{2x - 6}{x - 3} &= \frac{2(x - 3)}{x - 3} \\ &= \frac{2\cancel{(x - 3)}}{\cancel{x - 3}} && \text{usando que } x \neq 3 \\ &= 2.\end{aligned}$$

Note que, podemos cancelar o termo $x - 3$, pois é nos dito no enunciado que os denominadores são não nulos, ou seja, $x - 3 \neq 0$ e, portanto, $x \neq 3$.

EXEMPLO 3.7.11: Simplifique a expressão fatorando os termos, caso necessário.

$$\frac{x^2 + x^4}{3x^3}$$

Suponha que o denominador não é nulo.

Nesse caso, vamos colocar x^2 em evidência no numerador.

$$\begin{aligned}\frac{x^2 + x^4}{3x^3} &= \frac{x^2(1 + x^2)}{3x^2x} \\ &= \frac{\cancel{x^2}(1 + x^2)}{3\cancel{x^2}x} && \text{usando que } x \neq 0 \\ &= \frac{1 + x^2}{3x}.\end{aligned}$$

EXEMPLO 3.7.12: Simplifique a expressão fatorando os termos, caso necessário.

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$$

Suponha que o denominador não é nulo.

Nesse exercício devemos notar que no numerador temos uma diferença de dois quadrados, uma vez que

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3).$$

Além disso, podemos colocar o termo x em evidência no denominador, ou seja,

$$x^2 - 3x = x(x - 3).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} &= \frac{(x - 3)(x + 3)}{x(x - 3)} \\ &= \frac{\cancel{(x - 3)}(x + 3)}{x\cancel{(x - 3)}} && \text{usando que } x \neq 3 \\ &= \frac{x + 3}{x}. \end{aligned}$$

Mais uma vez vale ressaltar que para fazermos o cancelamento do termo $x - 3$, teríamos que ter a informação (ou supor) que $x - 3 \neq 0$, isto é, $x \neq 3$. Como no enunciado temos a informação que o denominador é não nulo, temos que

$$\begin{aligned} x^2 - 3x &\neq 0 \\ x(x - 3) &\neq 0 \\ x &\neq 0 \text{ e } x \neq 3. \end{aligned}$$

EXEMPLO 3.7.13: Simplifique a expressão

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4}$$

fatorando os termos, caso necessário. Suponha que o denominador não é nulo.

Inicialmente, devemos lembrar que se temos um polinômio de grau 2, do tipo

$$p(x) = ax^2 + bx + c,$$

a sua forma fatorada é

$$p(x) = a(x - r_1)(x - r_2),$$

onde r_1 e r_2 são suas raízes, podendo acontecer que $r_1 = r_2$. Quando o polinômio não tiver raízes, dizemos que ele é irredutível, ou seja, não conseguimos fatorá-lo. Sendo assim, como no numerador, é um polinômio de grau 2, cujas raízes são

$r_1 = 1$ e $r_2 = 4$ (confira usando Bhaskara). Portanto, sua forma fatorada é

$$x^2 - 5x + 4 = 1(x - 1)(x - 4) = (x - 1)(x - 4).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4} &= \frac{(x - 4)(x - 1)}{x - 4} \\ &= \frac{\cancel{(x - 4)}(x - 1)}{\cancel{x - 4}} && \text{usando que } x \neq 4 \\ &= x - 1. \end{aligned}$$

EXEMPLO 3.7.14: Simplifique a expressão

$$\left(\frac{x^2 - 4x - 12}{x + 2} \right) \left(\frac{2x + 1}{x - 6} \right)$$

fatorando os termos, caso necessário. Suponha que os denominadores não são nulos.

Como $x^2 - 4x - 12$ é um polinômio de grau 2, cujas raízes são $x = -2$ e $x = 6$, sendo assim, a forma fatorada é

$$x^2 - 4x - 12 = (x + 2)(x - 6).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2 - 4x - 12}{x + 2} \right) \left(\frac{2x + 1}{x - 6} \right) &= \frac{(x + 2)(x - 6)}{x + 2} \frac{2x + 1}{x - 6} \\ &= (x - 6) \frac{2x + 1}{x - 6} && \text{usando que } x \neq -2 \\ &= 2x + 1. && \text{usando que } x \neq 6 \end{aligned}$$

3.8 Exercícios

1) [resp] Determine a equação da reta que passa pelos pontos dados:

- a) $(4, 1)$ e $(2, 3)$
- b) $(1, 2)$ e $(-2, -4)$

2) [resp] Um clube vem perdendo sócios a um ritmo constante ano após ano, tendo registrado 14 mil sócios em 2004 e apenas 8 mil sócios em 2013.

- a) Defina uma função linear (ou afim) $S(t)$ que

forneça o número de sócios do clube no ano t , supondo que t seja zero no ano 2000.

b) O clube pretende fechar as portas se o número de sócios chegar a 2 mil. Usando a função encontrada no item a), determine em que ano isso ocorrerá.

c) Construa o gráfico de S .

3) [resp] Sejam dadas as funções $f(x) = \frac{1}{6}x - 2$ e $g(x) = 3 - \frac{2}{3}x$.

a) Exiba os gráficos de f e g no mesmo plano cartesiano.

b) Determine para que valores de x a desigualdade $f(x) \leq g(x)$ é verdadeira.

4) [resp] (Minimização da área cercada) Um fazendeiro pretende usar 500 m de cerca para proteger um bosque retangular de comprimento x e largura y , às margens de um riacho.

a) Usando o comprimento da cerca, escreva o valor de y em função de x .

b) Com base na expressão encontrada no item a), escreva a função $A(x)$ que fornece a área cercada com relação a x .

c) Determine o valor de x que maximiza a área cercada. Determine também o valor de y e a área máxima.

d) Trace o gráfico de $A(x)$.

5) [resp] Dada a função $f(x) = x^2 - 3x$,

a) Determine algebricamente os pontos no quais $f(x) = 0$.

b) Determine algebricamente os pontos no quais $f(x) = -2$.

c) Esboce o gráfico da função no plano coordenado, indicando os pontos que foram obtidos no item anterior.

d) Determine graficamente a solução da inequação $f(x) \geq -2$. Confirme sua resposta resolvendo analiticamente a inequação.

6) [resp] Dada a função $f(x) = 15x^2 + x - 2$,

a) Determine algebricamente os pontos no quais $f(x) = 0$.

b) Determine algebricamente os pontos no quais $f(x) \leq -2$.

c) determine algebricamente os pontos de mínimo ou máximo de f .

d) Esboce o gráfico de f

7) [resp] O lucro (em milhões de reais) que uma fábrica obtém com a venda de um produto é dado pela função $L(x) = -\frac{x^2}{2} + 3x + 64$, em que x é o valor gasto (também em milhões de reais) com propaganda de televisão. Calcule o valor que a empresa deve gastar com propaganda para obter o lucro máximo. Determine o lucro nesse caso.

8) [resp] Faça o esboço das parábolas a seguir.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 4$

b) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$

c) $f(x) = 2x + x^2$

d) $f(x) = -x^2 - 4$

e) $f(x) = (x - 4)(x + 1)$

f) $f(x) = -2x^2 + 8$

9) [resp] Deve-se construir um tanque de aço em forma de um cilindro circular reto de 3 m de altura com dois hemisférios nos extremos. O raio r ainda está por determinar. Expresse a área S da superfície do tanque em função de r .

10) [resp] Desenvolva as expressões:

a) $(x - 3)^2$

b) $(\sqrt{x} + 2)^2$

c) $(x^2 - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2})$

d) $(x - 1)(x^2 - 5)$

e) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} - 5)$

f) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

g) $(3x - 2)^2$

h) $(\sqrt{x} - \sqrt{3})^2$

i) $x(2xy - 5)(x - y)$

j) $(x - 4y)^3$

11) [resp] Simplifique as expressões, fatorando os termos, caso necessário. Suponha sempre que os denominadores são não nulos.

a) $\frac{2x - 6}{x - 3}$

b) $\frac{x^2 - x^3}{x}$

c) $\frac{x^2 - 3x}{4x - 12}$

d) $\frac{2x^2 - 50}{x^3 + 5x^2}$

e) $\frac{x^3 - 8}{x - 2}$

f) $\frac{x^2y - xy^2}{xy}$

g) $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$

h) $\frac{x^4 - y^4}{x - y}$

i) $\frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4}$

j) $\frac{x - 9}{\sqrt{x} + 3}$

12) [resp] Encontre as raízes dos polinômios a seguir e escreva-os na forma fatorada.

a) $p(x) = 9x^4 - 10x^2 + 1$

b) $q(x) = x^3 - 4x^2 - 17x + 60$

c) $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 23x + 12$

d) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$

13) [resp] Encontre o resto e o quociente da divisão dos seguintes polinômios

a) $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6$ por $d(x) = 2x - 4$

b) $p(x) = 6x^4 + 5x^3 - 2x$ por $d(x) = 3x - 2$

c) $g(x) = 6x^2 + 7x + 9$ por $2x^2 - 5x + 1$

14) [resp] Resolva as inequações

a) $3x - 5 \leq 0$

b) $(x + 2)(x - 3) \leq 0$

c) $x^2 - 3x \geq 0$

d) $-4x^2 + 12x - 9 \leq 0$

e) $\frac{x - 2}{x + 3} \leq 0$

f) $\frac{x + 8}{x^2 + 7x + 12} \leq 0$

Funções Definidas Por Partes e Função Modular

4.1	Função definida por partes	70
4.2	Função modular	71
4.3	Equações e Inequações modulares	78
4.4	Exercícios	81

4.1 Função definida por partes

A tarifa mensal de um plano de telefonia fixa tem duas faixas de preço

- ◇ Os clientes que usam até 400 minutos mensais em ligações pagam um valor fixo de R\$ 40,00 por mês;
- ◇ Para cada minuto adicional (ou seja, que excede os 400 minutos) paga-se R\$ 0,05.

Se consideramos que um cliente fale x minutos por mês, podemos encontrar uma função que fornece o valor a ser pago (por mês) da conta telefônica.

Primeiramente note que se suas ligações ultrapassarem 400 minutos, o tempo adicional equivalerá a $x - 400$.

Para determinar a função f que fornece o valor mensal da conta, devemos considerar as duas situações previstas no plano

se $x \leq 400$, então $f(x) = 40$;

se $x > 400$, então $f(x) = 40 + 0,05(x - 400)$.

Em síntese, temos a seguinte função definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} 40, & \text{se } x \leq 400, \\ 40 + 0,05(x - 400) & \text{se } x > 400. \end{cases}$$

DEFINIÇÃO 4.1: FUNÇÃO POR PARTES

Um função é dita definida por partes quando são definidas por mais de uma expressão.

EXEMPLO 4.1.1: Esboce o gráfico da função definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{se } x < 0, \\ x^2, & \text{se } 0 \leq x < 2, \\ 1, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

EXEMPLO 4.1.2: Esboce o gráfico da função definida por partes

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{2 - x}, & \text{se } x \neq 2, \\ 1, & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

4.2 Função modular

Antes de definirmos função modular, precisamos do conceito de valor absoluto.

DEFINIÇÃO 4.2

Dado um número real x , definimos o **valor absoluto**, ou **módulo** de x como

$$|a| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Note que a definição de valor absoluto é feita por partes. Se x é um número positivo, o valor absoluto é seu próprio valor. Logo, $|4| = 4$. Em contrapartida, se x é um valor negativo, o valor absoluto é obtido eliminando o sinal. Assim,

$$|-10| = -(-10) = 10.$$

EXEMPLO 4.2.1: Elimine o módulo da expressão $\left| -\frac{3}{2} \right|$ usando a definição de valor absoluto.

$$\begin{aligned} \left| -\frac{3}{2} \right| &= -\left(-\frac{3}{2} \right) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

EXEMPLO 4.2.2: Elimine o módulo da expressão $-|-5|$ usando a definição de valor absoluto.

Sabemos que $|-5| = 5$, então $-|-5| = -5$.

EXEMPLO 4.2.3: Elimine o módulo da expressão $\left| 3 - 2\sqrt{3} \right|$ usando a definição de valor absoluto.

Você deve atentar que

$$3 - 2\sqrt{3} < 0,$$

logo

$$\begin{aligned} \left| 3 - 2\sqrt{3} \right| &= -\left(3 - 2\sqrt{3} \right) \\ &= 2\sqrt{3} - 3. \end{aligned}$$

EXEMPLO 4.2.4: Elimine o módulo da expressão $|2x + 1|$ usando a definição de valor absoluto.

Nesse caso, usando a definição de módulo, temos

$$\begin{aligned} |2x + 1| &= \begin{cases} 2x + 1, & \text{se } 2x + 1 \geq 0 \\ -(2x + 1), & \text{se } 2x + 1 < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2x + 1, & \text{se } x \geq -1/2 \\ -2x - 1, & \text{se } x < -1/2 \end{cases} \end{aligned}$$

A seguir seguem algumas propriedades do valor absoluto, considerado a e b números reais.

$$|a| \geq 0 \quad (4.1)$$

$$|-a| = |a| \quad (4.2)$$

$$|ab| = |a| |b| \quad (4.3)$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad b \neq 0 \quad (4.4)$$

$$|a^n| = a^n \quad \text{se } n \text{ é par} \quad (4.5)$$

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (4.6)$$

$$|a - b| = a - b \quad \text{se } a \geq b \quad (4.7)$$

$$|a - b| = b - a \quad \text{se } a \leq b \quad (4.8)$$

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad (4.9)$$

Portanto, **função modular** ou **função valor absoluto** é uma função definida por partes, dada por

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

A Figura 4.1 mostra o gráfico da função modular, cujas características são:

- ◇ O domínio é $\mathbb{R}$.

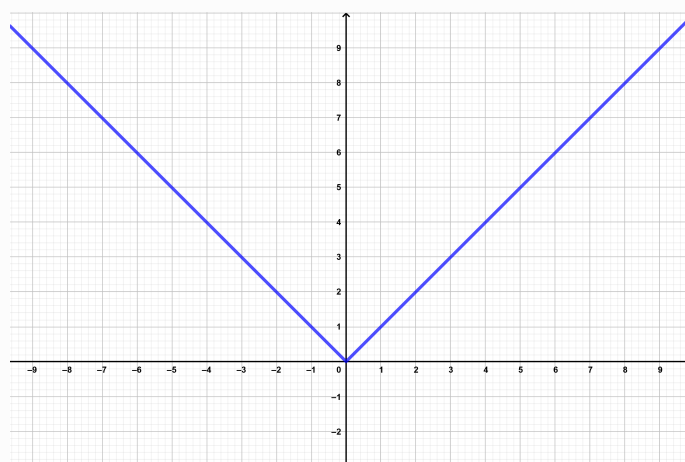
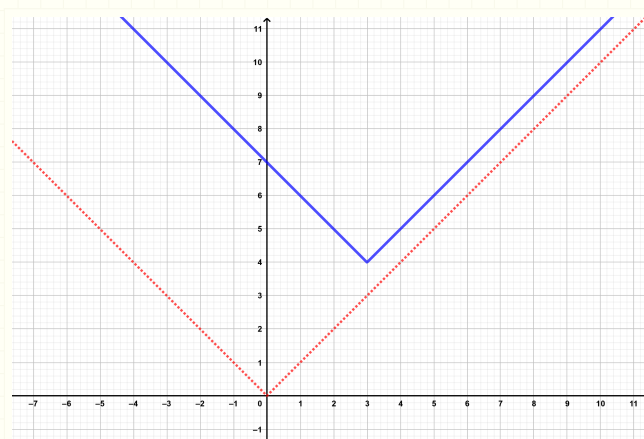


Figura 4.1: Gráfico da função modular.

- ◇ O conjunto imagem é $[0, \infty)$.
- ◇ Há um zero em $x = 0$.
- ◇ A função é decrescente em $(-\infty, 0)$ e crescente em $(0, \infty)$.
- ◇ A função é par.

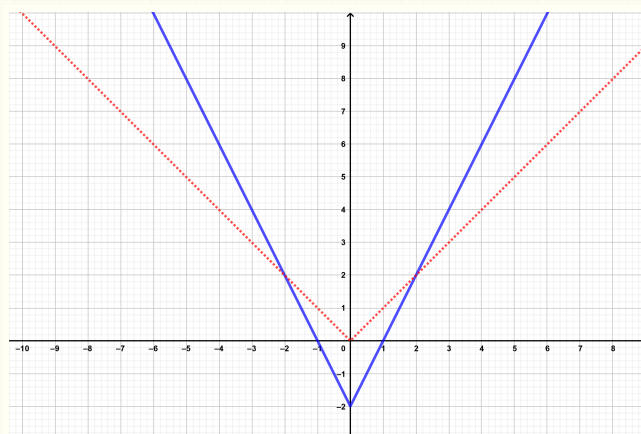
EXEMPLO 4.2.5: A partir do gráfico de $f(x) = |x|$ faça o esboço do gráfico da função $f(x) = |x - 3| + 4$

Nesse caso, para construir o gráfico de f basta deslocar o gráfico 4.1 3 unidades para a direita e 4 unidades para cima, conforme mostra a figura.



EXEMPLO 4.2.6: A partir do gráfico de $f(x) = |x|$ faça o esboço do gráfico da função $f(x) = 2|x| - 2$

Aqui, precisamos expandir o gráfico de $y = |x|$ verticalmente por um fator 2 e descer 2 unidades, conforme mostra a figura.



Ao compormos uma função modular com uma função f qualquer, obtemos o módulo de f que é dado por

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{se } f(x) < 0. \end{cases}$$

Em outras palavras, para fazer o esboço do gráfico da função $|f(x)|$, basta considerar os pedaços do gráfico de f que estão abaixo do eixo x e refleti-los com relação ao eixo x .

Por outro lado, se quisermos fazer o esboço do gráfico

$$f(x) = g(|x|),$$

ignoramos a parte do gráfico de $g(x)$ que está à esquerda do eixo y e refletimos, com relação ao eixo y , a parte do gráfico de $g(x)$ que está à direita do eixo y e então obtemos o gráfico da nova função. Funções obtidas dessa maneira são sempre pares, já que $f(x) = f(-x)$.

EXEMPLO 4.2.7: Faça o esboço do gráfico da função $f(x) = |2x - 9|$.

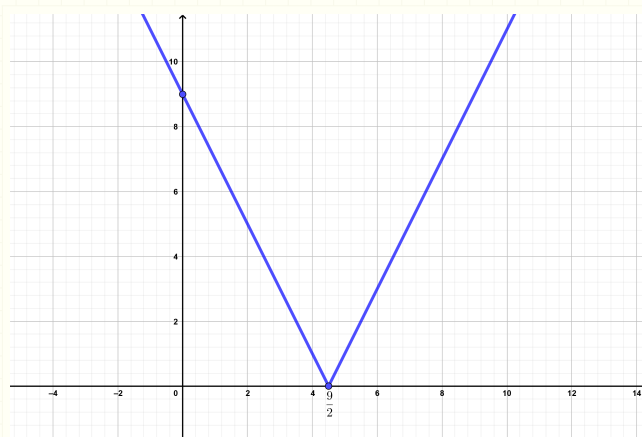
Nesse caso, temos que

$$f(x) = g(h(x)), \quad \text{onde } g(x) = |x| \quad \text{e} \quad h(x) = 2x - 9.$$

Portanto, para obtermos o gráfico de f , basta construirmos o gráfico de $h(x) = 2x - 9$ e refletir o pedaço desse gráfico que está abaixo do eixo x , com respeito ao eixo x .

$h(x)$ é uma função linear, cujo gráfico é uma reta, que aprendemos a esboçar no capítulo anterior.

A figura mostra o gráfico de f .



EXEMPLO 4.2.8: Faça o esboço do gráfico da função $g(x) = |x^2 - 3x + 2|$.

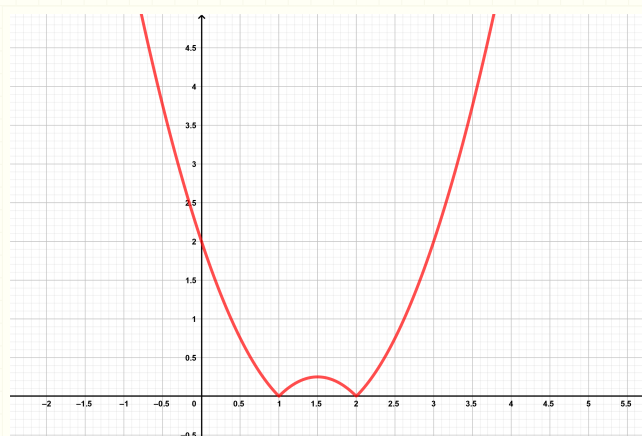
Do mesmo modo do item anterior, $g(x)$ é a composição de duas funções, ou seja,

$$g(x) = p(q(x)), \quad \text{com} \quad p(x) = |x| \quad \text{e} \quad q(x) = x^2 - 3x + 2.$$

Logo, para construir o gráfico de g , basta fazermos o esboço do gráfico de q e rebatermos a parte negativa com relação ao eixo x .

Sabemos que $q(x)$ é uma função quadrática e seu gráfico é uma parábola com concavidade voltada para cima e o procedimento para o esboço do gráfico de q foi apresentado no capítulo anterior.

A figura mostra o gráfico de g .



EXEMPLO 4.2.9: Faça o esboço do gráfico da função $f(x) = |x|^2 - 4|x| + 3$.

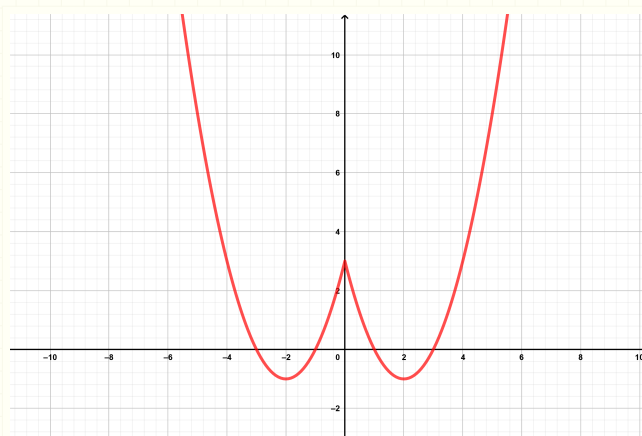
Note que

$$f(x) = g(|x|), \quad \text{onde} \quad g(x) = x^2 - 4x + 3.$$

Para fazer o esboço do gráfico de $f(x)$, ignoramos a parte do gráfico de $g(x)$ que está à esquerda do eixo y e refletimos, com relação ao eixo y , a parte do gráfico de $g(x)$ que está a direita desse eixo.

O gráfico de g é uma parábola, com concavidade voltada para cima.

Sendo assim, a figura apresenta o esboço do gráfico de g .



4.3 Equações e Inequações modulares

4.3.1 Soluções de Equações Modulares

Dadas as expressões algébricas A e B , as soluções da equação $|A| = B$ devem satisfazer

$$B \geq 0 \quad \text{e} \quad (A = B \quad \text{ou} \quad -A = B).$$

EXEMPLO 4.3.1: Resolva a equação modular $|5x - 2| = 13$.

Observe que nesse caso temos uma equação do tipo $|A| = B$, com $B > 0$.

Logo,

$$5x - 2 = 13 \quad \text{ou} \quad -(5x - 2) = 13,$$

resolvendo essas duas equações obtemos que o conjunto solução da equação pedida é

$$S = \left\{ -\frac{11}{5}, 3 \right\}.$$

EXEMPLO 4.3.2: Resolva a equação modular $|2x - 5| - |x - 2| = 3x + 1$.

Para resolver essa equação modular, dividiremos a análise dos módulos em etapas, analisando cada módulo separadamente.

Primeiro caso $|2x - 5|$

$$|2x - 5| = 2x - 5, \text{ se } 2x - 5 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{5}{2}.$$

$$|2x - 5| = -(2x - 5), \text{ se } 2x - 5 < 0 \rightarrow x < \frac{5}{2}.$$

Segundo caso $|x - 2|$

$$|x - 2| = x - 2, \text{ se } x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2.$$

$$|x - 2| = -(x - 2), \text{ se } x - 2 < 0 \rightarrow x < 2.$$

Fazendo a análise nos intervalos

	$(-\infty, 2)$	$[2, 5/2)$	$[5/2, \infty)$
$ 2x - 5 $	$-(2x - 5)$	$-(2x - 5)$	$2x - 5$
$ x - 2 $	$-(x - 2)$	$x - 2$	$x - 2$
$ 2x - 5 - x - 2 $	$-x + 3$	$-3x + 7$	$x - 3$

Intervalo $(-\infty, 2)$

$$-x + 3 = 3x + 1$$

$$-4x = -2$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Note que $x = 1/2$ pertence ao intervalo $(-\infty, 2)$.

Intervalo $[2, 5/2)$

$$-3x + 7 = 3x + 1$$

$$-6x = -6$$

$$x = 1$$

Note que $x = 1$ não pertence ao intervalo $[2, 5/2)$, logo não pode ser solução da equação.

Intervalo $[5/2, \infty)$

$$x - 3 = 3x + 1$$

$$-2x = 4$$

$$x = -2$$

Note que $x = -2$ não pertence ao intervalo $[5/2, \infty)$, logo não pode ser solução da equação.

Portanto a única solução da equação é $S = \{1/2\}$.

4.3.2 Soluções de Inequações Modulares

Dada a constante real $c \geq 0$ e a expressão algébrica A , temos

Inequação	Condição equivalente
$ A \leq c$	$-c \leq A \leq c$
$ A \geq c$	$A \leq -c \quad \text{ou} \quad A \geq c$

EXEMPLO 4.3.3: Resolva a inequação $|2x + 3| \geq 4$.

Resolver a inequação

$$|2x + 3| \geq 4$$

é equivalente resolver as inequações

$$2x + 3 \leq -4 \quad \text{e} \quad 2x + 3 \geq 4.$$

Resolvendo a primeira inequação

$$2x + 3 \leq -4 \Rightarrow 2x \leq -7 \Rightarrow x \leq -\frac{7}{2}.$$

Resolvendo a segunda inequação

$$2x + 3 \geq 4 \Rightarrow 2x \geq 1 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

Fazendo a união dos intervalos encontrados obtemos que a solução da inequação pedida é

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{7}{2} \quad \text{ou} \quad x \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

EXEMPLO 4.3.4: Resolva a inequação $|4x^2 - 1| \leq x + 2$.

Nesse caso, primeiro temos que impor que $x + 2 \geq 0$, isto é $x \geq -2$. Resolver a inequação $|4x^2 - 1| \leq x + 2$ é equivalente resolver a inequação simultânea $-(x + 2) \leq 4x^2 - 1 \leq x + 2$.

1. $-x - 2 \leq 4x^2 - 1 \Rightarrow 4x^2 + x + 1 \geq 0$, que é uma inequação do segundo

grau (Veja no Cap.2 como resolver), cuja solução é todo o conjunto dos números reais, isto é, $S_1 = \{x \in \mathbb{R}\}$.

2. $4x^2 - 1 \leq x + 2 \Rightarrow 4x^2 - x - 3 \leq 0$, cuja solução é $S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{4} \leq x \leq 1\}$.

Fazendo a intersecção desses intervalos, temos que a solução geral da inequação modular é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{4} \leq x \leq 1\}$.

EXEMPLO 4.3.5: Resolva a inequação $|x - 3| - |5x - 2| \geq x - 2$.

4.4 Exercícios

1) [resp] Elimine o módulo das seguintes expressões:

- a) $|8| + |-3|$
- b) $|\sqrt{8} - 4|$
- c) $|5x + 1|$
- d) $|x^2 - 9|$
- e) $5 - |x|$

2) [resp] Resolva as seguintes equações modulares

- a) $|5 - 4x| = 1$
- b) $|\frac{7-4x}{3}| = 5 + x$
- c) $|x - 7| - |3x - 1| = -x + 3$
- d) $|4x^2 + 1| = 10$
- e) $x^2 + 3x + 1 = |3x + 8|$
- f) $|x|^2 - 8|x| + 7 = 0$

3) [resp] Resolva as seguintes Inequações modulares

- a) $|5x - 8| \leq 2$
- b) $|2x - 3| \geq 7$
- c) $|x^2 - 9| + x \leq 3$
- d) $|x - 2| + |x + 8| \geq 2x + 12$

4) [resp] Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |2x - 5|$.

- a) Encontre os zeros de f , caso existam.
- b) Verifique se f é par, ímpar ou nem par nem ímpar.
- c) f é injetora?
- d) Faça o esboço do gráfico de f .
- e) f possui um valor máximo? f possui valor mínimo?

5) [resp] Faça o esboço do gráfico das seguintes funções:

- a) $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$
- b) $f(x) = |x|^2 - 4|x| + 3$
- c) $f(x) = \begin{cases} 4x - 3 & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$
- d) $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 2 - x & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ (x - 2)^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$
- e) $f(x) = |x - 5| + 1$
- f) $f(x) = |x - 1| + |2x - 4|$
- g) $f(x) = \frac{|x|}{x}$
- h) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 1 \\ |x - 1| & \text{se } x > 1 \end{cases}$

6) [resp] Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 2 - x & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ (x - 2)^2 & \text{se } x > 2 \end{cases} \quad \text{Calcule o valor}$$

da expressão $f(-2) + f(1) - f(4)$.

7) [resp] Na cidade de Pindaíba, a conta de água e esgoto tem duas faixas de preço. Quem consome até $10m^3$ por mês pega um valor fixo de R\$40,00. Para cada metro cúbico adicional no mês, o consumidor paga R\$6,50.

a) Escreva a função $c(v)$ que fornece o custo mensal de água e esgoto em Pindaíba, com relação ao volume de água consumido (em m^3).

b) Determine o valor da conta de uma casa no qual o consumo mensal é de $16m^3$.

c) Trace o gráfico de $c(v)$ para v entre 0 e $20 m^3$.

8) [resp] Duas locadoras de automóveis oferecem

planos diferentes para a diária de um veículo econômico. A locadora Saturno cobra uma taxa fixa de R\$30,00, além de R\$0,40 por quilômetro rodado. Já a locadora Mercúrio tem um plano mais elaborado: ela cobra uma taxa fixa de R\$90,00 com uma franquia de $200km$, ou seja, o cliente pode percorrer $200km$ sem custos adicionais. Entretanto, para cada km rodado além dos $200km$ incluídos na franquia, o cliente deve pagar R\$0,60.

a) Determine função que descreve o custo diário de locação (em reais) de um automóvel em ambas locadoras.

b) Para cada locadora, esboce o gráfico da função que descreve o custo diário de locação em termos da distância percorrida no dia.

c) Determine para quais intervalos cada locadora tem o plano mais barato.

Funções Exponenciais

5.1	Potências	83
5.2	Potências de números negativos	87
5.3	Funções Exponenciais	89
5.4	Esboçar o Gráfico da Função Exponencial	91
5.5	O Número de Euler (e)	93
5.6	Equações exponenciais	94
5.7	Inequações Exponenciais	97
5.8	Exercícios	99

5.1 Potências

DEFINIÇÃO 5.1: POTÊNCIA

Seja a um **número real positivo** chamado **base**. Definimos para todo $n \in \mathbb{N}$, a **Potência** de a elevado a n , como

$$a^n = \underbrace{a \, a \, a \, \cdots \, a}_{n \text{ vezes}}.$$

Em particular,

$$a^1 = a.$$

Segue da Definição 5.1 que para todo $m, n \in \mathbb{N}$ as seguintes propriedades são válidas

$$a^m a^n = a^{m+n} \quad (5.1)$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (5.2)$$

$$\text{Se } b > 0, \text{ então } (ab)^m = a^m b^m \quad (5.3)$$

Fixada uma base a , queremos estender a Definição 5.1 para o conjunto dos números reais, ou seja, definir a^x para todo $x \in \mathbb{R}$, de tal forma que as propriedades acima continuem válidas.

Observe que fixamos uma base a , ou seja, a por definição é maior que zero. Posteriormente falaremos do porquê dessa escolha.

Faremos essa extensão gradualmente.

Como definir a^0 ?

Fazendo $m = 0$ e $n = 1$ em (5.1) temos que

$$a^0 a^1 = a^{0+1} = a^1$$

Como $a \neq 0$, dividimos ambos os lados da equação por $a = a^1$ e concluimos que $a^0 = 1$. Portanto, definimos

$$a^0 = 1. \quad (5.4)$$

Observe que 0^0 é uma expressão não definida, ou seja, 0^0 não é um número real.

Como definir a^{-m} para m inteiro positivo?

Novamente aplicando a propriedade (5.1) e utilizando que $a^0 = 1$, temos que

$$a^{-m} a^m = a^{-m+m} = a^0 = 1.$$

Portanto, definimos

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}. \quad (5.5)$$

EXEMPLO 5.1.1: Avalie a potência 3^{-2} .

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3 \cdot 3} = \frac{1}{9}.$$

EXEMPLO 5.1.2: Avalie a potência $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} &= \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} \\ &= \frac{1}{\frac{2^3}{3^3}} \\ &= \frac{3^3}{2^3} \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^3 \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \\ &= \frac{27}{8}. \end{aligned}$$

Observem que se a e b são números positivos, então

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n. \quad (5.6)$$

Como definir a^x para $x \in \mathbb{Q}$?

Inicialmente faremos um exemplo.

EXEMPLO 5.1.3: Avalie $a^{n/2}$.

Usando a propriedade (5.2) temos

$$a^{n/2} a^{n/2} = \left(a^{n/2}\right)^2 = a^{2 \cdot \frac{n}{2}} = a^n.$$

Como o produto de $a^{n/2}$ por ele mesmo resultou em a^n , concluímos que

$$a^{n/2} = \sqrt{a^n}.$$

De forma análoga, a propriedade (5.2) pode ser utilizada para definir $a^{n/m}$ para todo $n/m \in \mathbb{Q}$, a partir da função

$$f(x) = \sqrt[m]{x}.$$

Como a^n já está definida para todo $n \in \mathbb{N}$ e ao multiplicarmos $a^{n/m}$ por si mesmo m vezes, obtemos

$$\underbrace{a^{n/m} \cdots a^{n/m}}_{m \text{ vezes}} = \left(a^{n/m}\right)^m = a^{m \cdot \frac{n}{m}} = a^n,$$

temos que

$$a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}. \quad (5.7)$$

EXEMPLO 5.1.4: Avalie a potência $3^{5/2}$.

$$3^{5/2} = \sqrt{3^5} = \sqrt{3^4 \cdot 3} = 9\sqrt{3}.$$

EXEMPLO 5.1.5: Avalie a potência $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2/3}$.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2/3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}.$$

Como definir a^x para $x \in \mathbb{I}$?

Fixado x irracional, existe uma sequência de números racionais x_n tal que os valores dessa sequência ficam cada vez mais próximos do número irracional x . Por exemplo,

se

$$x = \pi = 3,141\,592\,653\,589 \dots,$$

podemos considerar a sequência dada por

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= 3,1 \\ x_3 &= 3,14 \\ x_4 &= 3,141 \\ x_5 &= 3,1415 \\ x_6 &= 3,14159 \\ x_7 &= 3,141592 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nesse caso, dizemos que o limite quando n tende a infinito da sequência x_n converge para x (estudaremos com mais detalhe a ideia de limite no próximo módulo, nesse momento, apenas note que quando n é muito grande o número x_n fica muito próximo do número irracional x) e escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Para cada x_n , a^{x_n} já foi definido. A sequência $y_n = a^{x_n}$ converge para um valor (ou seja, à medida que n cresce, os valores a^{x_n} ficam muito próximos de um número real que chamaremos de a^x). Definimos então

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n}. \quad (5.8)$$

5.2 Potências de números negativos

Vimos acima que é possível definir a^x para todo $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$.

Por que não definimos para $a \leq 0$?

Faz sentido falar em a^x para $a \leq 0$?

A resposta é positiva se x é um número inteiro. Se x não é inteiro, essa definição não pode ser feita sem gerar inconsistências, ou seja, não é possível definir. Por exemplo,

$$(-4)^{1/2}$$

não está definido, pois a definição natural para esse número seria

$$\sqrt{-4}$$

que não é um número real.

Aparentemente, poderíamos definir

$$(-8)^{1/3}$$

como

$$\sqrt[3]{-8} = -2.$$

Mas há um problema que surge da equivalência de frações. Sabemos que

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6},$$

logo teríamos que

$$(-8)^{1/3} = (-8)^{2/6}$$

mas

$$(-8)^{2/6} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{2^6} = 2.$$

Ou seja, uma potência de base negativa e expoente racional não pode ser definida. Consequentemente, a definição de a^x para x irracional também não está definida para $a < 0$. Portanto

$$(-2)^{1/2} \quad \text{e} \quad (-3)^{\sqrt{3}}$$

não são números reais.

5.3 Funções Exponenciais

Antes de definirmos as funções exponenciais, apresentaremos um exemplo para termos noção como essas funções aparecem no dia a dia.

EXEMPLO 5.3.1: Heloísa contraiu um empréstimo de R\$ 1000,00 em um banco que cobra 6% de juros ao mês. Se Heloísa não saldar sua dívida, quanto ela deverá ao banco após quatro meses? Após um número x arbitrário de meses?

Observe que após um mês que o empréstimo foi contraído a dívida de Heloísa será

$$\begin{aligned}1000 + \left(1000 \frac{6}{100}\right) &= 1000 + 1000 \cdot 0,06 \\&= 1000 (1 + 0,06) \\&= 1000 \cdot 1,06.\end{aligned}$$

Após dois meses, a dívida será

$$(1000 \cdot 1,06) 1,06 = 1000 (1,06)^2$$

Após três meses, a dívida será

$$(1000 (1,06)^2) 1,06 = 1000 (1,06)^3$$

E finalmente, após quatro meses, a dívida será

$$(1000 (1,06)^3) 1,06 = 1000 (1,06)^4 \approx 1.262,48$$

Generalizando a conta acima, após x meses a dívida de Heloísa será

$$1000 (1,06)^x.$$

DEFINIÇÃO 5.2: FUNÇÃO EXPONENCIAL

A **função exponencial** com base a é definida por

$$\begin{aligned}f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\x &\rightarrow a^x\end{aligned}$$

em que $a > 0$, $a \neq 1$ é um número real fixo chamado base e x é qualquer número real.

Para $a = 1$, a função $f(x) = 1^x$ é a função constante $f(x) = 1$. Para $a \leq 0$, vimos na seção anterior que não faz sentido essa definição.

Segue que a função assim definida satisfaz as seguintes propriedades, para todo $x, y \in \mathbb{R}$,

$$a^x a^y = a^{x+y} \quad (5.9)$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad (5.10)$$

$$\text{Se } b > 0, \text{ então } (ab)^x = a^x b^x \quad (5.11)$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad (5.12)$$

As três primeiras propriedades estão listadas acima para os naturais, aqui estendemos para os reais.

A função exponencial pode ser classificada em crescente ou decrescente, a depender do valor de a .

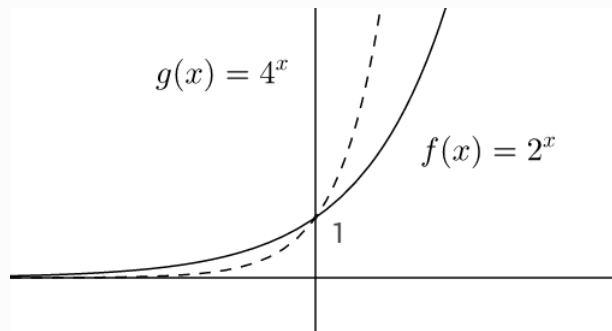


Figura 5.1: Gráfico de $f(x) = 2^x$ (traço contínuo) e $g(x) = 4^x$ (tracejado).

Se $a > 1$ a função $f(x) = a^x$ é crescente ($x < y \Leftrightarrow a^x < a^y$) e o seu gráfico tem o formato das curvas mostradas na Figura 5.1.

Se $0 < a < 1$ a função $f(x) = a^x$ é decrescente ($x < y \Leftrightarrow a^x > a^y$) e o seu gráfico tem o formato das curvas mostradas na Figura 5.2.

Note que, uma vez que $a^0 = 1$, para todo $a \neq 0$, então o gráfico da função a^x sempre intercepta o eixo y no ponto $(0, 1)$.

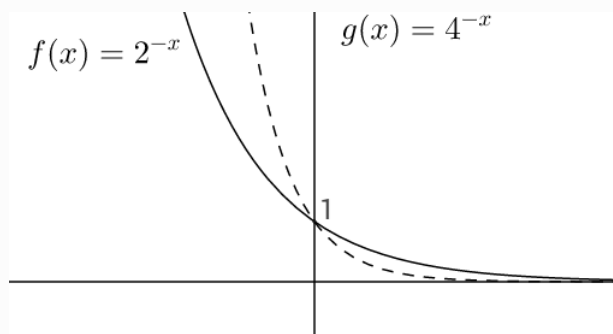


Figura 5.2: Gráfico de $f(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (traço contínuo) e $g(x) = 4^{-x} = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ (tracejado).

5.4 Esboçar o Gráfico da Função Exponencial

Se quisermos esboçar o gráfico da função $f(x) = a^x$, escolhemos um conjunto de valores (3 ou 5 pontos) estratégicos para x e montamos uma tabelinha com esses valores e sua imagem pela função. É comum escolhermos os valores

$$x = -2, -1, 0, 1, 2.$$

Vamos observar os seguintes exemplos.

EXEMPLO 5.4.1: Esboce o gráfico da função $f(x) = 2^x$.

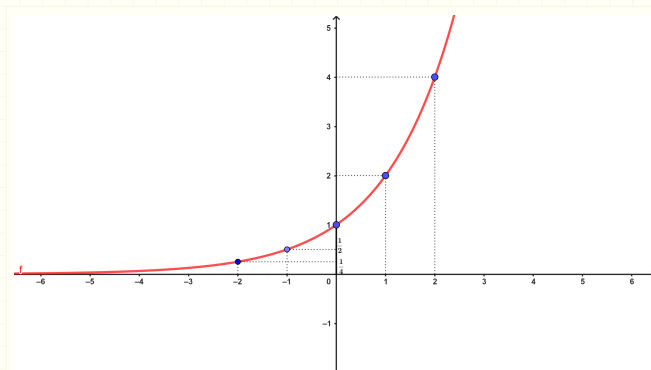
Para isso, vamos escolher os valores

$$x = -2, -1, 0, 1, 2$$

e montar uma tabela com 3 colunas: A primeira coluna esses valores de x , a segunda coluna com a imagem desses valores pela função $f(x) = 2^x$ e a terceira com o par ordenado $(x, f(x))$.

x	$f(x) = 2^x$	$(x, f(x))$
-2	$f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$	$(-2, \frac{1}{4})$
-1	$f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$	$(-1, \frac{1}{2})$
0	$f(0) = 2^0 = 1$	$(0, 1)$
1	$f(1) = 2^1 = 2$	$(1, 2)$
2	$f(2) = 2^2 = 4$	$(2, 4)$

Inserindo os pontos encontrados no plano cartesiano e sabendo que o a forma geral do gráfico da função exponencial obtemos o esboço



EXEMPLO 5.4.2: Esboce o gráfico da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

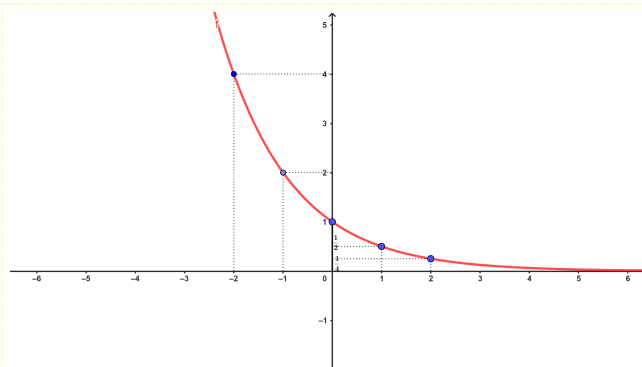
Para isso, vamos escolher, novamente, os valores

$$x = -2, -1, 0, 1, 2$$

e construir uma tabela com 3 colunas como no exemplo anterior.

x	$f(x) = (1/2)^x$	$(x, f(x))$
-2	$f(-2) = (1/2)^{-2} = 2$	$(-2, 2)$
-1	$f(-1) = (1/2)^{-1} = 2$	$(-1, 1)$
0	$f(0) = (1/2)^0 = 1$	$(0, 1)$
1	$f(1) = (1/2)^1 = 1/2$	$(1, 1/2)$
2	$f(2) = (1/2)^2 = 1/4$	$(2, 1/4)$

Inserindo os pontos encontrados no plano cartesiano e sabendo que o a forma geral do gráfico da função exponencial obtemos o esboço



5.5 O Número de Euler (e)

Vimos que o gráfico da função exponencial $y = a^x$ sempre intercepta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 1)$, independentemente do valor da base a . No entanto, a inclinação da reta tangente ao gráfico nesse ponto específico muda conforme alteramos a base.

Definição Geométrica de e : Para tornar a definição mais clara, vamos seguir este raciocínio:

Considere a família de funções $f(x) = a^x$.

Se tomarmos $a = 2$, a reta tangente ao gráfico em $(0, 1)$ tem uma inclinação aproximada de 0,69. Se tomarmos $a = 3$, a reta tangente em $(0, 1)$ tem uma inclinação aproximada de 1,10.

DEFINIÇÃO 5.3: NÚMERO EULER

Existe um único número real, denotado por e , tal que a inclinação da reta tangente à curva $y = e^x$ no ponto $(0, 1)$ é exatamente igual a 1.

Este número é irracional e seu valor aproximado é

$$e \approx 2,7182818284\dots$$

A função

$$f(x) = e^x$$

é chamada de **função exponencial natural**. Sua importância reside no fato de que, nesta base específica, a taxa de crescimento da função é igual ao próprio valor da função em qualquer ponto.

Note que, como a inclinação em $(0, 1)$ é 1, a reta tangente nesse ponto é simplesmente a reta $y = x + 1$. Para qualquer outra base, essa relação não seria tão “limpa”.

5.6 Equações exponenciais

As equações em que a incógnita aparece nos expoentes são chamadas de **Equações exponenciais**. A seguir serão apresentados alguns exemplos de equações exponenciais, juntamente com as resoluções. Para resolvê-las usaremos o fato de que a função exponencial é injetora, isto é:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

EXEMPLO 5.6.1: Resolva a equação exponencial $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$.

A ideia para resolver uma equação exponencial desse tipo, transformamos a equação numa igualdade de potências de mesma base

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81 \Rightarrow 3^{-x} = 3^4$$

Como a função exponencial é injetora então basta igualar os expoentes, o que implica que

$$-x = 4 \Rightarrow x = -4.$$

Logo,

$$S = \{-4\}.$$

EXEMPLO 5.6.2: Resolva a equação exponencial $5^x - 125 = 0$.

Podemos reescrever a equação como

$$5^x = 5^3,$$

ou seja, transformando em uma igualdade de potências de mesma base. Como a função exponencial é injetora então basta igualar os expoentes, o que implica que $x = 3$. Logo,

$$S = \{3\}.$$

EXEMPLO 5.6.3: Resolva a equação exponencial $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt[3]{4}$.

Note que

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt[3]{4}$$

$$2^{-x} = (2^2)^{1/3}$$

$$2^{-x} = 2^{2/3}$$

$$-x = \frac{2}{3}$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

Logo,

$$S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$$

EXEMPLO 5.6.4: Resolva a equação exponencial $2^{x-3} + 2^{x-1} + 2^x = 52$.

Nesse caso, não conseguimos transformar a equação em uma igualdade de mesma base. Desse modo, vamos reescrever a equação, usando as propriedades de potenciação

$$2^x 2^{-3} + 2^x 2^{-1} + 2^x = 52.$$

Colocando 2^x em evidência

$$2^x 2^{-3} + 2^x 2^{-1} + 2^x = 52$$

$$2^x \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + 1 \right) = 52$$

$$2^x \frac{13}{8} = 52$$

$$2^x = 32$$

$$2^x = 2^5$$

$$x = 5$$

Usamos que 32 pode ser escrito na base 2 como $2^x = 2^5$. Logo, a solução da equação é

$$S = \{5\}.$$

EXEMPLO 5.6.5: Resolva a equação exponencial $2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$.

Do mesmo modo do item anterior, não conseguimos transformar a equação em uma igualdade de mesma base. Vamos reescrever a equação da seguinte forma

$$(2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$$

Agora, vamos fazer a seguinte mudança de variável $y = 2^x$. Assim,

$$y^2 - 9y + 8 = 0$$

Que é uma equação do segundo grau, cujas as raízes são $y = 1$ e $y = 8$.

Agora, precisamos encontrar os valores de x correspondentes.

$$\text{Se } y = 1 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0.$$

$$\text{Se } y = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3.$$

Logo o conjunto solução da equação é

$$S = \{0, 3\}.$$

5.7 Inequações Exponenciais

Para resolvermos uma Inequação exponencial do tipo

$$a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \quad \text{ou} \quad a^{f(x)} \geq a^{g(x)},$$

devemos lembrar que a função $y = a^x$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$. Portanto, antes de tudo, observamos a situação das bases dos dois membros e, caso as bases sejam diferentes, reduza-as as mesmas bases e depois monte uma inequação respeitando as seguintes condições:

1. Se $a > 1$ conserve o sinal original da inequação. Isso se dá pelo fato da função exponencial ser crescente se $a > 1$.
2. Se $0 < a < 1$ inverta o sentido da desigualdade. Essa fato, se dá por conta da função exponencial ser decrescente quando $0 < a < 1$.

EXEMPLO 5.7.1: Resolva a inequação exponencial $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-1}$.

Note que nesse caso temos uma inequação exponencial e como as bases de ambos os membros são iguais

$$a = \frac{1}{2}$$

basta montarmos uma inequação com os expoentes, invertendo o sentido da desigualdade, visto que $0 < a < 1$.

Assim, precisamos resolver a seguinte inequação exponencial

$$\begin{aligned} 2x + 2 &> x^2 - 1 \\ x^2 - 2x - 3 &< 0, \end{aligned}$$

que é uma inequação do segundo grau, cuja solução é

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}.$$

EXEMPLO 5.7.2: Resolva a inequação exponencial $2^{x+2} \geq 64$.

Inicialmente, observamos que $64 = 2^6$. Portanto, estamos interessado em resolver a inequação

$$2^{x+2} \geq 2^6.$$

Como já deixamos ambos os membros da desigualdade na mesma base então montamos uma inequação com os expoentes mantendo o sentido da desigualdade original, uma vez que a base $a = 2 > 1$.

Assim, temos que resolver a seguinte inequação do primeiro grau

$$x + 2 \geq 6$$

$$x > 4.$$

Logo, a solução da inequação pedida é

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}.$$

EXEMPLO 5.7.3: Determine o domínio D da função $f(x) = \sqrt{5^x - 125}$.

A fim de que exista $f(x)$, devemos ter

$$5^x - 125 \geq 0,$$

uma vez que, não existe raiz quadrada de número negativo. Assim,

$$5^x - 125 \geq 0$$

$$5^x \geq 125$$

$$5^x \geq 5^3$$

$$x \geq 3$$

Assim, o domínio da função é

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}.$$

5.8 Exercícios

1) [resp] Faça o esboço gráfico das funções abaixo

a) $f(x) = 2^x - 2$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

c) $f(x) = -4\left(\frac{1}{2}\right)^x$

d) $f(x) = 3^{-x}$

2) [resp] Encontre o domínio das seguintes funções:

a) $g(x) = \frac{-5}{\sqrt{16 - \left(\frac{1}{2}\right)^x}}$

b) $f(x) = \sqrt{9 \cdot 3^{2x-1} - \frac{1}{27}}$

3) [resp] Resolva as equações abaixo

a) $8^x = 0,25$

b) $5^{2x-7} = 125$

c) $8^{x^2-x} = 4^{x+1}$

d) $2^{x^2-3x-4} = 1$

e) $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4x} \cdot 2^{-x+4}$

f) $(10^x)^{1-x} - 0,000001 = 0$

g) $2^{2x+1} - 3 \cdot 2^{x+2} = 32$

h) $2^{x^2+5} + 2^4 = 144$

i) $5^{4x-1} - 5^{4x} - 5^{4x+1} + 5^{4x+2} = 480$

j) $2^{3x-2} - 4^{x+6} = 0$

4) [resp] Resolva as inequações abaixo

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} \leq \frac{1}{16}$

b) $e^{x^2-5} \geq e^{4x}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} > \frac{1}{16}$

d) $7^{x-2} < 343$

e) $1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 8$

5) [resp] Se $f(x) = 16^{1+1/x}$, encontre o valor de $f(-1) + f(-2) + f(-4)$

6) [resp] Calcule $f(0) - f(3/2)$ sabendo que

$$f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

7) [resp] Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2^x$. Encontre o valor de $f(a+1) - f(a)$

Funções Inversas e Funções Logarítmicas

6.1	Funções Inversas	100
6.2	Função Logarítmica	105
6.3	Propriedades	109
6.4	Equações Logarítmicas	116
6.5	Exercícios	119

6.1 Funções Inversas

Retomaremos ao Exemplo 5.3, do capítulo anterior, para introduzir a ideia de função Inversa e posteriormente definiremos a função logarítmica que é a inversa da função exponencial.

EXEMPLO 6.1.1: Considerando a situação descrita no Exemplo 5.3, se Heloísa não saldar parte de sua dívida, em que momento ela deverá o dobro do valor que pegou emprestado?

Já vimos que o valor a ser pago por Heloísa, $f(x)$, após x meses que ela contraiu o empréstimo é dado por

$$1000 \cdot 1,06^x.$$

Essa função nos permite calcular o valor da imagem $f(x)$, dado que temos o valor do domínio x . Observe que o problema proposto nos pergunta qual o valor x do domínio que é levado no valor $f(x) = 2000$ da imagem. Nosso problema será facilmente resolvido se tivermos uma função que dado o valor de $f(x)$ ela nos dê o valor de x . Essa função é chamada função inversa, a qual passaremos a definir agora.

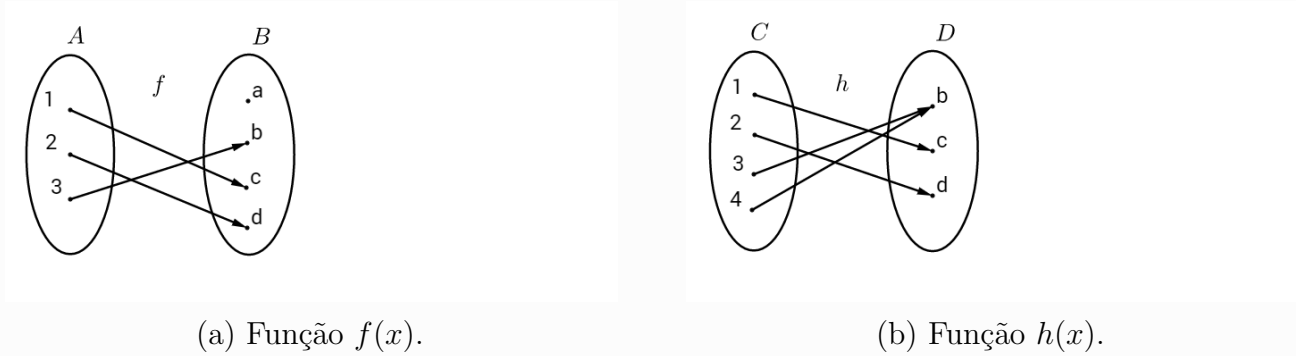


Figura 6.1: Exemplos de funções.

A primeira pergunta a ser feita é: será que todas as funções possuem inversas? Vamos observar duas situações em que as funções não possuem função inversa.

Na função $f: A \rightarrow B$, da Figura 6.1a, não existe $x \in A$ tal que $f(x) = a$. Logo, não é possível definir uma função inversa já que não teríamos como definir $f^{-1}(a)$.

Na função $h: C \rightarrow D$, da Figura 6.1a, $h(3) = b = h(4)$. Logo, não é possível definir uma função inversa já que tem dois possíveis valores para $h^{-1}(b)$.

Para definirmos a inversa de uma função f , nenhuma das situação acima podem acontecer, uma função em que não ocorre essas situações é uma função bijetora, cuja definição formal é dada por

DEFINIÇÃO 6.1: FUNÇÃO BIJETORA

Uma função $f: A \rightarrow B$ é dita **bijetora** se satisfaz as seguintes condições:

1. quaisquer elementos distintos de A são levados por f em elementos distintos de B , isto é, se para todo

$$x, y \in A \text{ tal que } x \neq y, \text{ tem-se que } f(x) \neq f(y);$$

2. se todo elemento $y \in B$ possui um representante

$$x \in A \text{ tal que } f(x) = y.$$

Ou seja, f é bijetora se para todo $y \in B$ existe um **único** $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Uma função $f: A \rightarrow B$ que satisfaz o Item 1 da Definição 6.1 é dita **injetora**.

Uma função $f: A \rightarrow B$ que satisfaz o Item 2 da Definição 6.1 é dita **sobrejetora**.

Quando uma função $f: A \rightarrow B$ é bijetora, é possível definir uma função $g: B \rightarrow A$ que, de certa forma, desfaz o que a f faz. Como para cada $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $f(x) = y$, definimos $g(y) = x$ em que $f(x) = y$. Essa função assim definida é chamada **função inversa** de f e denotada por f^{-1} . Segue que

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Veja que pela definição de função, para que a função inversa esteja bem definida, é necessário que $f: A \rightarrow B$ seja bijetiva. Pois nesse caso, a sobrejetividade de f garante que $f^{-1}(y)$ está definida para todo $y \in B$ e a injetividade garante que o valor $f^{-1}(y)$ é único.

Note que se consideramos a função f definida na sua imagem, ou seja $f: D(A) \rightarrow Im(A)$, então para que f possua inversa, é necessário apenas que f seja injetora.

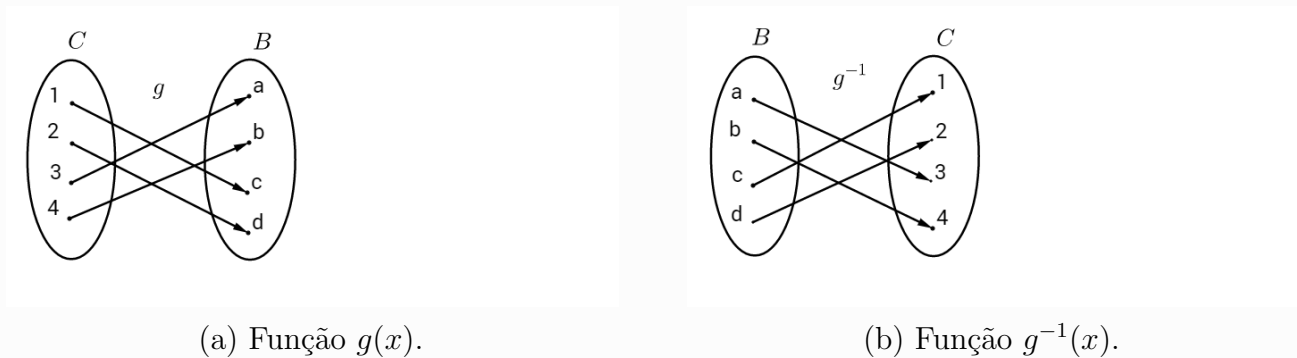


Figura 6.2: Uma função e sua inversa.

A função $g: C \rightarrow B$, da Figura 6.2a, é bijetora e sua inversa $g^{-1}: B \rightarrow C$, Figura 6.2b, está bem definida.

A função inversa possui as seguintes propriedades:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in D(f), \quad (6.1)$$

$$f(f^{-1}(x)) = x, \quad \forall x \in D(f^{-1}). \quad (6.2)$$

EXEMPLO 6.1.2: Determine se a função

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow x^2 \end{aligned}$$

é bijetiva.

A função f não é bijetiva, pois,

$$f(1) = f(-1) = 1.$$

EXEMPLO 6.1.3: Determine se a função

$$\begin{aligned} g: [0, \infty) &\rightarrow [0, \infty) \\ x &\rightarrow x^2 \end{aligned}$$

é bijetiva.

A função g , com o domínio restringindo, é uma função bijetiva, cuja função inversa é dada por

$$\begin{aligned} f: [0, \infty) &\rightarrow [0, \infty) \\ x &\rightarrow \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Como encontrar a função inversa de uma função bijetiva? Se $y = f(x)$ possuir inversa, escreva $x = f(y)$ e isole y na última equação.

EXEMPLO 6.1.4: Encontre, caso exista, a função inversa da Função $f(x) = x^3 + 4$. Caso não exista, justifique. Suponha que essas funções tenham domínio e contradomínio todo o conjunto dos números reais.

Vamos verificar se f é bijetora.

Para verificar se f é injetora, supomos que

$$f(x_1) = f(x_2)$$

para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Assim,

$$(x_1)^3 + 4 = (x_2)^3 + 4$$

$$(x_1)^3 = (x_2)^3$$

$$\sqrt[3]{x_1} = \sqrt[3]{x_2}$$

$$x_1 = x_2$$

Logo, f é injetora.

f é sobrejetora, uma vez que seu conjunto imagem é todo o conjunto dos números reais, que é igual ao contradomínio.

Para encontrarmos uma expressão para a função inversa, basta trocarmos x por y na função e depois isolarmos y . Portanto,

$$x = y^3 + 4$$

$$y^3 = x - 4$$

$$y = \sqrt[3]{x - 4}$$

Assim, f possui inversa e

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 4}.$$

EXEMPLO 6.1.5: Encontre, caso exista, a função inversa da Função $g(x) = x^4 - 7$. Caso não exista, justifique. Suponha que essas funções tenham domínio e contradomínio todo o conjunto dos números reais.

A função g não é injetora, uma vez que

$$g(1) = g(-1) = -6,$$

logo não possui inversa.

6.1.1 Gráfico das funções inversas

O próximo objetivo é explorar as relações entre os gráficos de f e de sua função inversa f^{-1} . Se (a, b) for um ponto no gráfico $y = f(x)$, então (b, a) será um ponto do gráfico de $y = f^{-1}(x)$. O efeito geométrico de inverter as coordenadas de um ponto é refletir aquele ponto sobre a reta $y = x$.

Em resumo, inverter as coordenadas de um ponto no gráfico de f produz um ponto no gráfico de f^{-1} . Analogamente inverter as coordenadas de um ponto no gráfico de f^{-1} produz um ponto no gráfico de f logo os gráficos de $y = f(x)$ e $y = f^{-1}(x)$ são simétricos um do outro em relação a reta $y = x$, conforme ilustra a Figura 6.3.

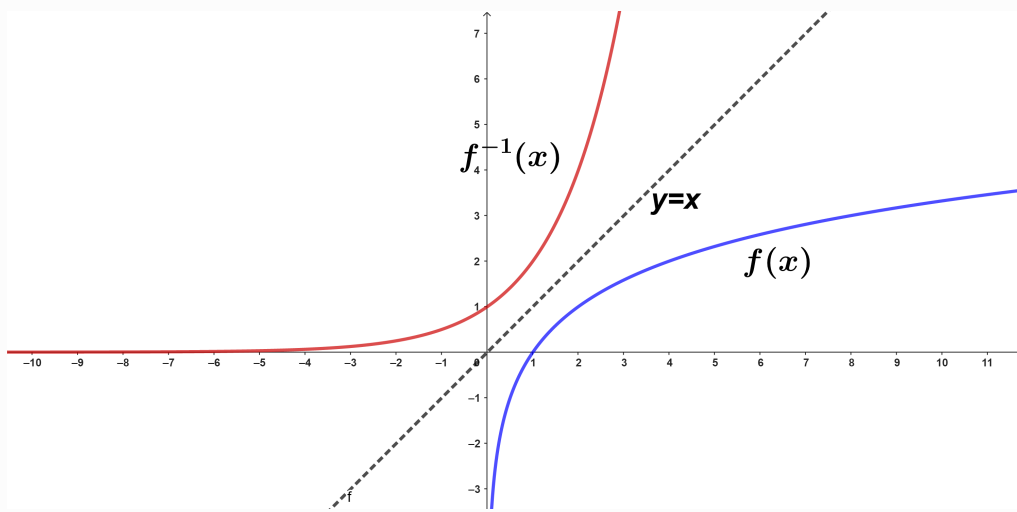


Figura 6.3: Comparação do gráfico de $f(x)$ e $f^{-1}(x)$. Note que o gráfico de $f^{-1}(x)$ é o espelho do gráfico de $f(x)$, com relação a reta $y = x$.

6.2 Função Logarítmica

Se considerarmos a função exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = a^x$, $a > 0$ e $a \neq 1$, então temos que f é uma bijeção sobre a sua imagem, portanto possui inversa. Sua inversa é denominada **função logarítmica na base a** , $a > 0$ e $a \neq 1$.

$$\begin{aligned} \log_a: \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \log_a x \end{aligned}$$

e é definida por

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x.$$

Vamos fazer alguns exemplos de cálculo de logaritmos,

EXEMPLO 6.2.1: Encontre $\log_2 8$:

Usando a definição de logaritmo temos

$$\log_2 8 = x$$

$$2^x = 8$$

$$x = 3$$

ou seja,

$$\log_2 8 = 3.$$

EXEMPLO 6.2.2: Encontre $\log_{1/81} 9$

Mais uma vez, usando a definição de logaritmo

$$\log_{1/81} 9 = y$$

$$\left(\frac{1}{81}\right)^y = 9$$

$$(9^{-2})^y = 9$$

$$9^{-2y} = 9$$

$$-2y = 1$$

$$y = -\frac{1}{2}$$

Condição de existência do logaritmo: A partir da definição de logaritmos, temos que

$$a > 0 \text{ e } a \neq 1 \text{ e } b > 0.$$

Portanto, não são definidos, por exemplo, os seguintes logaritmos

$$\log_4(-12)$$

$$\log_1 144$$

$$\log_0 8$$

$$\log_{-3} 81$$

$$\log_4 0$$

$$\log_{-6} -36$$

Note que o valor $\log_b a$ é um expoente.

Segue diretamente da definição que $\log_a 1 = 0$, para todo $a > 0$ e $a \neq 1$.

Logaritmo na base 10: Quando a base do logaritmo for 10, podemos omiti-la. $\log 3$ é o logaritmo de 3 na base 10.

6.2.1 Gráfico da Função Logarítmica

Como $a^0 = 1$ e $a^1 = a$, temos que $\log_a 1 = 0$ e $\log_a a = 1$. Portanto, o gráfico de toda função logarítmica contém os pontos $(1, 0)$ e $(a, 1)$. Além disso, sendo a função logarítmica $g(x) = \log_a x$ a inversa da função $g(x) = a^x$, então o gráfico de f é o espelho do gráfico de g , com relação a reta $y = x$. A Figura 6.4 ilustra essa situação, mostrando o esboço do gráfico das funções $g(x) = 2^x$ e $\log_2 x$.

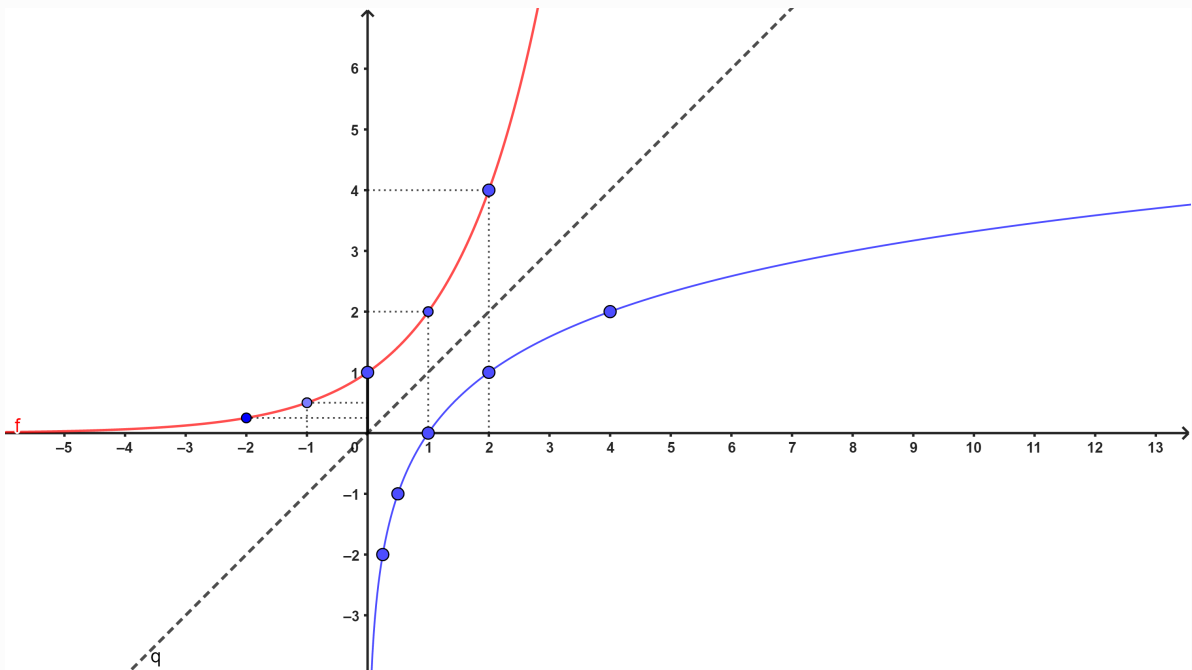


Figura 6.4: Em vermelho, o gráfico da função $g(x) = 2^x$; em azul, o gráfico de $\log_2 x$ e em preto tracejado a reta $y = x$.

A função logarítmica pode ser classificada em crescente ou decrescente.

Se $a > 1$ a função $f(x) = \log_a x$ é crescente, pois

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad \log_a x < \log_a y$$

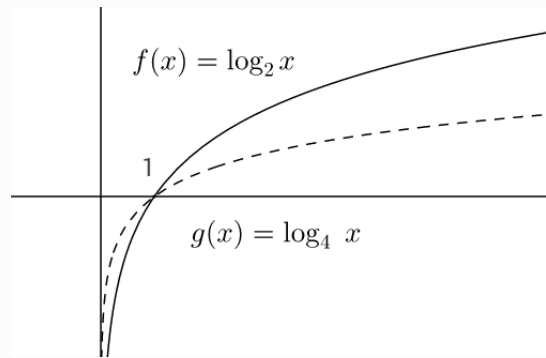


Figura 6.5: Gráfico de $f(x) = \log_2 x$ (traço contínuo) e $g(x) = \log_4 x$ (tracejado).

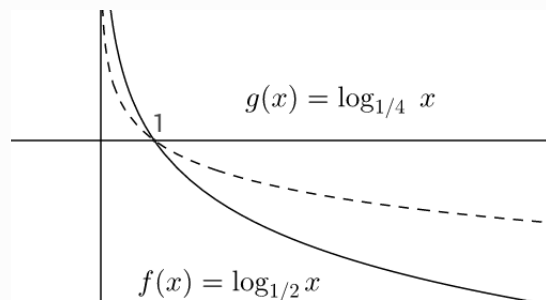


Figura 6.6: Gráfico de $f(x) = \log_{1/2} x$ (traço contínuo) e $g(x) = \log_{1/4} x$ (tracejado).

e o seu gráfico tem o formato das curvas da Figura 6.5.

Se $0 < a < 1$ a função $f(x) = \log_a x$ é decrescente, pois

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad \log_a x > \log_a y$$

e o seu gráfico tem o formato das curvas da Figura 6.6.

Note que o gráfico de $f(x) = \log_a x$ não intercepta o eixo y , o que faz sentido, uma vez que o gráfico da sua inversa $y = a^x$ não intercepta o eixo x .

Procedimento para esboçar o gráfico de $\log_a x$.

Para esboçar o gráfico de $f(x) = \log_a x$, é comum escolhermos 5 valores convenientes para x , a saber as potências de a ,

$$a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2$$

e construirmos uma tabela, da forma que fizemos com a função exponencial e, por conseguinte, marcamos os pontos no gráfico. A escolha desses valores para x é feita de modo a facilitar o cálculo dos logaritmos.

EXEMPLO 6.2.3: Esboçar o gráfico da função $f(x) = \log_3 x$.

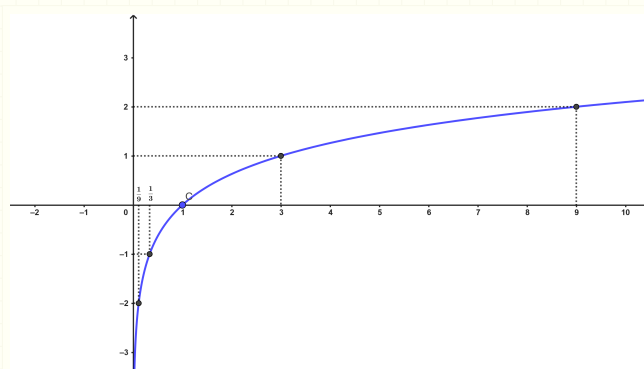
Escolhendo

$$x = 3^{-2}, 3^{-1}, 3^0, 3^1, 3^2,$$

podemos montar a tabela

x	$f(x) = \log_3 x$	$(x, f(x))$
$1/9 = 3^{-2}$	$f(1/9) = 3^{-2}$	$(1/9, -2)$
$1/3 = 3^{-1}$	$f(3) = \log_3 3^{-1} = -1$	$(1/3, -1)$
$1 = 3^0$	$f(3) = \log_3 1 = 0$	$(1, 0)$
3	$f(3) = \log_3 3 = 1$	$(3, 1)$
$9 = 3^2$	$f(9) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$	$(9, 2)$

O gráfico de f está na imagem a seguir



6.3 Propriedades

Assim como as funções exponenciais, as funções logarítmicas também possuem uma lista de propriedades importantes, que decorrem da definição: Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$ em que $x, y > 0$, então

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad (6.3)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \quad (6.4)$$

$$\log_a (x^z) = z \log_a x \quad (6.5)$$

Provaremos a primeira propriedade e as demais serão deixadas como exercício.

Demonstração

Sejam

$$p = \log_a(xy), \quad \log_a x = m \quad \text{e} \quad \log_a y = n.$$

Segue da definição de logaritmo que

$$a^p = xy, \quad a^m = x, \quad a^n = y.$$

Portanto substituindo as duas últimas igualdades na primeira obtemos

$$a^p = a^m a^n = a^{m+n}.$$

Logo, $p = m + n$ e verifica-se a propriedade (6.3).

Mostre as propriedades (6.4) e (6.3) das funções logarítmicas.

EXEMPLO 6.3.1: Usando o fato de que

$$\log 2 = 0,301, \quad \log 3 = 0,477 \quad \text{e} \quad \log 5 = 0,699$$

e as propriedades do logaritmo, calcule

- a) $\log 30$
- b) $\log 0,333 \dots$
- c) $\log 64$
- d) $\log \sqrt[7]{2,5}$

a)

$$\begin{aligned} \log 30 &= \log(2 \cdot 3 \cdot 5) \\ &= \log 2 + \log 3 + \log 5 && \text{propriedade (6.3)} \\ &= 0,301 + 0,477 + 0,699 \\ &= 1,477 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\log 0,333 \dots &= \log \left(\frac{1}{3} \right) \\ &= \log 1 - \log 3 && \text{propriedade (6.4)} \\ &= 0 - 0,477 \\ &= -0,477\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\log 64 &= \log 2^6 \\ &= 6 \log 2 && \text{propriedade (6.5)} \\ &= 6 \cdot 0,301 \\ &= 1,806\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\log \sqrt[7]{2,5} &= \log (2,5)^{1/7} \\ &= \frac{1}{7} \log \left(\frac{5}{2} \right) && \text{propriedade (6.5)} \\ &= \frac{1}{7} (\log 5 - \log 2) && \text{propriedade (6.4)} \\ &= \frac{0,699 - 0,301}{7} \\ &\approx 0,057\end{aligned}$$

EXEMPLO 6.3.2: Resolva a equação exponencial

$$2^{x-6} = 6,$$

dado que $\log_3 2 = 1,58$.

Inicialmente, devemos notar que não conseguimos resolver essa equação conforme resolvemos algumas na parte de equações exponenciais, uma vez que, não conseguimos deixar 6 na base 2. Para esses casos, a função logarítmica é de extrema importância.

Sendo assim, vamos aplicar a função $\log_2 x$ em ambos os lados da equação. Com isso,

$$\begin{aligned} 2^{x-6} &= 6 \\ \log_2 (2^{x-6}) &= \log_2 6 \\ (x-6) \log_2 2 &= \log_2 (2 \cdot 3) && \text{propriedade (6.5)} \\ x-6 &= \log_2 2 + \log_2 3 && \text{propriedade (6.3)} \\ x &= 6 + 1 + 1,58 \\ x &= 8,58 \end{aligned}$$

Os dois próximos exemplos mostram que devemos usar a condição de existência do logaritmo para encontrar o domínio de algumas funções que envolvem logaritmo.

EXEMPLO 6.3.3: Encontre o domínio da seguinte função

$$f(x) = \log(x^2 - 5x + 6)$$

A base do logaritmo em questão é 10, com isso, maior que zero e diferente de um. Portanto, como não existe logaritmo de números menores ou iguais a zero teremos que impor que

$$x^2 - 5x + 6 > 0$$

Que é uma inequação do segundo grau cuja solução é

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}.$$

Logo,

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}.$$

EXEMPLO 6.3.4: Para quais valores de x é possível calcular o logaritmo

$$y = \log_{x+1}(-x^2 + 2x + 8)?$$

Usando a condição de existência dos logaritmos, precisamos impor que

$$-x^2 + 2x + 8 > 0 \tag{6.6}$$

$$x + 1 > 0 \quad (6.7)$$

$$x + 1 \neq 1 \quad (6.8)$$

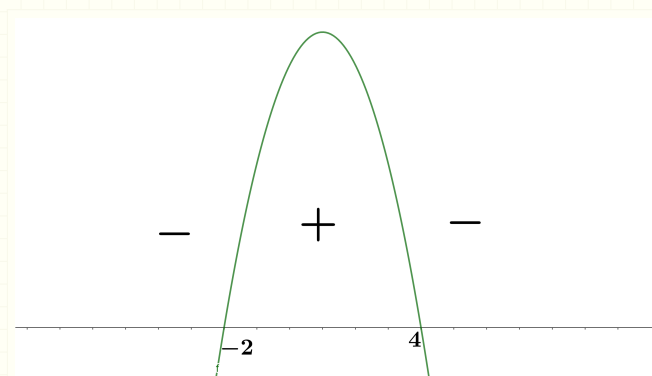
Impondo a condição (6.3)

$$-x^2 + 2x + 8 > 0$$

temos uma inequação do segundo grau, cuja equação associada

$$-x^2 + 2x + 8 = 0$$

possui raízes $x = -2$ e $x = 4$. O estudo do sinal é apresentado na figura



Assim, a fim de que $-x^2 + 2x + 8 > 0$, devemos ter

$$-2 < x < 4.$$

Além disso, precisamos satisfazer a condição (6.4)

$$x + 2 > 0$$

$$x > -1$$

e a condição (6.5)

$$x + 1 \neq 1$$

$$x \neq 0$$

Fazendo a intersecção desses intervalos, temos que

$$y = \log_{x+1}(-x^2 + 2x + 8)$$

existe no conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 4 \text{ e } x \neq 0\}.$$

6.3.1 Mudança de base

Sejam $a, b \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ e $x \in (0, \infty)$, então

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \quad (6.9)$$

Demonstração

Se

$$z = \log_b x,$$

então

$$b^z = x$$

e

$$\log_a (b^z) = \log_a x.$$

Mas

$$\log_a (b^z) = z \log_a b$$

e, portanto

$$z = \frac{\log_a (b^z)}{\log_a b} = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

EXEMPLO 6.3.5: Determine o valor da expressão $\log_7 25 \log_5 49$.

Vamos passar $\log_7 25$ para base 5, usando a mudança de base (6.9). Assim,

$$\log_7 25 \log_5 49 = \frac{\log_5 25}{\log_5 7} \log_5 7^2 \quad \text{usando (6.9)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\log_5 5^2}{\log_5 7} \cancel{2\log_5 7} && \text{usando (6.5)} \\
 &= 4 \log_5 5 && \text{usando (6.5)} \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

EXEMPLO 6.3.6: Escreve a expressão $\log_7 12 - \log_7 3$ na base 10.

Vamos primeiro fazer algumas manipulações algébricas antes de fazer a mudança de base. Assim,

$$\begin{aligned}
 \log_7 12 - \log_7 3 &= \log_7 \frac{12}{3} && \text{usando (6.5)} \\
 &= \log_7 4 && \text{usando (6.5)} \\
 &= \frac{\log 4}{\log 7}
 \end{aligned}$$

6.3.2 O número de Euler

Uma base em especial é a mais utilizada em textos científicos, essa base recebe o nome de **número de Euler**

$$e = 2,718\,281\,82 \dots$$

As principais funções exponenciais do curso serão $f(x) = e^x$ e $g(x) = e^{-x}$. O logaritmo com base e recebe o nome de **logaritmo neperiano** ou **logaritmo natural** e é denotado simplesmente por $\ln$, ou seja,

$$\ln x = \log_e x.$$

6.4 Equações Logarítmicas

EXEMPLO 6.4.1: Resolva a equação logarítmica $\log_{x-1} 6 = 1$

Inicialmente, ao tentarmos resolver uma equação logarítmica devemos analisar a condição de existência do logaritmo. Como a base de um logaritmo é sempre maior que zero e diferente de um, temos que impor que a solução da inequação deve satisfazer

$$x - 1 > 0$$

$$x > 1.$$

Note que não precisamos fazer nenhuma restrição para o logaritmando, visto que $b = 6 > 0$.

Agora, para encontrar a solução da equação, basta aplicarmos a definição de logaritmo.

$$\log_{x-1} 6 = 1$$

$$(x - 1)^1 = 6$$

$$x = 7$$

Uma vez que $x = 7 > 1$ e $x \neq 1$ satisfaz a condição de existência, então a solução da equação é

$$S = \{7\}.$$

EXEMPLO 6.4.2: Resolva a equação logarítmica $\log_{x+2} (2x^2 + x) = 1$

$$2x^2 + x > 0$$

$$x + 2 > 0$$

$$x + 2 \neq 1.$$

Não é necessário resolver essas inequações, basta testarmos se os valores que serão encontrados satisfazem essas desigualdades.

Aplicando a definição de logaritmo, temos

$$(x + 2)^1 = 2x^2 + x$$

$$2x^2 = 2$$

$$x = -1 \text{ ou } x = 1$$

Vamos verificar se esses valores encontrados satisfazem as condições de existência.

Para $x = -1$

$$2(-1)^2 + (-1) = 1 > 0$$

$$-1 + 2 = 1 > 0$$

$$-1 + 2 = 1$$

Logo, como $x = -1$ não satisfaz a terceira condição de existência então não é uma solução para a equação dada.

Para $x = 1$

$$2 \cdot 1^2 + 1 = 3 > 0$$

$$1 + 2 = 3 > 0$$

$$1 + 2 = 3$$

Logo, $x = 1$ é uma solução (a única) solução da equação dada.

EXEMPLO 6.4.3: Resolva a equação logarítmica $\log_2 x + \log_2(x - 2) = \log_2 8$

As condições de existência são dadas por

$$x > 0$$

$$x - 2 > 0.$$

Para encontrarmos valores que satisfaçam a equação dada, usamos a propriedade P_1 e depois a definição de logaritmo.

$$\log_2 x + \log_2(x - 2) = \log_2 8$$

$$\log_2 x(x - 2) = \log_2 8$$

Usando o fato de que a função logarítmica é injetora chegamos que

$$x(x - 2) = 8$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x = -2 \text{ e } x = 4$$

Vamos verificar se os valores encontrados satisfazem as condições de existência.

Para $x = -2$

$$-2 < 0$$

Como $x = -2$ já não satisfaz a primeira condição de existência, então não pode ser uma solução da equação dada.

Para $x = 4$

$$4 > 0$$

$$4 - 2 = 2 > 0$$

Logo $x = 4$ é a única solução da equação dada.

EXEMPLO 6.4.4: Resolva a equação logarítmica $\log_3 (5x^2 - 6x + 16) = \log_3 (4x^2 + 4x - 5)$

As condições de existência nesse caso são:

$$5x^2 - 6x + 16 > 0$$

$$4x^2 + 4x - 5 > 0$$

Como temos uma igualdade de logaritmos na mesma base, para encontramos os possíveis valores que satisfazem a equação dada basta igualarmos os logaritmandos, considerando o fato de que a função logarítmica é injetora. Assim,

$$5x^2 - 6x + 16 = 4x^2 + 4x - 5$$

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

$$x = 3 \text{ ou } x = 7$$

Vamos verificar se os valores encontrados satisfazem as condições de existência.

Para $x = 3$

$$5 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 16 = 43 > 0$$

$$4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 5 = 47 > 0$$

Logo $x = 3$ é uma solução para a equação dada.

Para $x = 7$

$$5 \cdot 7^2 - 6 \cdot 7 + 16 = 219 > 0$$

$$4 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 - 5 = 219 > 0$$

Logo, $x = 7$ também é uma solução para a equação dada. Assim, o conjunto solução da equação é

$$S = \{3, 7\}.$$

6.5 Exercícios

1) [resp] Use a definição de logaritmo e as propriedades para calcular o valor de A

$$A = \log_3 27 - \log 1 + \log_{\frac{1}{5}} 125$$

2) [resp] Assumindo que $\log 2 = 0,3$, $\log 3 = 0,47$ e $\log 5 = 0,69$, calcule o valor de

a) $\log \left(\frac{2}{5} \right)$

b) $\log 12 + \log 20 - \log \sqrt{5}$

c) $\log 1800 - \log 30$

3) [resp] Resolva as equações logarítmicas abaixo

a) $4 - \log_2(1 - 3x) = 3$

b) $2 \log x = \log 3x + \log(x - 4)$

c) $2^{2x+1} - 3 \cdot 2^{x+2} = 32$

d) $\log_{25}(2x - 1) = \frac{1}{2}$

e) $(\log_4 x)^2 - 2 \log_4 x - 3 = 0$

4) [resp] Resolva as inequações abaixo

a) $\ln(x^2 - 2x - 2) \geq 0$

b) $\log_{1/2}(x^2 - 4) \geq \log_{1/2}(2x)$

c) $\log_{1/3}(x^2 - 2) \geq \log_{1/3}(3x) + 1$

d) $\ln(6x + 5) \geq \ln(8x - 12)$

5) [resp] Considere as funções $f(x) = \log_2 \sqrt[3]{x}$ e $g(x) = \frac{-x^2 + 9}{x + 2}$

a) Encontre $f \circ g$

b) Calcule $f \circ g(-1)$

c) Encontre o domínio da função $f \circ g$

6) [resp] Determine o domínio de $f \circ g$, onde $f(x) = \ln(x - 5)$ e $g(x) = x^3 - 7x - 1$

7) [resp] Considere $f(x) = \ln(x - 2)$

a) Esboce o gráfico de f

b) Justifique que f é invertível

c) Encontre a inversa de f exibindo seu domínio e sua imagem

d) Esboce o gráfico de f^{-1}

8) [resp] Faça o estudo do domínio da função $f(x) = \ln(-x^2 + 2x + 3)$

9) [resp] Considere a função $f(x) = \log_2(4 - x^2)$ e responda o que se pede

a) Qual o domínio e a imagem de f ?

b) A equação $f(x) = 1$ possui solução? Justifique sua resposta

c) f é injetora? Justifique sua resposta

d) Quanto a simetria, f é par, ímpar ou nem par, nem ímpar. Justifique sua resposta

10) [resp] Faça o esboço do gráfico das funções: $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x)$, de duas maneiras diferentes a primeira levando em consideração que $g(x) = f^{-1}(x)$, a segunda marcando pontos.

11) [resp] A partir do gráfico de $y = \log_2(x)$, faça o esboço do gráfico da função $y = \log_2(x - 1) + 2$

12) [resp] Sabendo que $\log_3(7x - 1) = 3$ e que $\log_2(y^3 + 3) = 7$, pode-se afirmar que $\log_y(x^2 + 9)$ é igual a

- a) 6
- b) 2
- c) 4
- d) -2
- e) -4

13) [resp] A soma

$$\log_{10} \frac{2}{3} + \log_{10} \frac{3}{4} + \cdots + \log_{10} \frac{18}{19} + \log_{10} \frac{19}{20}$$

é igual a

- a) $-\log_{10} 20$
- b) -1
- c) $\log_{10} 2$
- d) 1
- e) 2

14) [resp] O valor da expressão $\log_3(5) \cdot \log_{125}(27)$ é:

- a) $\frac{2}{3}$
- b) 2
- c) 1
- d) $\frac{3}{2}$
- e) um número irracional

15) [resp] O conjunto solução da equação $\log_2(x + 1) + \log_2(x - 3) = 5$ é:

- a) $S = \{7\}$
- b) $S = \{7, -5\}$
- c) $S = \{17, 3\}$
- d) $S = \{7/2\}$

16) [resp] Na expressão $\ln 8 - \ln 2 + 2 \ln x = 0$, o valor de x é:

17) [resp] Considere as afirmações dadas abaixo, referentes a funções exponenciais e logarítmicas

- i) $\{x \in \mathbb{R}; \ln x \geq 0\} = [1, \infty)$
- ii) Se $8^{-2x} = 27$, então $2^{-2x} = 3$
- iii) $\log_{10} \sqrt{10000^3} = 9/2$

A alternativa correta é

- a) Somente a afirmativa ii é verdadeira
- b) Somente a afirmativa i é verdadeira
- c) Somente a afirmativa iii é verdadeira
- d) Somente as afirmativas i e ii são verdadeiras
- e) Somente as afirmativas i e iii são verdadeiras

18) [resp] Considere as afirmações dadas abaixo, referentes a funções exponenciais e logarítmicas

- i) O valor de $\log_{0,25} 32$ é igual a $5/2$
- ii) O valor de x que satisfaz à equação $4^x - 2^x = 56$ é $x = 3$
- iii) As funções $y = \log(x^2)$ e $y = 2 \log(x)$ são iguais

A alternativa correta é:

- a) Somente a afirmativa ii é verdadeira
- b) Somente a afirmativa i é verdadeira
- c) Somente a afirmativa iii é verdadeira
- d) Nenhuma afirmativa é verdadeira
- e) Somente as afirmativas i e iii são verdadeiras

19) [resp] Um vírus de um computador se espalha segundo a função

$$c(t) = \frac{6500}{1 + a \cdot 2^{bt}}$$

Em que $c(t)$ é o número de computadores infectados no instante t (em horas), contando a partir do momento em que a infecção foi detectada. Sabendo que $c(0) = 100$, $c(3) = 500$ e que $\log_2 3 = 1,5850$, determine as constantes a e b e o número de computadores infectados para $t = 6$

20) [resp] Faça o esboço do gráfico da função $f(x) = 2^{x+1}$ e da sua inversa. Você deve inicialmente encontrar a inversa e depois fazer o esboço no mesmo plano cartesiano

Trigonometria e Funções Trigonométricas

7.1	Introdução	122
7.2	O conceito de Ângulo	123
7.3	Relações no Triângulo Retângulo	125
7.4	Generalização da Noção de Ângulo	130
7.5	Círculo Trigonométrico Unitário	131
7.6	Fórmulas de redução ao primeiro quadrante	134
7.7	Gráficos de Funções Trigonométricas	139
7.8	Outras Funções Trigonométricas	144
7.9	Identidades Trigonométricas	146
7.10	Equações Trigonométricas	150
7.11	Funções Trigonométricas Inversas	156
7.12	Exercícios	163

Uma importante parte da Matemática é o estudo dos ângulos e das relações entre ângulos e distâncias. Para ilustrar essa importância utilizaremos o artigo a seguir que exemplifica como os conceitos da Trigonometria podem ser utilizados para resolver problemas da vida real.

7.1 Introdução

Eratóstenes e a circunferência da Terra

Eratóstenes nasceu em Cirene, Grécia, e morreu em Alexandria, Egito, no terceiro século AEC. Ele era bibliotecário-chefe da famosa Biblioteca de Alexandria, e foi lá que ele encontrou, num velho papiro, indicações de que ao meio-dia de cada 21 de junho na cidade de Assuã (ou Syene, no grego antigo) 800 km ao sul de Alexandria, uma vareta fincada verticalmente no solo não produzia sombra.

Cultura inútil, diriam alguns. Não para um homem observador como Eratóstenes. Ele percebeu que o fenômeno não ocorria no mesmo dia e horário em Alexandria, e pensou: Se o mundo é plano como uma mesa, então as sombras das varetas têm de ser iguais. E se isto não acontece é porque a Terra deve ser curva!

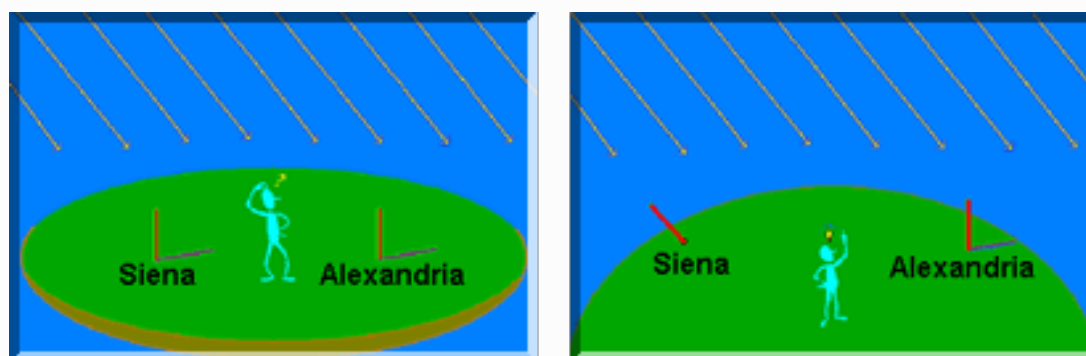


Figura 7.1: Siena

Mais do que isso. Quanto mais curva fosse a superfície da Terra, maior seria a diferença no comprimento das sombras.

O Sol deveria estar tão longe que seus raios de luz chegam à Terra paralelos. Varetas fincadas verticalmente no chão em lugares diferentes lançariam sombras de comprimentos distintos.

Eratóstenes decidiu fazer um experimento. Ele mediu o comprimento da sombra em Alexandria ao meio-dia de 21 de junho, quando a vareta em Assuã, ao Sul do Egito, não produzia sombra. Assim, ele obteve o ângulo A , conforme a figura abaixo.

Preste atenção na figura acima. O ângulo B terá o mesmo valor de A , pois o desenho do experimento de Eratóstenes se reduz a uma geometria muito simples:

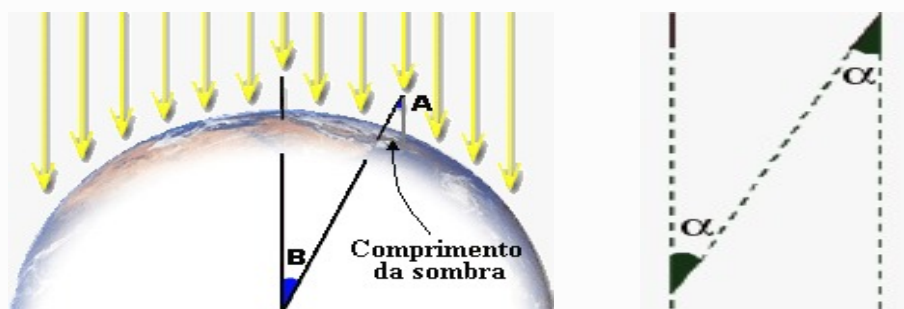


Figura 7.2: Siena 2 e 3

se duas retas paralelas interceptam uma reta transversal, então os ângulos correspondentes são iguais.

As retas paralelas são os raios de luz do Sol e a reta transversal é a que passa pelo centro da Terra e pela vareta em Alexandria. O ângulo B (também igual a 7°), é a uma fração conhecida da circunferência da Terra e corresponde à distância entre Assuã e Alexandria!

Eratóstenes sabia que essa distância valia cerca de 800 km e então pensou: 7° são aproximadamente $\frac{1}{50}$ de uma circunferência (360°). E isso corresponde a cerca de 800 km. Oitocentos quilômetros vezes cinquenta são quarenta mil quilômetros, de modo que deve ser este o valor da circunferência da Terra.

Valor encontrado atualmente: cerca de 40,072 km ao longo da linha do equador. Um erro muito pequeno para uma medida tão simples, e feita há tanto tempo! Com a circunferência, podemos calcular o diâmetro e o raio ou ainda o volume e a área da superfície, mediante fórmulas simples.

Repare que o conhecimento utilizado por Eratóstenes (retas paralelas cortadas por uma transversal) é formalmente adquirido hoje nas aulas de geometria do Ensino Fundamental.

7.2 O conceito de Ângulo

Um **ângulo** é determinado por uma abertura entre duas retas de mesma origem. Para medirmos ângulos precisamos estabelecer o valor do ângulo total (uma volta completa no sentido anti-horário) e os demais ângulos são medidos de maneira proporcional. Existem duas formas usuais de medirmos ângulos: definindo o ângulo total como

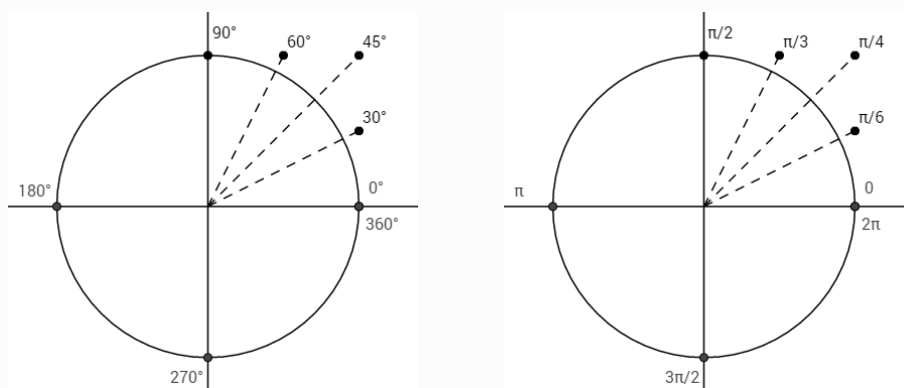


Figura 7.3: Círculo 1 e 2

360 **graus** ou como 2π **radianos**. Vejamos algumas medições em cada um dos dois sistemas.

Considere um ângulo θ . Denotamos por θ_g a medida desse ângulo em graus e θ_r em radianos. Esses dois valores estão relacionados pela equação. Isso quer dizer que podemos obter θ_g se conhecemos θ_r ou vice versa.

$$\frac{360}{2\pi} = \frac{\theta_g}{\theta_r}.$$

A unidade de medida padrão no ensino superior é radianos e para transformar para radianos é comum usar a relação equivalente $180^\circ = \pi \text{ rad}$, conforme ilustra o exemplo que segue.

EXEMPLO 7.2.1: Converta 120° para radianos.

Para fazermos essa conversão usamos que 180° é equivalente a $\pi \text{ rad}$ e montamos a seguinte regra de três.

graus	radianos
180°	$\pi \text{ rad}$
120°	x

Assim,

$$180x = 120\pi$$

$$x = \frac{2\pi}{3} \text{ rad.}$$

Logo, 120° é equivalente a $\frac{2\pi}{3}$ rad.

Pode ser que seja necessário voltar de radianos para graus. O exemplo seguinte ilustra essa situação.

EXEMPLO 7.2.2: Converta $\frac{5\pi}{3}$ radianos para graus.

Para converter de radianos para graus, basta usarmos a relação $180^\circ = \pi$ rad. Assim,

$$\frac{5\pi}{3} \text{ rad} = 5 \frac{180^\circ}{3} = 300^\circ.$$

7.3 Relações no Triângulo Retângulo

Importantes relações são estabelecidas entre os ângulos e os lados de triângulos retângulos. Considere um triângulo retângulo que contém um ângulo $0 < \theta < \pi/2$ conforme Figura 7.4.

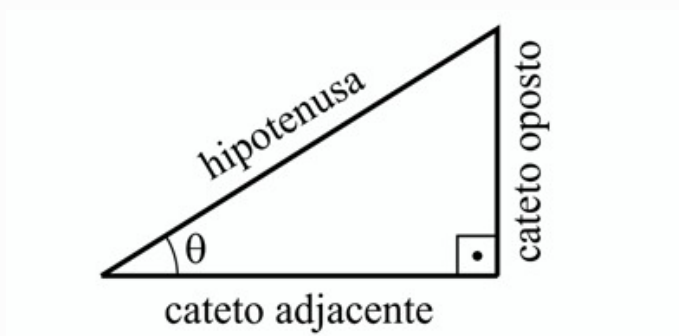


Figura 7.4: Triângulo retângulo

Em relação ao ângulo θ , os lados desse triângulo recebem os seguintes nomes:

- ◇ cateto oposto
- ◇ cateto
- ◇ hipotenusa

Como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é π radianos, o terceiro ângulo (que chamaremos de α) desse triângulo mede $\pi/2 - \theta$ (pois $\alpha + \theta + \pi/2 = \pi$).

Portanto, o cateto oposto ao ângulo θ é o cateto adjacente ao ângulo α e o cateto adjacente ao ângulo θ é o cateto oposto ao ângulo α .

Estudaremos as relações entre os lados de dois triângulos retângulos que possuem um mesmo ângulo θ . Fixamos dois desses triângulos e nomeamos os lados desses triângulos da seguinte forma:

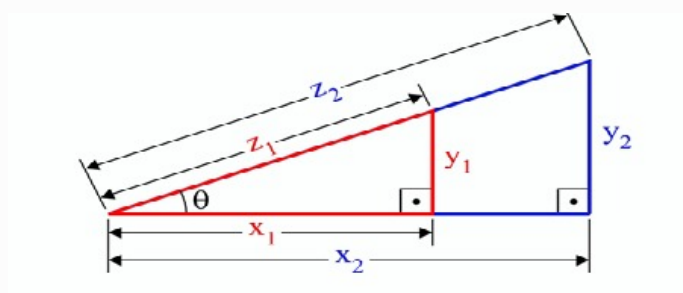


Figura 7.5: ?

Como ambos os triângulos possuem um ângulo reto e um ângulo θ , o terceiro ângulo desses dois triângulos mede $\pi/2 - \theta$. Ou seja, eles são semelhantes pelo caso AAA (ângulo ângulo ângulo) e podemos estabelecer as seguintes relações:

$$\frac{y_1}{z_1} = \frac{y_2}{z_2}, \quad \frac{x_1}{z_1} = \frac{x_2}{z_2}, \quad \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}.$$

Ou seja, independente dos valores dos catetos e da hipotenusa, as razões entre os lados de um triângulo retângulo que contém um ângulo θ são constantes. Essas constantes (que dependem de θ) recebem nomes, os principais deles são: (Outras razões recebem os nomes de secante, cosseno e cotangente.)

Seno de θ

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}.$$

Cosseno de θ

$$\text{cos } \theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}.$$

Tangente de θ

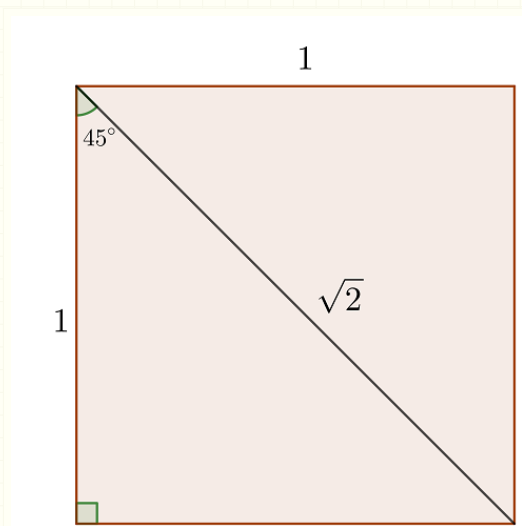
$$\text{tg } \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}.$$

Assim definidos, seno, cosseno e tangente são funções cujo domínio é o intervalo $(0, \pi/2)$. Para estendermos essas definições e obtermos funções com domínio real precisaremos generalizar a noção de ângulos para valores maiores que 2π e ângulos negativos e posteriormente, estender a noção de seno, cosseno e tangente desses ângulos através do círculo trigonométrico unitário.

É possível calcular os valores de seno, cosseno e tangente para os ângulos $\pi/4$, $\pi/3$ e $\pi/6$ utilizando a relação de Pitágoras no quadrado de lado 1 e no triângulo equilátero de lado 1. Esses ângulos são chamados de notáveis porque para demais ângulos não existe uma maneira tão simples de estabelecer os valores de seno, cosseno e tangente.

EXEMPLO 7.3.1: Calcule os valores de seno, cosseno e tangente para os ângulos $\pi/4$, $\pi/3$ e $\pi/6$ utilizando a relação de Pitágoras no quadrado de lado 1 e no triângulo equilátero de lado 1, justificando a tabela a seguir.

Vamos mostrar as razões trigonométricas para o ângulo de 45° . Para isso, considere um quadrado de lado 1 e tracemos sua diagonal. Ao fazermos esse procedimento, dividimos o quadrado em dois triângulos retângulos iguais como mostra a figura.



Podemos observar que

Cateto oposto a 45° vale 1;

Cateto adjacente a 45° vale 1;

Hipotenusa desses triângulos retângulos é $\sqrt{2}$.

Assim,

$$\operatorname{sen}(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg}(45^\circ) = \frac{1}{1} = 1.$$

Para encontrarmos as razões trigonométricas para os ângulos de 30° e 60° basta traçarmos uma altura (que é mediana e bissetriz) em um triângulo equilátero de lado l .

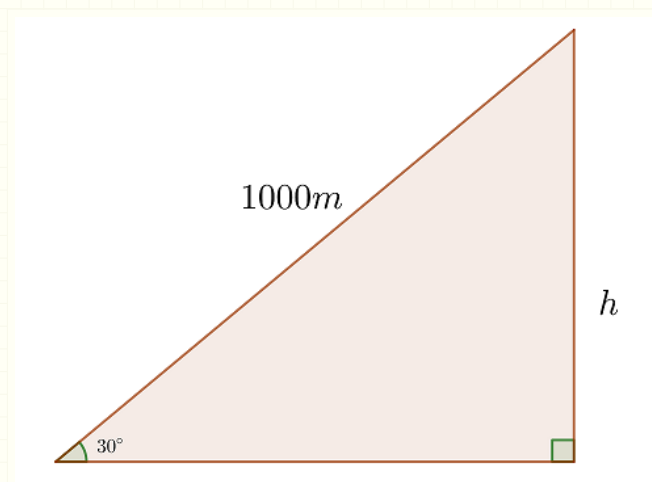
A partir dos valores encontrados no Exemplo 7.3, construímos a seguinte tabela

θ	$\operatorname{sen} \theta$	$\cos \theta$	$\operatorname{tg} \theta$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

A seguir resolveremos alguns exercícios que envolvem as razões métricas em um triângulo retângulo.

EXEMPLO 7.3.2: Um avião decola, percorrendo uma trajetória retilínea, formando com o solo, um ângulo de 30° (suponha que a região sobrevoada pelo avião seja plana). Após percorrer 1000 metros, qual a altura atingida pelo avião?

A figura descreve a situação.



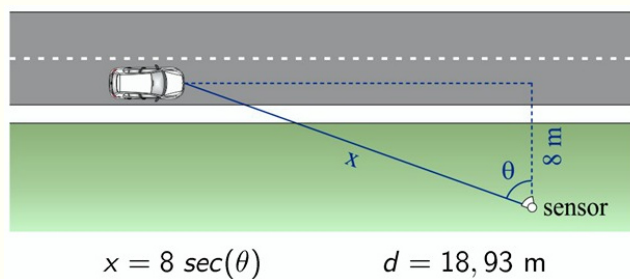
Note que temos envolvidos no problema um ângulo (30°), o cateto oposto a esse ângulo (h) e a hipotenusa (1000 m), assim, é conveniente usar o seno para obtermos a medida desconhecida.

$$\begin{aligned}\sin(30^\circ) &= \frac{h}{1000} \\ \frac{1}{2} &= \frac{h}{1000} \\ h &= 500\text{ m}\end{aligned}$$

Assim, após percorrer 1000 m o avião atinge 500 m .

Figura 7.6: Figura para o exercício 7.3.

EXEMPLO 7.3.3: Um sensor detecta a aproximação de veículos em uma rua. Determine uma função $x(\theta)$ que forneça a distância do sensor ao veículo em relação a θ . Se o sensor só detecta objetos quando θ é menor ou igual a $\pi/3$, determine a distância máxima que o carro pode estar do sensor para ser detectado.



A distância máxima ocorre quando o ângulo no qual o sensor detecta os objetos é máxima. Como, no exercício, temos o valor do cateto adjacente ao ângulo θ e queremos encontrar a hipotenusa. Portanto, iremos usar o cosseno.

$$\cos(60^\circ) = \frac{8}{x}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{8}{x}$$

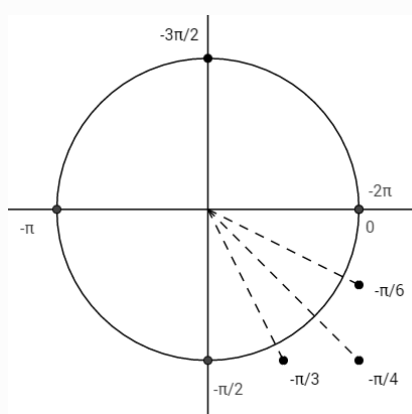
$$x = 16 \text{ m}$$

Portanto, a distância máxima que o carro pode estar do sensor para ser detectado é de 16 m.

7.4 Generalização da Noção de Ângulo

Após uma volta completa, continuamos medindo os ângulos. Assim, por exemplo, o ângulo $\pi/6$ ocupa a mesma posição que os ângulos $2\pi + \pi/6$ (após uma volta) ou $4\pi + \pi/6$ (após duas voltas) e assim por diante. Mais geralmente, para qualquer n natural, os ângulos x e $x + 2\pi n$ ocupam a mesma posição no círculo trigonométrico.

Para dar sentido a ângulos negativos, convencionou-se que ao girarmos no sentido anti-horário, medimos os ângulos negativamente.



Portanto, um ângulo x radianos ocupa o mesmo lugar que todos os ângulos da forma

$$x + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

7.5 Círculo Trigonométrico Unitário

Considere o triângulo retângulo de hipotenusa 1, apresentado na Figura 7.7.

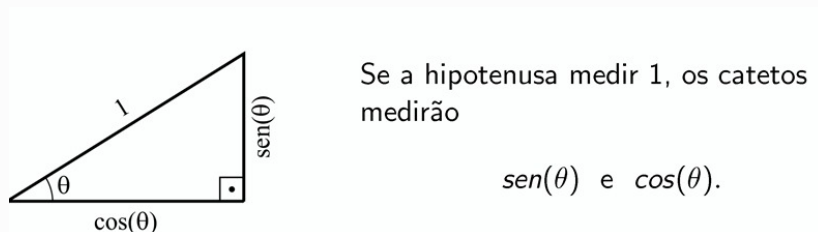


Figura 7.7: Triângulo retângulo de hipotenusa 1.

Suponhamos que

1. o triângulo esteja situado no plano cartesiano,
2. o vértice associado ao ângulo θ esteja sobre a origem $(0, 0)$,
3. o cateto adjacente ao ângulo θ fique sobre a parte positiva do eixo x ,
4. a hipotenusa do triângulo retângulo meça 1 e o ângulo θ seja medido no sentido anti-horário a partir do eixo x .

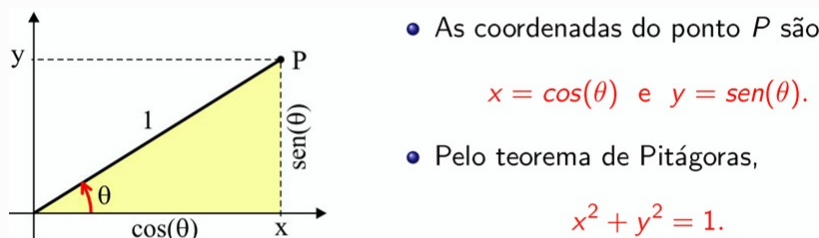


Figura 7.8: ?

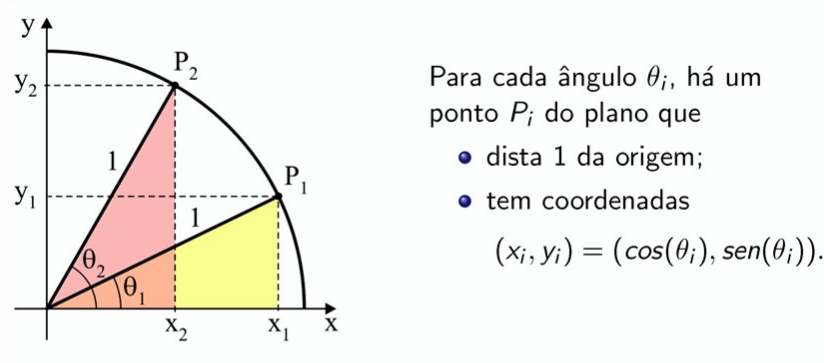


Figura 7.9: ?

Podemos agora definir o círculo trigonométrico unitário (conforme Figura 7.10), que é o círculo do plano cartesiano de centro na origem $(0, 0)$ e raio 1. O eixo x é também chamado de **eixo dos cossenos**, já o eixo y é também chamado de **eixo dos senos**.

Considere um ponto A sobre o círculo trigonométrico no primeiro quadrante e seja B a projeção desse ponto no eixo x . Seja C a interseção do segmento de reta que passa por $\overline{OA}$ com a reta $x = 1$ e $D = (1, 0)$, ou seja, o segmento $\overline{CD}$ encontra-se sobre a reta $x = 1$. Seja θ o ângulo $\hat{AOB}$. Observe que as coordenadas de A no plano cartesiano são $(\cos \theta, \sin \theta)$. Por semelhança de triângulos (triângulos AOB e COD) vemos que

$$\frac{|\overline{CD}|}{1} = \frac{|\overline{CD}|}{|\overline{OD}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{OB}|} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta},$$

ou seja,

$$|\overline{CD}| = \operatorname{tg} \theta.$$

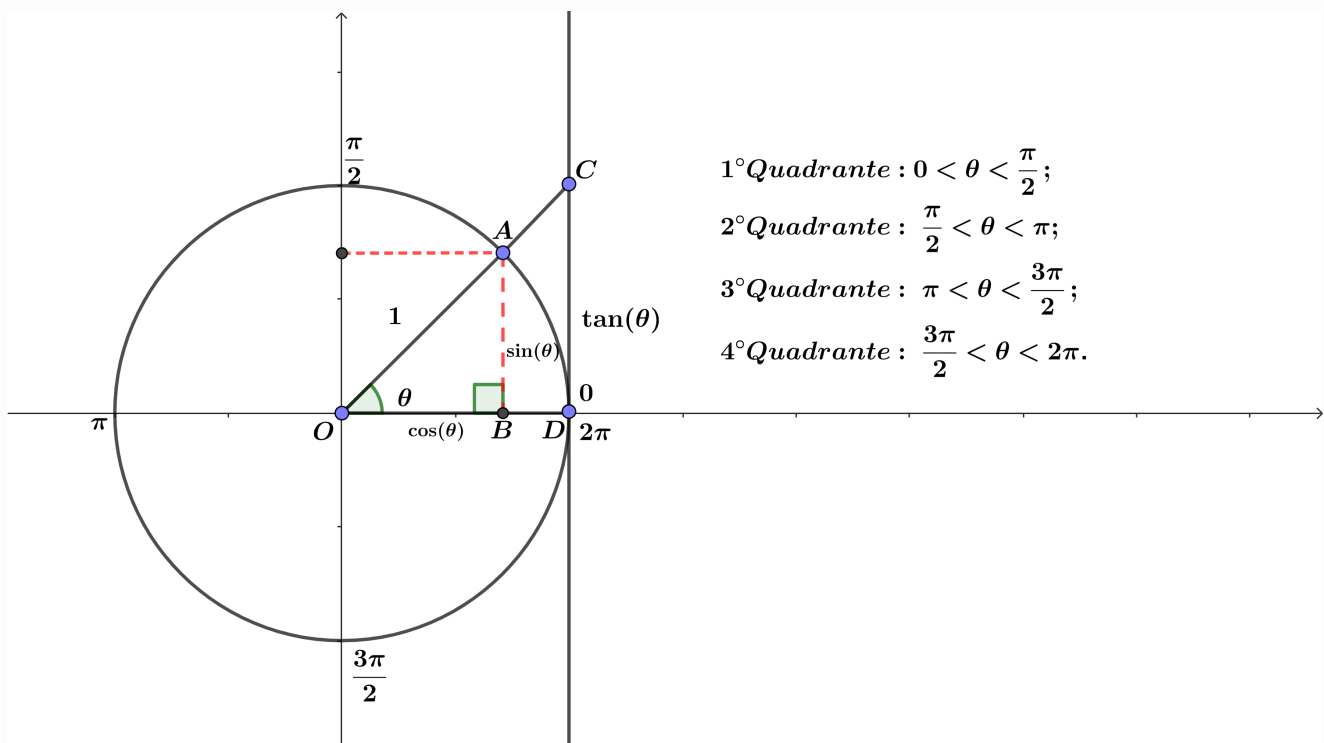


Figura 7.10: Círculo Trigonométrico Unitário.

Vemos assim que para $\theta \in (0, \pi/2)$ os valores $\sin \theta$, $\cos \theta$ e $\operatorname{tg} \theta$ podem ser obtidos a partir das coordenadas dos pontos A e C : $A = (\cos \theta, \sin \theta)$ e $C = (1, \operatorname{tg} \theta)$. Mas essa construção pode ser feita para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$ e dessa forma podemos definir as funções seno, cosseno e tangente para quaisquer ângulos reais. Por exemplo, essa construção para um ângulo θ no segundo quadrante pode ser vista na Figura 7.11.

Continuando a construção, podemos dividir o círculo trigonométrico unitário em quatro partes iguais, chamadas de quadrantes. No primeiro quadrante estão os ângulos entre 0 e 90° , ou equivalentemente, entre 0 e $\pi/2$. No segundo quadrante

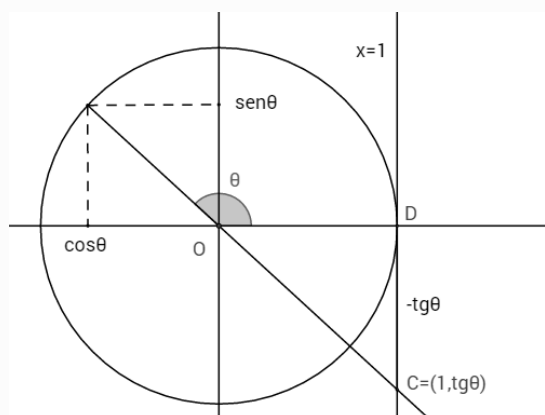


Figura 7.11: Interpretação Geométrica da Tangente de um Ângulo no Segundo Quadrante

estão os ângulos entre 90° e 180° (ou entre $\pi/2$ e π). No terceiro quadrante estão os ângulos entre 180° e 270° (ou entre π e $3\pi/2$). Por fim, no quarto quadrante estão os ângulos entre 270° e 360° (ou entre $3\pi/2$ e 2π). Os ângulos $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ e 2π são denominados ângulos do eixo. Esses ângulos são notáveis e observando a Figura 7.10, podemos descobrir o valor do seno, cosseno e tangente desses arcos. A Tabela a seguir apresenta esses valores.

	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\text{sen}(x)$	0	1	0	-1	0
$\text{cos}(x)$	1	0	-1	0	1
$\text{tg}(x)$	0	$\nexists$	0	$\nexists$	0

A **relação fundamental trigonométrica** A partir da Figura 7.10, por exemplo, podemos extrair uma relação trigonométrica, que é muito útil. Essa relação é conhecida como relação fundamental trigonométrica e pode ser demonstrada, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo de hipotenusa 1 e catetos $\text{sen}(x)$ e $\text{cos}(x)$

$$\text{sen}^2(x) + \text{cos}^2(x) = 1$$

A partir dessa relação podemos obter duas outras conforme serão mostradas nos exercícios que seguem.

EXEMPLO 7.5.1: Usando a relação fundamental trigonométrica mostre que:

$$\operatorname{tg}^2(x) + 1 = \sec^2(x),$$

quando

$$\cos(x) \neq 0 \quad \text{e} \quad 1 + \cot^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x) \quad \text{se} \quad \sin(x) \neq 0.$$

Da relação fundamental trigonométrica temos:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \tag{7.1}$$

Sabendo que $\cos(x) \neq 0$, podemos dividir a equação (7.1) por $\cos^2(x)$. Assim,

$$\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + 1 = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Logo,

$$\operatorname{tg}^2(x) + 1 = \sec^2(x).$$

Para chegarmos na outra expressão basta dividirmos a relação fundamental por $\sin^2(x)$.

7.6 Fórmulas de redução ao primeiro quadrante

Ao trabalharmos com Trigonometria e deparamo-nos com um ângulo que não se encontra no primeiro quadrante, sempre podemos reduzi-lo de forma a encontrar o ângulo correspondente a esse que esteja justamente no 1º quadrante. Usamos esse procedimento em virtude da simetria encontrada no ciclo trigonométrico. Mas precisamos nos atentar para o que ocorre com os sinais das funções trigonométricas em cada quadrante. A Tabela 7.1 e a Figura 7.12 mostram os sinais em cada quadrante.

	1º Q	2º Q	3º Q	4º Q
$\sin(x)$	+	+	−	−
$\cos(x)$	+	−	−	+
$\operatorname{tg}(x)$	+	−	+	−

Tabela 7.1: Sinais em cada quadrante.

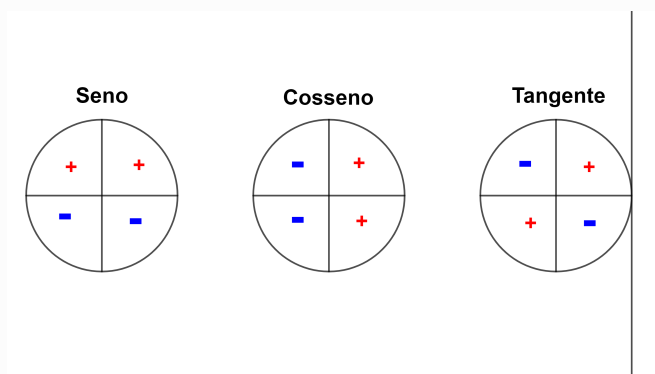


Figura 7.12: Sinais em cada quadrante.

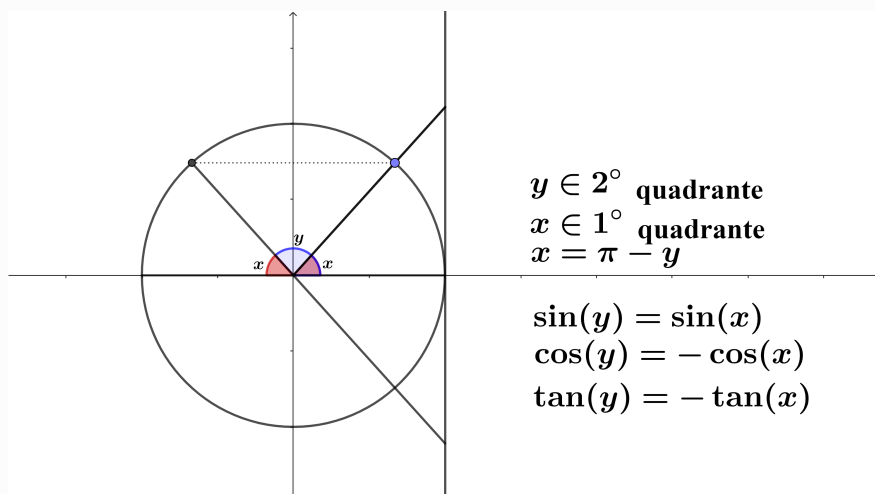


Figura 7.13: Redução do 2º quadrante para o 1º quadrante.

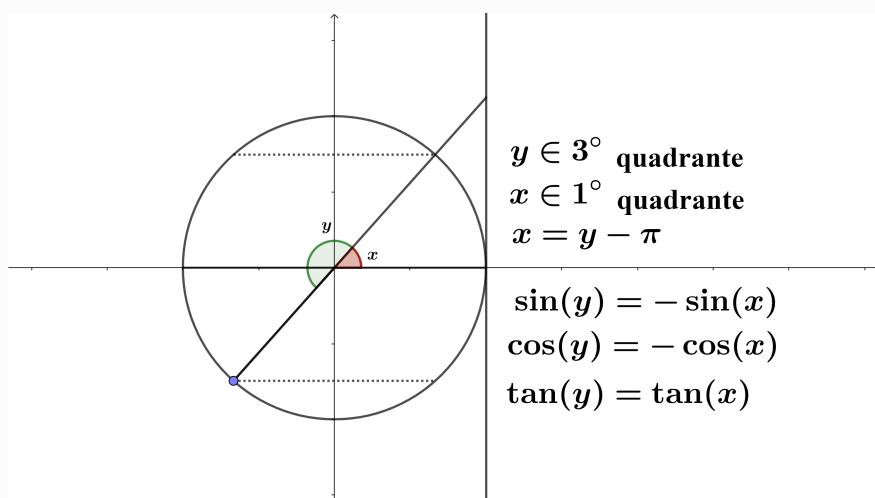


Figura 7.14: Redução do 3º quadrante para o 1º quadrante.

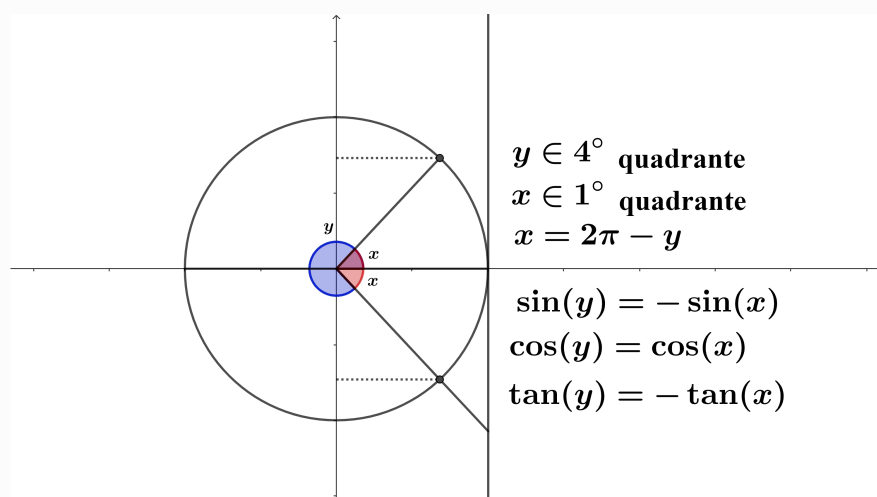


Figura 7.15: Redução do 4º quadrante para o 1º quadrante.

Se o ângulo com o qual estamos trabalhando for y e ele estiver no segundo quadrante, seu correspondente no 1º quadrante será o ângulo x tal que

$$\pi - x = y \quad \text{ou} \quad 180^\circ - x = y.$$

Você não deve se ater as fórmulas, a Figura 7.13 mostra que você pode fazer essa redução usando o círculo trigonométrico.

Se o ângulo y pertencer ao terceiro quadrante, seu correspondente x no primeiro quadrante será dado por

$$x + \pi = y \quad \text{ou} \quad 180^\circ + x = y.$$

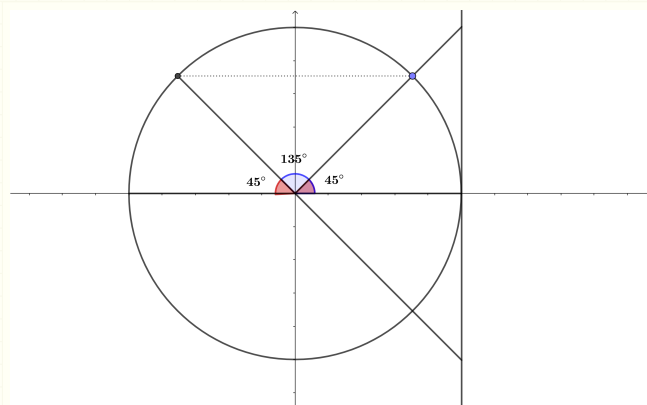
A Figura 7.14 mostra que você pode fazer essa redução usando o círculo trigonométrico.

Se o ângulo com o qual estamos trabalhando for y e ele estiver no quarto quadrante, seu correspondente no 1º quadrante será o ângulo x tal que

$$2\pi - x = y \quad \text{ou} \quad 360^\circ - x = y.$$

A Figura 7.15 mostra que você pode fazer essa redução usando o círculo trigonométrico.

EXEMPLO 7.6.1: Reduza o ângulo 135° e calcule os valores de $\sin(x)$, $\cos(x)$ e $\text{tg}(x)$ para esse ângulo.



O arco $x = 135^\circ$ está no 2º quadrante, então para reduzirmos ao primeiro quadrante basta usarmos a fórmula

$$180^\circ - x = y.$$

Logo,

$$y = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ.$$

Para encontrarmos as relações trigonométricas para esse ângulo, devemos nos atentar para o sinal das funções trigonométricas no quadrante a qual ele pertence. Nesse caso, temos que $x = 135^\circ$ está no segundo quadrante. Assim,

$$\text{sen}(135^\circ) = \text{sen}(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(135^\circ) = -\cos(45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg}(135^\circ) = -\text{tg}(45^\circ) = -1$$

EXEMPLO 7.6.2: Reduza o ângulo $\frac{11\pi}{6}$ rad e calcule os valores de $\text{sen}(x)$, $\cos(x)$ e $\text{tg}(x)$ para esse ângulo.

Sabendo que

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ,$$

então

$$\frac{11\pi}{6} \text{ rad} = \frac{11 \cdot 180}{6} = 330^\circ.$$

Assim,

$$x = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$$

está no 4º quadrante. Para reduzirmos ao primeiro quadrante, basta usarmos a fórmula

$$y = 360^\circ - x.$$

Logo,

$$y = 360^\circ - 330^\circ = 30^\circ.$$

Observando o sinal de cada função trigonométrica no 4º temos

$$\text{sen}(330^\circ) = -\text{sen}(30^\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(330^\circ) = \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg}(330^\circ) = -\text{tg}(30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

EXEMPLO 7.6.3: Reduza o ângulo $\frac{4\pi}{3}$ rad e calcule os valores de $\text{sen}(x)$, $\cos(x)$ e $\text{tg}(x)$ para esse ângulo.

Sabendo que

$$x = \frac{4 \cdot 180}{3} = 240^\circ,$$

então x está no 3º quadrante e para reduzirmos ao terceiro quadrante usamos a relação

$$y = x - 180^\circ.$$

Logo,

$$y = 240^\circ - 180^\circ = 60^\circ.$$

Assim, observando o sinal de cada função trigonométrica no 3º temos

$$\text{sen}(240^\circ) = -\text{sen}(60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(240^\circ) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg}(240^\circ) = -\text{tg}(60^\circ) = \sqrt{3}$$

7.7 Gráficos de Funções Trigonométricas

Um fenômeno é chamado periódico se o mesmo se repete sempre após o mesmo intervalo de tempo. Um exemplo simples de fenômeno periódico é o dia, determinado pelo movimento do Sol. A observação do movimento periódico dos corpos celestes nos possibilitou a criação do nosso calendário. Para uma melhor compreensão dos fenômenos periódicos, faz-se necessário o estudo das funções periódicas.

A repetição do valor numérico de uma função em um período determinado constitui uma função periódica. Mais precisamente, uma função f é periódica de período T se para todo x real

$$f(x + T) = f(x).$$

Observe que conhecido o gráfico de uma função periódica em um determinado intervalo de seu domínio, que tenha o tamanho de seu período, automaticamente conhecemos o gráfico em todo o domínio, uma vez que podemos repetir o gráfico em outros intervalos de mesmo tamanho. As funções trigonométricas são periódicas e por isso apresentaremos os seus gráficos em intervalos do tamanho de seus períodos. O período das funções seno e cosseno é 2π . O período da função tangente é π .

As seguintes observações merecem destaque.

As funções seno e cosseno são definidas em todo o conjunto dos números reais e seus valores variam entre -1 e 1 , ou seja, a imagem dessas funções é o intervalo fechado

de $[-1, 1]$. Isso significa que o valor máximo que a função pode atingir é 1, enquanto o valor mínimo é -1 .

É importante notar que, além de possuir valor máximo de 1 e valor mínimo de -1 , as funções seno e cosseno atingem esses valores infinitas vezes ao longo de seus domínios.

A função $y = \cos(x)$ é uma função par, o que significa que

$$\cos(-x) = \cos(x).$$

Isso pode ser facilmente observado no círculo trigonométrico, já que a função cosseno representa a coordenada x de um ponto na circunferência unitária, que é simétrica em relação ao eixo y . Portanto, quando o ângulo é negativo, o cosseno mantém o mesmo valor que quando o ângulo é positivo.

Para fazer o esboço do gráfico das funções $y = \sin(x)$ e $y = \cos(x)$, utilizamos os arcos do eixo no círculo trigonométrico.

A função $y = \sin(x)$ é uma função ímpar, o que significa que

$$\sin(-x) = -\sin(x).$$

Isso pode ser facilmente observado no círculo trigonométrico.

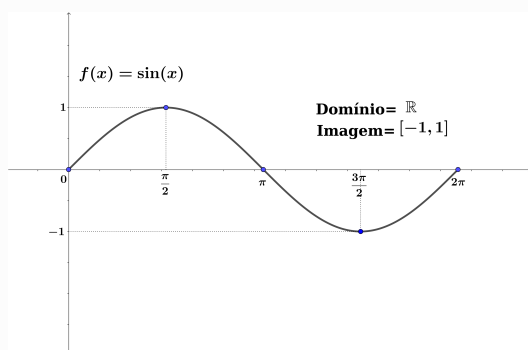
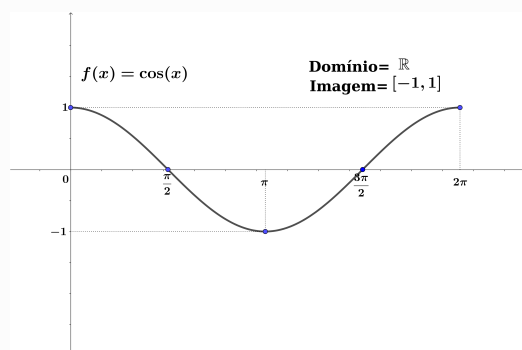
Detalhes sobre função $y = \tan(x)$, será apresentado posteriormente, no entanto, vale adiantar que essa função é ímpar, pois

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x).$$

As Figuras 7.16a e 7.16b mostram o gráfico das funções $y = \sin(x)$ e $y = \cos(x)$ em um período, ou seja, no intervalo $[0, 2\pi]$

Os próximos exemplos apresentam como construir gráficos de funções que são transformações nas funções $y = \sin(x)$ e $y = \cos(x)$.

EXEMPLO 7.7.1: Esboce o gráfico da função $f(x) = 2\sin(x) + 2$, explicitando o domínio e a imagem.

(a) O gráfico da função seno em $[0, 2\pi]$.(b) O gráfico da função cosseno em $[0, 2\pi]$.**Figura 7.16:** Funções seno e cosseno.

Note que $D(f) = \mathbb{R}$, uma vez que não temos nenhuma restrição para x .

Para encontrarmos a imagem de f devemos lembrar que

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

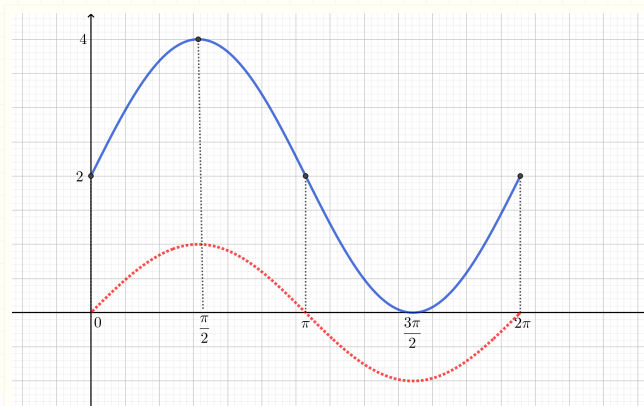
então se multiplicarmos por 2 e depois somarmos 2 em todos os termos da desigualdade chegamos que

$$-2 + 2 \leq 2 \sin(x) + 2 \leq 2 + 2$$

$$0 \leq 2 \sin(x) + 2 \leq 4$$

Assim, $\text{Im}(f) = [0, 4]$.

Uma vez que conhecemos o gráfico da função $y = \sin(x)$ podemos usar transformações para obtermos o gráfico de f . Uma vez que para obtermos a função f multiplicamos a função $y = \sin(x)$ por 2 e depois somamos 2 unidades, então para fazermos o esboço do gráfico de f precisamos fazer uma expansão vertical de comprimento 2 e depois fazermos uma translação vertical (subimos 2 unidades no eixo y).



Em azul o gráfico da função $y = 2 \operatorname{sen}(x) + 2$ e em vermelho gráfico da função $y = \operatorname{sen}(x)$.

EXEMPLO 7.7.2: Esboce o gráfico da função $g(x) = \frac{1}{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$, explicitando o domínio e a imagem.

Note que $D(f) = \mathbb{R}$, uma vez que não temos nenhuma restrição para x .

Para encontrarmos a imagem de f devemos lembrar que

$$-1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \leq 1$$

então se multiplicarmos por $1/2$ e depois subtraímos 1 em todos os termos dessa desigualdade chegamos que

$$\begin{aligned} -1 - \frac{1}{2} &\leq \frac{1}{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 \leq \frac{1}{2} - 1 \\ -\frac{3}{2} &\leq \frac{1}{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 \leq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

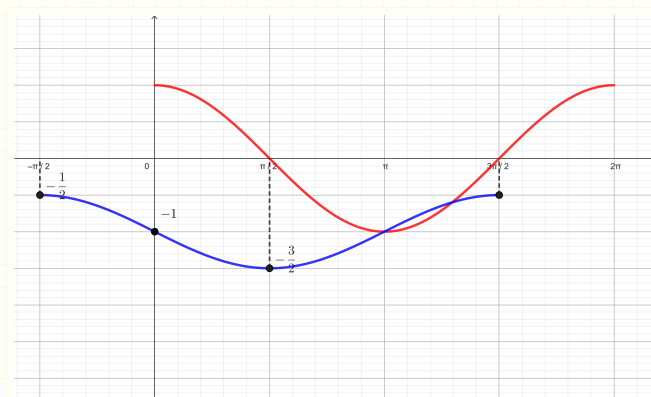
$$\text{Assim, } \operatorname{Im}(f) = \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right].$$

Conhecemos o gráfico da função $y = \cos(x)$ então para obtermos o gráfico da função f precisamos fazer três transformações na função $y = \cos(x)$:

Contração vertical, por conta do fator $1/2$.

Deslocamento horizontal, ou seja, “andar para trás” $\pi/2$ unidades.

Fazer uma translação vertical, ou seja, “descer” uma unidade no eixo y .



Em azul, o gráfico da função

$$y = \frac{1}{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) - 1$$

e em vermelho, gráfico da função $y = \cos(x)$.

De modo geral, se temos uma função trigonométrica da forma

$$y = a + b \operatorname{sen}(kx + r) \quad y = a + b \cos(kx + r)$$

a imagem de qualquer uma dessas funções é o intervalo $[a - b, a + b]$ e o período é

$$\frac{2\pi}{|k|}.$$

No entanto, ao invés de olharmos só para essas fórmulas é interessante entender o porquê disso.

A função $f(x) = \operatorname{tg} x$ não está definida entre $-\pi/2$ e $\pi/2$, e consequentemente (porque f tem período π), em qualquer x da forma

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ para } k \in \mathbb{Z},$$

logo, o domínio da função tangente é

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

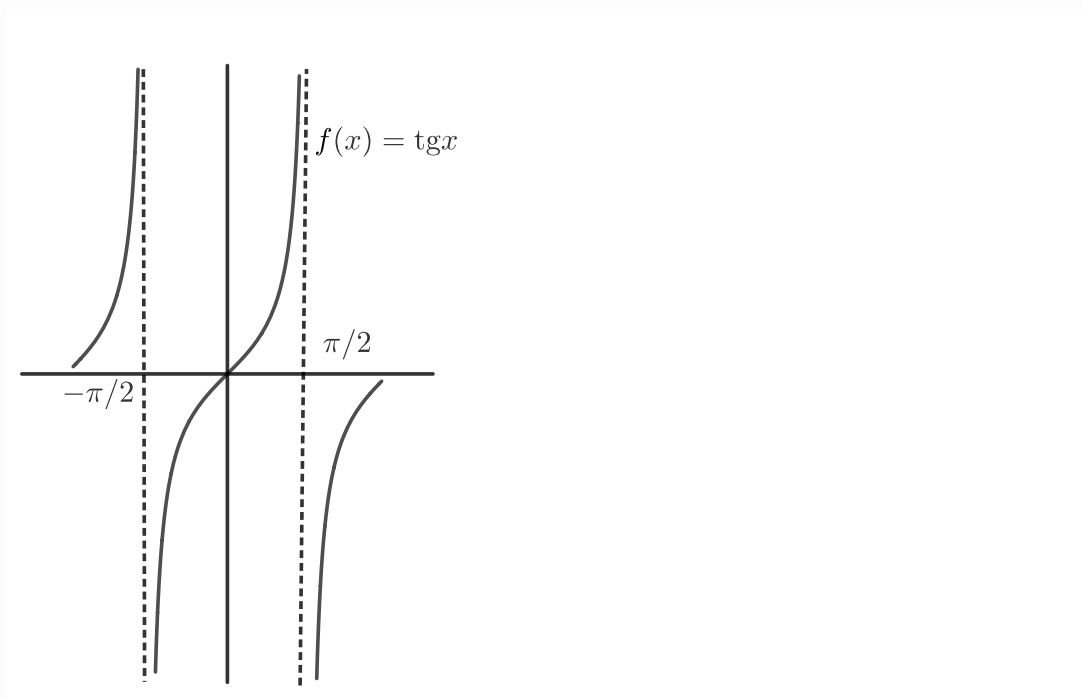


Figura 7.17: O gráfico da função tangente em $(-\pi/2, \pi/2)$.

7.8 Outras Funções Trigonômétricas

Definimos as funções seno, cosseno e tangente que são as principais funções trigonométricas, mas outras funções trigonométricas também são importantes.

Cosecante de x

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}, \quad \text{se } \operatorname{sen}(x) \neq 0.$$

Secante de x

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \text{se } \cos(x) \neq 0.$$

Cotangente de x

$$\cot x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \quad \text{se } \operatorname{tg}(x) \neq 0.$$

EXEMPLO 7.8.1: Pesquise sobre o domínio, a imagem, o gráfico e a inversa de cada uma das funções definidas nessa seção.

EXEMPLO 7.8.2: Se $\cos(x) = -\frac{2}{5}$ e x no 3º quadrante, calcule o valor de $\sec(x) + \operatorname{tg}(x)$.

Sempre que tivermos o valor de uma das funções trigonométricas $\operatorname{sen}(x)$ ou $\cos(x)$, a relação fundamental trigonométrica será útil para encontrar a outra função. Por exemplo, nesse exercício temos o valor de $\cos(x)$, então podemos encontrar o valor de $\operatorname{sen}(x)$ usando a relação fundamental trigonométrica. Assim,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) &= 1 \\ \operatorname{sen}^2(x) + \left(-\frac{2}{5}\right)^2 &= 1 \\ \operatorname{sen}^2(x) + \frac{4}{25} &= 1 \\ \operatorname{sen}^2(x) &= 1 - \frac{4}{25} \\ \operatorname{sen}^2(x) &= \frac{21}{25} \\ \operatorname{sen}(x) &= \pm \frac{\sqrt{21}}{5}\end{aligned}$$

Uma vez que x no 3º quadrante, então $\operatorname{sen}(x) = -\frac{\sqrt{21}}{5}$, assim:

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} = -\frac{5}{2}$$

e

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = \frac{-\frac{\sqrt{21}}{5}}{-\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

Consequentemente

$$\sec(x) + \operatorname{tg}(x) = -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2} = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}.$$

EXEMPLO 7.8.3: Se $\operatorname{sen}(x) = \frac{3}{5}$ e x no 1º quadrante, encontre o valor da expressão

$$z = \frac{\sec(x) - \operatorname{cosec}(x)}{\operatorname{tg}(x) + \cot(x)}$$

Usando a relação fundamental trigonométrica temos:

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2(x) = 1$$

$$\cos^2(x) = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\cos^2(x) = \frac{16}{25}$$

$$\cos(x) = \pm \frac{4}{5}$$

Sendo x no 1º quadrante, então $\cos(x) = \frac{4}{5}$, assim:

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{5}{4};$$

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4};$$

$$\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{5}{3};$$

$$\cot(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)} = \frac{4}{3}.$$

Portanto,

$$z = \frac{\sec(x) - \operatorname{cosec}(x)}{\operatorname{tg}(x) + \cot(x)} = \frac{5/4 - 5/3}{3/4 + 4/3} = -\frac{1}{5}.$$

7.9 Identidades Trigonométricas

Algumas relações conhecidas como **Identidades Trigonométricas** serão fundamentais no curso

Seno da soma

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a. \quad (7.2)$$

Cosseno da soma

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin b \sin a \quad (7.3)$$

Para visualizar as demonstrações das identidades (7.2) e (7.3), assista ao vídeo disponível neste link.



Tangente da soma

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}. \quad (7.4)$$

Demonstração

Para demonstrar esse item, usamos a definição de função tangente e as expressões (7.2) e (7.3). Assim,

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin b \sin a}$$

Dividindo o numerador e o denominador por $\cos a \cos b$, desde que seja não nulo, temos

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b - \sin b \sin a}{\cos a \cos b}} = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

Portanto, a fórmula para a tangente da soma é

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

Senos da diferença

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a. \quad (7.5)$$

Cosseno da diferença

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin b \sin a. \quad (7.6)$$

As identidades (7.5) e (7.6) podem ser demonstrados trocando b por $-b$ nas expressões (7.2) e (7.3), respectivamente, e usando que a função seno é ímpar e a função cosseno é par.

Arco duplo: Seno

$$\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a). \quad (7.7)$$

Essa fórmula é muito útil na trigonometria, pois permite calcular o valor do seno de um ângulo duplo em termos dos valores de seno e cosseno do ângulo original.

Demonstração

Para demonstrá-la, vamos partir da fórmula da adição para o seno (7.2), trocando b por a . Logo,

$$\begin{aligned} \sin(2a) &= \sin(a + a) \\ &= \sin(a) \cos(a) + \cos(a) \sin(a) \\ &= 2 \sin(a) \cos(a) \end{aligned}$$

Portanto, a fórmula para o seno do arco duplo é

$$\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$$

Arco duplo: Cosseno

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) \quad (7.8)$$

Demonstração

Vamos partir da fórmula da adição para o cosseno (7.3)

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

Substituindo $\alpha = a$ e $\beta = a$, temos

$$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos(a + a) \\ &= \cos(a)\cos(a) - \sin(a)\sin(a) \\ &= \cos^2(a) - \sin^2(a).\end{aligned}$$

Portanto, a fórmula para o cosseno do arco duplo é

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$$

Note que isolando $\sin^2(x)$ na identidade trigonométrica

$$\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1,$$

podemos reescrever a expressão (7.8) como

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - (1 - \cos^2(a))$$

Simplificando, obtemos outra expressão para $\cos(2a)$, que depende apenas de cosseno

$$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 \tag{7.9}$$

Se isolarmos $\cos^2(x)$ na identidade trigonométrica $\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$, podemos reescrever a expressão (7.8) como

$$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a) \tag{7.10}$$

Essas expressões serão essenciais para demonstrar as fórmulas de arco metade que seguem.

Arco metade: Cosseno

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)). \tag{7.11}$$

Demonstração

Começamos com a fórmula (7.9),

$$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$$

e substituimos a por $x/2$ para obter

$$\cos(x) = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

Isolando $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$, temos

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos(x))$$

Substituindo $x/2$ por x e reescrevendo a equação em termos de $\cos(2x)$, temos

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

Portanto,

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

Arco metade: Seno

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)). \quad (7.12)$$

Demonstração

Para comprovar esse item, é possível utilizar a mesma abordagem utilizada anteriormente, porém aplicando agora a fórmula (7.10). Dessa forma, será possível demonstrar de maneira equivalente a veracidade desse item.

7.10 Equações Trigonométricas

Uma equação trigonométrica é uma equação que envolve funções trigonométricas como seno, cosseno, tangente, cotangente, secante ou cossecante de uma variável trigonométrica. O objetivo da resolução de equações trigonométricas é encontrar todas as soluções possíveis para a equação.

As equações abaixo são exemplos de equações trigonométricas:

$$\sin(x) = \frac{1}{2}$$

$$\cos^2(x) - \cos(x) = 0$$

$$\cos(x) (\operatorname{tg}(x) - 1) = 0$$

Para resolvermos uma equação trigonométrica, precisamos nos atentar em qual intervalo é pedida a solução.

A resolução de equações trigonométricas pode ser feita por meio de diversas técnicas, dependendo da complexidade da equação. Alguns dos métodos mais comuns incluem:

1. Equações simples: são aquelas que envolvem apenas uma função trigonométrica. Nesse caso, é possível usar propriedades básicas das funções trigonométricas para encontrar as soluções.
2. Equações quadráticas: são aquelas que envolvem o quadrado de uma função trigonométrica. Nesse caso, é possível fazer uma substituição adequada para transformar a equação em uma equação quadrática comum, que pode ser resolvida usando as técnicas usuais.
3. Equações com produto nulo: são aquelas em que uma ou mais funções trigonométricas multiplicadas entre si resultam em zero. Nesse caso, é possível usar a propriedade do produto nulo para encontrar as soluções.
4. Uso de identidades: muitas vezes, as equações trigonométricas podem ser resolvidas por meio da aplicação de identidades trigonométricas, como as identidades de soma e diferença, identidades de produto e identidades de duplo ângulo.

Em geral, a resolução de equações trigonométricas requer um bom conhecimento das propriedades e identidades das funções trigonométricas, bem como das técnicas algébricas usadas para resolver equações. Vamos resolver alguns exemplos.

EXEMPLO 7.10.1: Resolva a seguinte equação trigonométrica $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

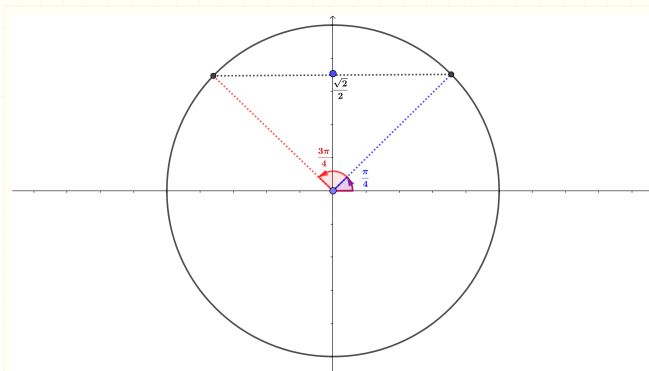
No intervalo $[0, 2\pi]$

Note que, nesse caso, queremos encontrar os arcos no intervalo $[0, 2\pi]$, cujo seno vale $\sqrt{2}/2$. Sabemos que $\sin(\theta)$ é positivo no primeiro e segundo quadrante. No primeiro quadrante o ângulo é $\pi/4$ (usamos sempre o arco do 1° como referência).

Para encontrar o arco no segundo quadrante, usamos a expressão

$$\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4},$$

conforme mostra a figura.



Portanto, a solução da equação pedida é

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

Solução geral

A solução geral é dada por:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

EXEMPLO 7.10.2: Resolva a equação $2 \cos \left(\frac{\theta}{3} \right) - \sqrt{3} = 0$, onde $0 \leq \theta \leq 3\pi$.

A equação

$$2 \cos \left(\frac{\theta}{3} \right) - \sqrt{3} = 0$$

é equivalente a

$$\cos \left(\frac{\theta}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como $0 \leq \theta \leq 3\pi$, então,

$$0 \leq \frac{\theta}{3} \leq \pi.$$

Uma vez que o único arco no intervalo $[0, \pi]$, que possui cosseno igual a

$$\sqrt{3}/2 \text{ é } \pi/6,$$

temos que

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{3} &= \frac{\pi}{6} \\ \theta &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Portanto,

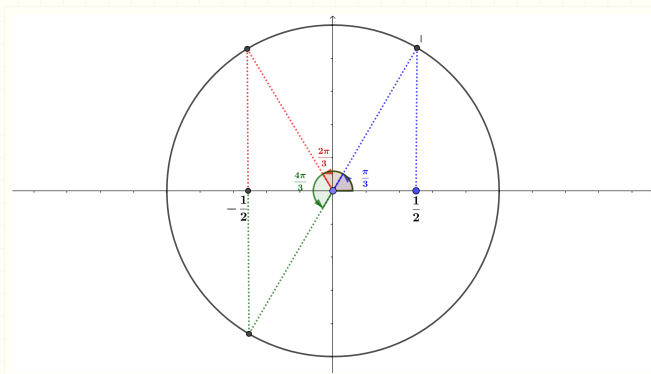
$$S = \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}.$$

EXEMPLO 7.10.3: Resolva a equação $2 \cos(x) = -1$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

Primeiro, vamos isolar o $\cos(x)$ dividindo ambos os lados por 2:

$$\cos(x) = -\frac{1}{2}$$

Sabemos que o cosseno é negativo no segundo e terceiro quadrante, para encontrarmos quais são esses arcos, pegamos como referência o arco no primeiro quadrante que tem cosseno igual a $1/2$, isto é, $\pi/3$.



Conforme mostra a figura, o arco no segundo quadrante é

$$\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

e o arco no terceiro quadrante é

$$\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

Assim,

$$\cos(x) = -\frac{1}{2}$$

ocorre quando x é um ângulo de

$$\frac{2\pi}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{4\pi}{3}$$

(ou seus equivalentes negativos). Portanto, a solução da equação no intervalo $[0, 2\pi]$ é

$$S = \left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}$$

EXEMPLO 7.10.4: Resolva a equação

$$\left(\sin(\theta) - \frac{1}{2} \right) (\operatorname{tg}(\theta) - 1) = 0,$$

para $0 \leq \theta < \pi/2$.

Essa equação é do tipo produto nulo. Sabemos que produto ab só é zero se $a = 0$ ou $b = 0$. Portanto:

$$\sin(\theta) - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}(\theta) - 1 = 0$$

Analisando cada caso, separadamente

$$\sin(\theta) - \frac{1}{2} = 0$$

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

ou

$$\operatorname{tg}(\theta) - 1 = 0$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\theta) &= 1 \\ \theta &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Assim, a solução da equação pedida é:

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right\}.$$

EXEMPLO 7.10.5: Resolva a equação $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

Neste caso, temos uma equação quadrática trigonométrica que pode ser resolvida através da mudança de variável $y = \sin(x)$. Dessa forma, obtemos a equação do segundo grau

$$2y^2 - y - 1 = 0,$$

cujas raízes são

$$y = 1 \quad \text{e} \quad y = -\frac{1}{2}.$$

Portanto, podemos encontrar os valores de x correspondentes da seguinte maneira.

Para $y = 1$, temos $\sin(x) = 1$, o que implica em $x = \frac{\pi}{2}$.

Para $y = -1/2$, temos $\sin(x) = -1/2$. Isso ocorre em dois quadrantes, 3º e 4º quadrantes. Portanto, os valores possíveis de x são

$$\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \quad (3^\circ \text{ Q})$$

ou

$$2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \quad (4^\circ \text{ Q}).$$

Assim o conjunto solução da equação original é

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$$

7.11 Funções Trigonométricas Inversas

As funções seno, cosseno e tangente não são bijetoras, mas uma restrição no domínio das mesmas nos possibilita definir suas inversas. Essa escolha de domínio não é única, mas adotaremos as escolhas padrões, que são os intervalos que contém os ângulos notáveis e cujas imagens das funções restritas são iguais às imagens das funções sem restrição. Os gráficos das funções inversas são obtidos a partir dos gráficos das funções originais através da reflexão do gráfico da função original em torno da reta $y = x$. Por isso apresentaremos três imagens: o gráfico das funções trigonométricas restritas, esse gráfico juntamente com sua reflexão e o gráfico das funções trigonométricas inversas.

7.11.1 Arco Seno

A função

$$\text{sen}: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

é bijetora e sua inversa é denominada arco seno

$$\arcsen: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Por definição,

$$\arcsen x = y \quad \Leftrightarrow \quad \text{sen } y = x.$$

Por serem inversas uma da outra, essas duas funções satisfazem:

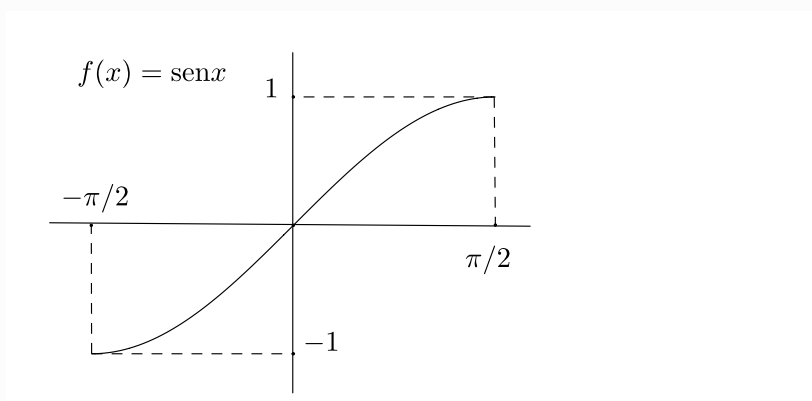
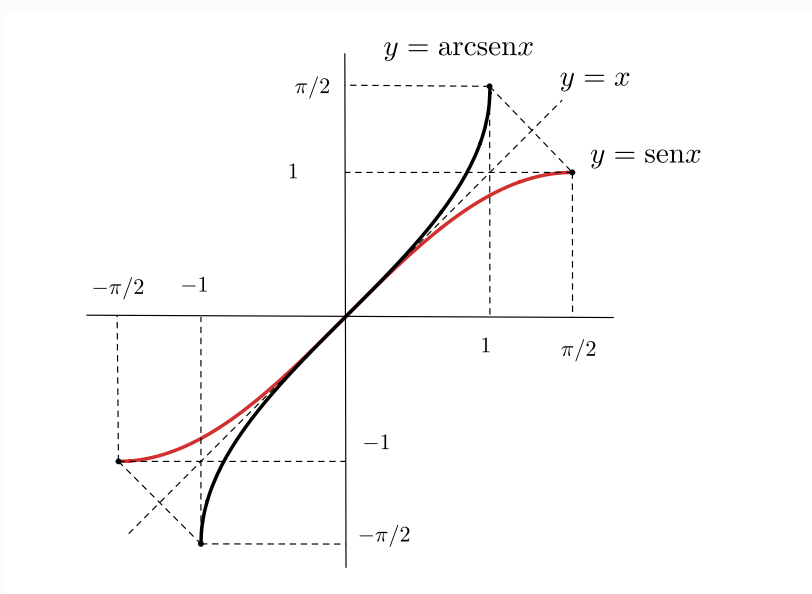
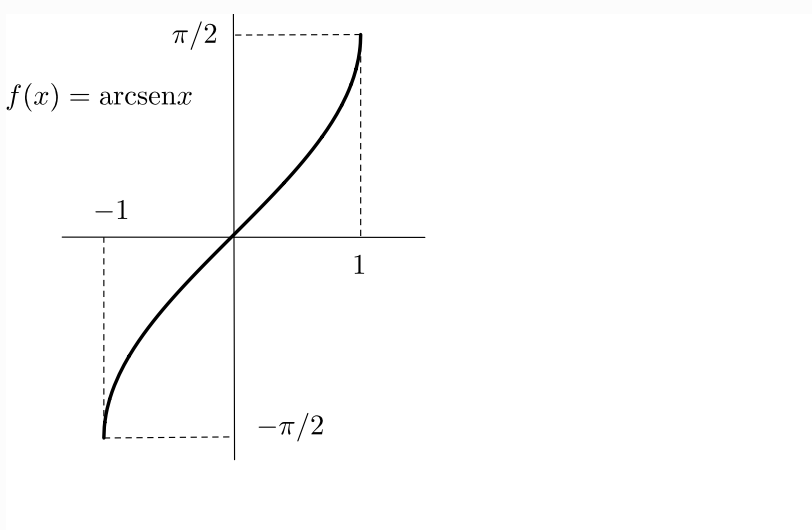
$$\text{sen}(\arcsen(x)) = x, \quad \forall \quad x \in [-1, 1].$$

$$\arcsen(\text{sen}(x)) = x, \quad \forall \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Para encontrarmos o gráfico da função arcoseno, vamos analisar o gráfico da função seno em $[-\pi/2, \pi/2]$ como dado a seguir:

A reflexão do gráfico de seno em torno no eixo x :

E finalmente, o gráfico do arco seno:

**Figura 7.18: ???****Figura 7.19: ???****Figura 7.20: ???**

EXEMPLO 7.11.1: Calcule o valor de $\arcsen x$ para x assumindo os seguintes valores:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 0, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad 1$$

Temos que:

$$\arcsen\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$\arcsen(0) = 0$$

$$\arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\arcsen(1) = \frac{\pi}{2}$$

Vale lembrar que o valor de $\arcsen(x)$ está restrito ao intervalo

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Por exemplo, no caso de

$$\arcsen\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

o valor $-\frac{\pi}{3}$ está nesse intervalo, mas o valor $\frac{2\pi}{3}$ também é uma solução da equação

$$\sen(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

porém não está no intervalo

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Por isso, é importante sempre verificar se a solução encontrada está dentro do intervalo de definição de $\arcsen(x)$.

7.11.2 Arco Cosseno

A função

$$\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

é bijetora e sua inversa é denominada arco cosseno:

$$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$$

Por definição,

$$\arccos x = y \Leftrightarrow \cos y = x.$$

Por serem inversas uma da outra, essas duas funções satisfazem

$$\cos(\arccos(x)) = x, \quad \forall \quad x \in [-1, 1].$$

$$\arccos(\cos(x)) = x, \quad \forall \quad x \in [0, \pi].$$

A seguir o gráfico da função cosseno em $[0, \pi]$ e de sua reflexão em torno de $y = x$.

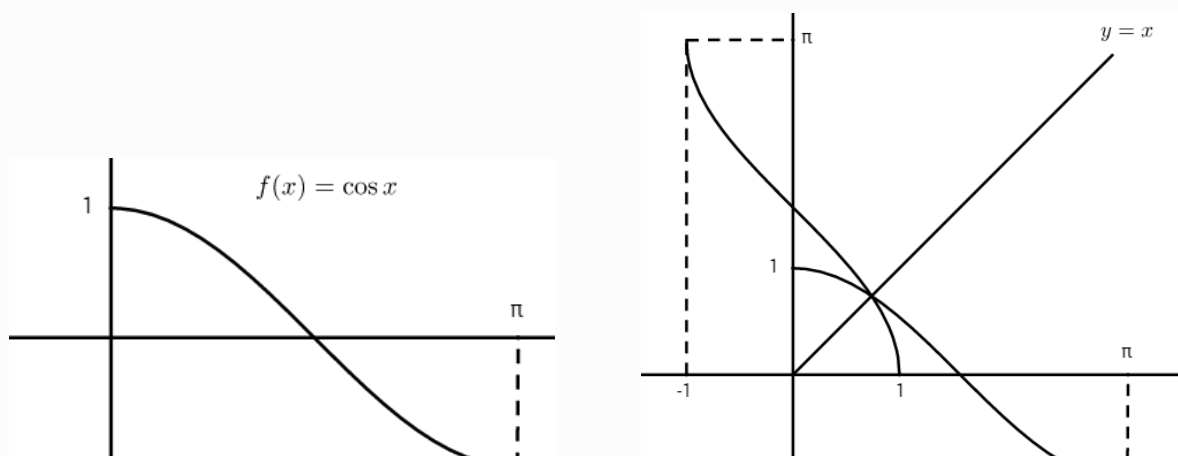


Figura 7.21: ???

O gráfico do arco cosseno.

EXEMPLO 7.11.2: Calcule o valor de $\arccos x$ para x assumindo os seguintes valores:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 0, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad 1$$

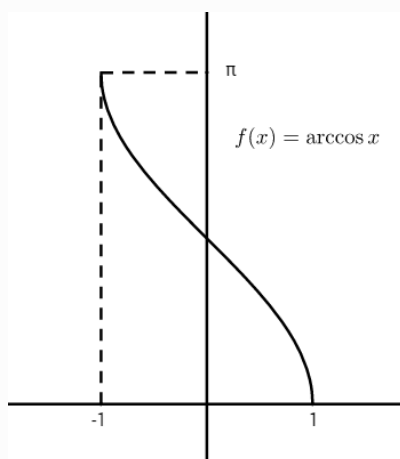


Figura 7.22: ???

Temos que:

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

$$\arccos(0) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

$$\arccos(1) = 0.$$

Vale lembrar que o valor de $\arccos(x)$ está restrito ao intervalo $[0, \pi]$. Por exemplo, no caso de

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

o valor $7\pi/6$ é uma solução da equação

$$\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

porém não está no intervalo $[0, \pi]$. Por isso, é importante sempre verificar se a solução encontrada está dentro do intervalo de definição de $\arccos(x)$.

7.11.3 Arco Tangente

A função

$$\operatorname{tg}: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$$

é bijetora e sua inversa é denominada arco tangente

$$\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2).$$

Por definição,

$$\operatorname{arctg} x = y \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x.$$

Por serem inversas uma da outra, essas duas funções satisfazem:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x)) = x, \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x)) = x, \quad \forall \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

A seguir o gráfico da função tangente em $(-\pi/2, \pi/2)$ e de sua reflexão em torno de $y = x$

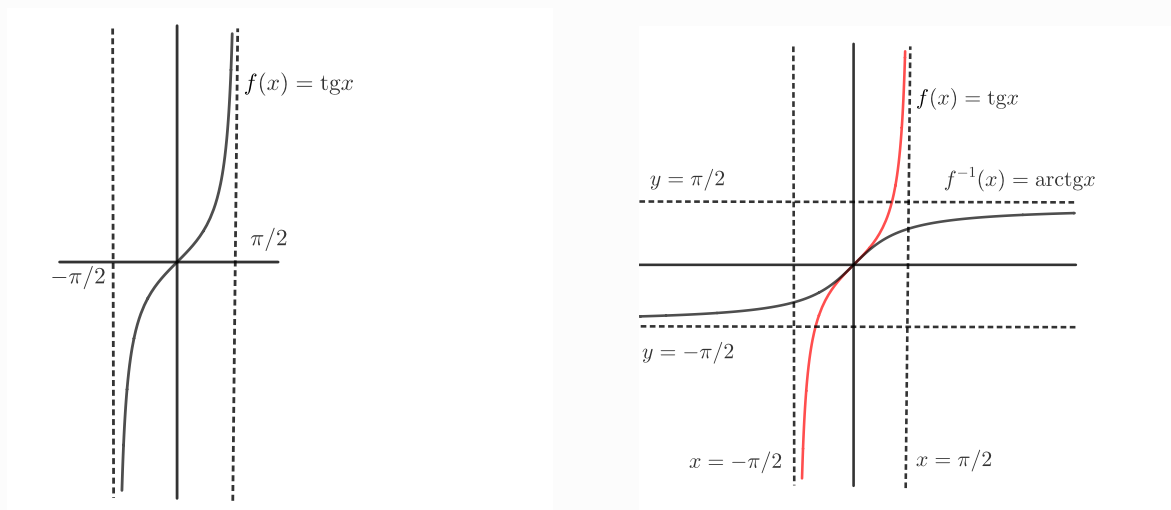
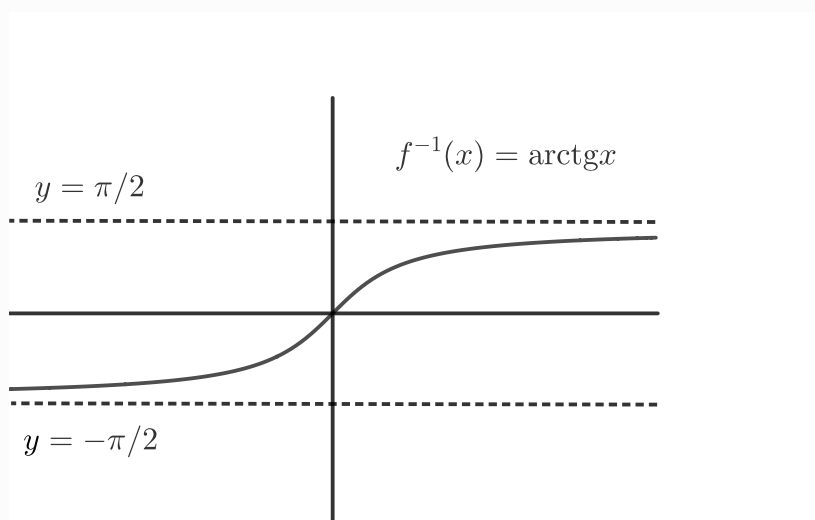


Figura 7.23: ???

O gráfico do arco tangente.

**Figura 7.24:** ???

EXEMPLO 7.11.3: Calcule o valor de $\operatorname{arctg} x$ para x assumindo os seguintes valores:

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad 0, \quad \sqrt{3}, \quad 1$$

Temos que:

$$\operatorname{arctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = -\frac{\pi}{6}.$$

$$\operatorname{arctg}(0) = 0.$$

$$\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

$$\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Vale lembrar que o valor de $\operatorname{arctg}(x)$ está restrito ao intervalo

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

Por exemplo, no caso de

$$\operatorname{arctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right),$$

a solução encontrada

$$-\frac{\pi}{6}$$

está dentro do intervalo

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

porém é importante sempre verificar se a solução encontrada está dentro do intervalo de definição de $\arctg(x)$.

7.12 Exercícios

1) [resp] A polícia federal localizou na floresta amazônica uma pista de pouso clandestina com as seguintes características:

- a) A pista media 300 metros de comprimento, era plana e horizontal;
- b) No final da pista havia uma árvore de 30 m de altura.

Um pequeno avião encontra-se em um ponto A da pista a 300 metros da árvore. O avião partirá desse ponto A, em direção à árvore e levantará vôo após percorrer 180 metros de pista. Se o avião levantar vôo em linha reta, de modo que essa reta (trajetória do avião no ar) forme um ângulo α com o plano horizontal, qual deverá ser a tangente de α para que a aeronave passe exatamente a 10 metros acima da árvore?

2) [resp] Uma TV encontra-se fixada em uma parede e a dois metros de distância dessa parede está posicionado um sofá de três lugares. Uma pessoa senta-se em um dos lugares das extremidades dos sofá de forma que sua distância até a TV é de 3 metros. O ângulo de visão dessa pessoa é o ângulo formado entre a reta que liga a visão da pessoa ao centro da TV e a reta perpendicular à parede passando pelo centro da TV. Sabendo que a visão da TV só é boa se a pessoa assiste TV em um ângulo menor ou igual a $\pi/3$, verifique se essa pessoa terá uma boa visão da TV.

3) [resp] Dê os valores dos ângulos a seguir e

radianos e calcule o valor das funções seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente nos mesmos:

- a) 150°
- b) 315°
- c) 210°

4) [resp] Sabendo que $\sin(x) = -\frac{3}{4}$ e $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, determine o valor de $\cos(x)$, $\operatorname{tg}(x)$ e $\sec(x)$

5) [resp] Sabendo que $\sin(\theta) = \frac{1}{4}$ e que θ está no segundo quadrante, determine o valor de $\cos(\theta)$, $\operatorname{tg}(\theta)$ e $\sec(\theta)$.

6) [resp] Sabendo que $\cos(x) = \frac{3}{5}$, determine os possíveis valores de $\sin(x)$ e os quadrantes aos quais x pode pertencer.

7) [resp] Trace os gráficos das funções a seguir incluindo ao menos um período, indique também qual a imagem, o valor máximo e o valor mínimo de cada função:

- a) $f(x) = \operatorname{tg}(x + \pi/4)$
- b) $f(x) = \cos(4x)$
- c) $f(x) = 1 - 2\sin(x)$
- d) $f(x) = \sin(x) + 2$

8) [resp] Simplifique as expressões trigonométricas, supondo sempre que os denominadores que aparecer são não nulos.

- a) $\frac{\sin^2 x}{\cos x} - \sec x$.

b) $\frac{\sin(4x)}{\sin(x)\cos(2x)}$

c) $\cot x \sec x \operatorname{cosec} x$

9) [resp] Faça a redução ao primeiro quadrante e encontre o valor de:

a) $\operatorname{cosec}(225^\circ)$

b) $\cot(150^\circ)$

c) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

d) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

e) $\sin(630^\circ)$

f) $\cos\left(\frac{37\pi}{6}\right) - \sin(6\pi)$

g) $\operatorname{tg}(315^\circ) - \cos(330^\circ)$

10) [resp] Qual o maior e o menor valor que $f(x) = 5 + 5\sin(5x + 5)$ assume?

11) [resp] A altura da cabine de uma roda gigante é descrita em função do tempo (em min) por

$$h(t) = 76 + 75 \sin\left(\frac{\pi t}{15} - \frac{\pi}{2}\right)$$

a) Determine as alturas máxima e mínima da cabine.

b) Determine quanto tempo a roda gigante demora para dar uma volta completa (ou seja, o período de $h(t)$).

c) Usando um programa gráfico, trace a curva $h(t)$.

12) [resp] Usando a fórmula de adição de arcos, encontre os valores de $\sin(75^\circ)$, $\cos(75^\circ)$ e $\operatorname{tg}(75^\circ)$. Dica: Note que $75^\circ = 30^\circ + 45^\circ$.

13) [resp] Nesse exercício você poderá usar as seguintes relações trigonométricas:

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) \text{ e } \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

a) Encontre uma expressão para $\cos(3x)$.

b) Mostre que podemos escrever $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$.

c) Mostre que $\operatorname{tg}(2x) = \frac{2\operatorname{tg}(x)}{1-\operatorname{tg}^2(x)}$

d) Determine $\sin(x-y)$, $\cos(x-y)$ e $\operatorname{tg}(x-y)$, sabendo que $\sin(x) = \frac{4}{5}$, $\cos(y) = \frac{\sqrt{5}}{5}$ e que $x, y \in 1^\circ$ quadrante.

e) Encontre o valor de $\sin(15^\circ)$ e a partir desse resultado, encontre o valor de $\sin(7,5^\circ)$.

f) Mostre que $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$.

g) Encontre o valor da expressão $\ln(\sec(\theta)) + \ln(\cos(\theta))$

h) Encontre o valor da expressão

$$\cos(\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right))$$

obs: Considere que os ângulos envolvidos nesse item estão sempre no primeiro quadrante.

14) [resp] Sabe-se que $x + y = \frac{\pi}{4}$ e $\sin(x) = \frac{5}{13}$, com $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, calcule $\sin(y)$ e $\cos(y)$.

15) [resp] Simplifique a expressão abaixo, levando em conta que os denominadores são sempre não nulos.

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)\cos(2\pi - x)}$$

16) [resp] Se $\sin(x) = m$ e $\cos(x) = n$, determine o valor de $\sin(2x)$, $\cos(2x)$ e $\operatorname{tg}(2x)$.

17) [resp] Calcule o valor de $\sin(105^\circ)$, $\sec(105^\circ)$, $\cos(15^\circ)$ e $\operatorname{tg}(15^\circ)$.

18) [resp] Se $\sin(x) = \frac{1}{3}$ e $x \in 2^\circ$ quadrante, encontre o valor de $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$, $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ e $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$

19) [resp] A partir do gráfico de $f(x) = \cos(x)$, faça o esboço do gráfico de $g(x) = -1 + 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Encontre também o período e a imagem.

20) [resp] Resolva as seguintes equações trigonométricas, no intervalo especificado:

a) Encontre os valores de x no intervalo $[0, 2\pi]$ para os quais $2\sin(x) = 1$

b) Qual é a soma das duas menores soluções positivas de $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$?

c) Encontre os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais $\sin(2x) = \cos x$.

d) $2\sin^2(x) - \sin(x) = 0$, no intervalo $[0, 2\pi]$.

e) $2\sin^2(x) + \cos(x) = 1$, no intervalo $[0, 2\pi]$.

f) $\operatorname{tg}^2(\theta) - 3 = 0$, no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

21) [resp] Encontre

a) $\arcsen(\frac{\sqrt{3}}{2})$

b) $\operatorname{tg}(\arccos(\frac{\sqrt{5}}{4}))$

c) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$

d) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(5))$

22) [resp] Calcule o valor da expressão $\arcsen(-1) + \arccos(\frac{1}{2}) - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}))$

23) [resp] Determine o domínio das seguintes funções

a) $f(x) = \arcsen(x - 3)$

b) $g(x) = \arccos(x^2 - 1)$

24) [resp] Use a Relação fundamental trigonométrica para mostrar que $\cos(\arcsen(x)) = \sqrt{1 - x^2}$, para $x \in [-1, 1]$.

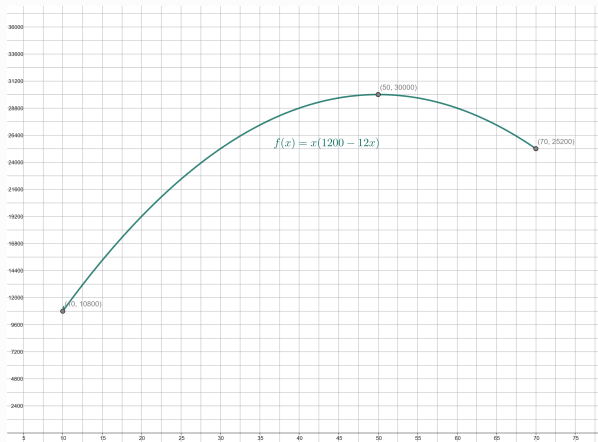
Respostas

Capítulo 1

- 1) a) Hipótese: a, b e c são lados de um triângulo e $\hat{A}$ é o ângulo oposto ao lado a
Tese: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$
- b) Hipótese: f é uma função diferenciável em $x = a$
Tese: f é uma função contínua em $x = a$
- c) Hipótese: T é um triângulo equilátero
Tese: T é um triângulo isósceles
- d) Hipótese: $x = 1$
Tese: $x^2 = 1$
- 2) a) Recíproca: Se $k = 2$, então k é um número par primo
Contrapositiva: Se $k \neq 2$, então k não é um número par primo
- b) Recíproca: Se f é contínua em $x = a$, então f é diferenciável em $x = a$
Contrapositiva: Se f não é contínua em $x = a$, então f não é diferenciável em $x = a$
- c) Recíproca: Se T é isósceles, então T é equilátero
Contrapositiva: Se T não é isósceles, então T não é equilátero
- d) Recíproca: Se $x^2 = 1$, então $x = 1$
Contrapositiva: Se $x^2 \neq 1$, então $x \neq 1$
- 3) Não. A recíproca afirma que se $x^2 = 1$ então $x = 1$. Contudo, se $x = -1$, temos que $x^2 = 1$. Assim, $x = \pm 1 \neq 1$, portanto a recíproca é falsa
- 4) a) Demonstração Direta: Sejam $n = 2k$ e $m = 2j$. A soma é $n + m = 2k + 2j = 2(k + j)$, que é par
Redução ao Absurdo: Suponha que $2k + 2j = 2p + 1$. Então $2(k + j - p) = 1$, o que é uma contradição (par igual a ímpar)
- b) Demonstração Direta: Sejam $n = 2k + 1$ e $m = 2j + 1$. A soma é $(2k + 1) + (2j + 1) = 2(k + j + 1)$, que é par
Redução ao Absurdo: Suponha que $2k + 1 + 2j + 1 = 2p + 1$. Então $2(k + j - p + 1) = 1$, o que é uma contradição (par igual a ímpar)
- c) Demonstração Direta: Sejam $n = 2k + 1$ e $m = 2j + 1$. O produto é $4kj + 2k + 2j + 1 = 2(2kj + k + j) + 1$, que é ímpar
Redução ao Absurdo: Suponha que o produto seja par ($2p$). Então $2(2kj + k + j) + 1 = 2p \Rightarrow 1 = 2(p - 2kj - k - j)$, o que é uma contradição (par igual a ímpar)
- d) Usando a Contrapositiva: Se $x = 2k$, então $x^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$, que é par. Provada a contrapositiva, a original é verdadeira
Redução ao Absurdo: Suponha que x é par. Então $x^2 = (2k)^2 = 2(2k^2)$ que é par, o que contradiz a hipótese de x^2 ser ímpar
- e) Demonstração Direta: Se $x + y = 2k$, então $x - y = (x + y) - 2y = 2k - 2y = 2(k - y)$, que é divisível por 2
Redução ao Absurdo: Suponha que $x - y$ seja ímpar ($2j + 1$). Somando com $x + y = 2k$, teríamos $2x = 2(k + j) + 1$, o que é uma contradição (par igual a ímpar)
- 5) Redução ao absurdo: Suponha $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ irredutível. Então $3 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 3q^2$. Logo, $p = 3k$
Substituindo: $(3k)^2 = 3q^2 \Rightarrow 3k^2 = q^2$. Logo, q também é múltiplo de 3, contradizendo a irredutibilidade
- 6) a) Contraexemplo: Triângulo de lados $a = 5, b = 4, c = 2$. Temos $5^2 \neq 4^2 + 2^2$
- b) Contraexemplo: $a = 9, b = 16$. Temos $\sqrt{9 + 16} = 5$, mas $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$
- c) Contraexemplo: $a = 0.5$. Temos $0.5^2 = 0.25$, e $0.25 < 0.5$
- d) Contraexemplo: $n = 9$ é ímpar, mas não é primo (é divisível por 3)
- e) Contraexemplo: Triângulo equilátero possui todos os ângulos iguais a 60°

Capítulo 2

1) a) $R(x) = x(1200 - 12x)$



b)

c) $x = 50$

2) a) 3, se $x \neq 2$

b) $x + 4$, se $x \neq 4$

3) a) $f(0) = f(2) = \sqrt{3}$ e $f(0,5) = \frac{\sqrt{15}}{2}$

b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$

c) Note que o valor mínimo de f é 0 e o valor máximo é 2, assim, $\text{Im}(f) = [0, 2]$

d) $x = -1$ e $x = 3$

e) Pelo gráfico podemos notar que f é crescente no intervalo $[-1, 1]$ e decrescente no intervalo $[1, 3]$

f) $(-1, 0)$ e $(3, 0)$ são os pontos de mínimo absolutos e $(1, 2)$ é o ponto de máximo absoluto

4) a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0, x \neq -5\}$

b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$

c) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{3}{2}, x \neq 4\right\}$

d) $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 5\}$

5) a) par

b) ímpar

c) par

d) ímpar

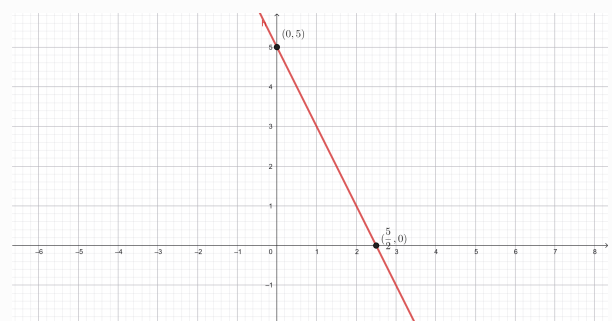
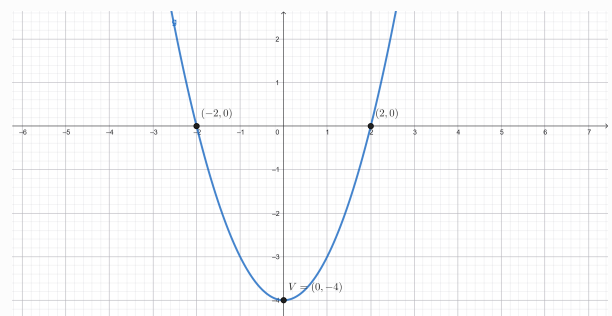
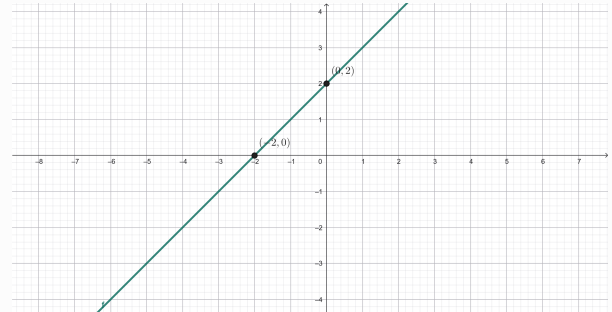
e) nem par, nem ímpar

f) nem par, nem ímpar

6) a) f é nem par, nem ímpar, g é par e h é nem par, nem ímpar

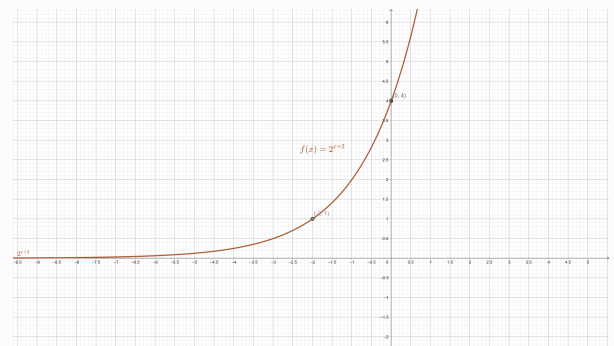
b) f e h são injetoras e g não é injetora

c) f é sempre crescente, g é decrescente no intervalo $(-\infty, 0)$ e crescente no intervalo $(0, \infty)$ e h é sempre decrescente



d) $-\frac{4}{3}$

e) $g(h(2)) = -3$



f)

7) a) $p = 200 - l$

b) $A(l) = 200l - l^2$

c) $A(75) = 9375m^2$ e $A(150) = 7500m^2$

d) $D = (0, 200)$, para chegar nesse domínio você deve impor que $A(l) > 0$

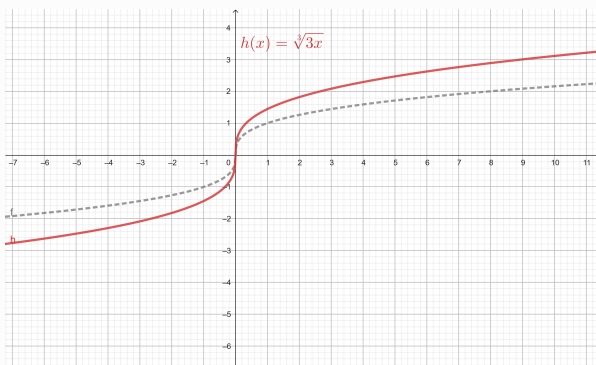
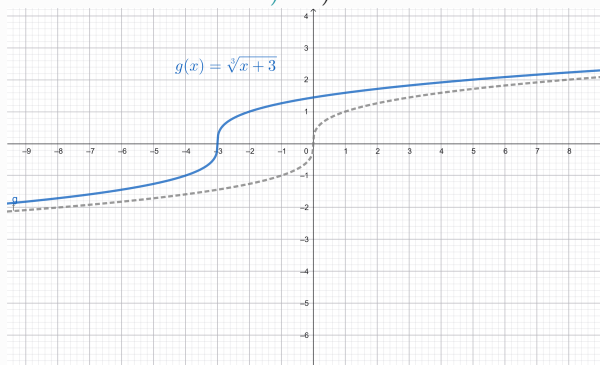


f) É crescente no intervalo $(0,100)$ e decrescente no intervalo $(100,200)$

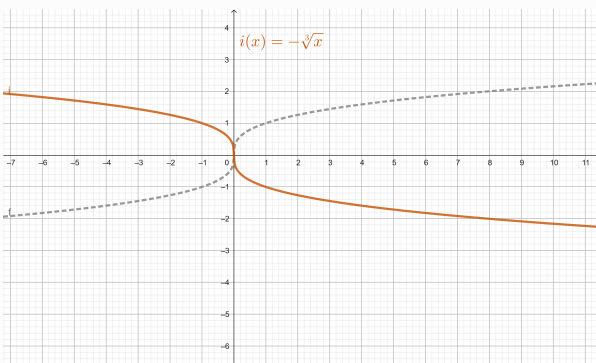
g) Não, pois a equação $200l - l^2 = 12000$ não possui solução real

h) $A_{max} = 10000m^2$ e as dimensões são $l = p = 100$

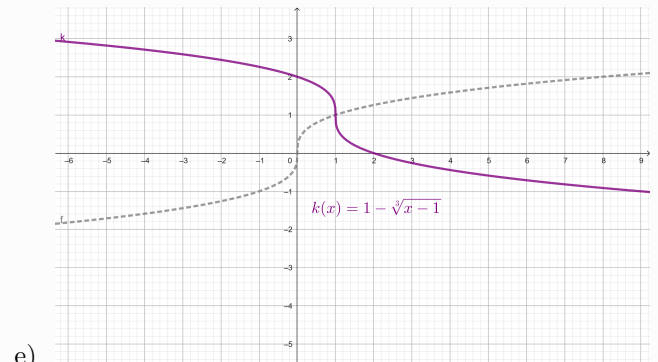
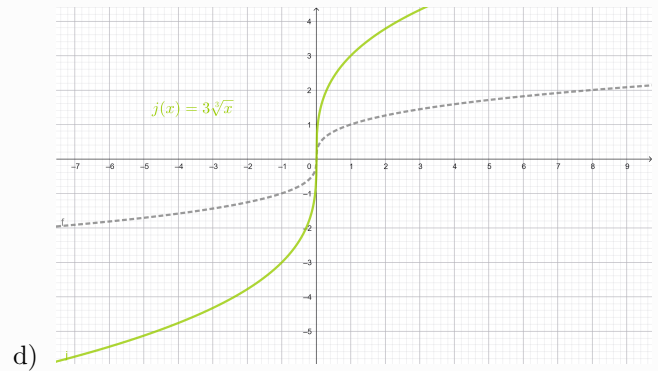
8) a)



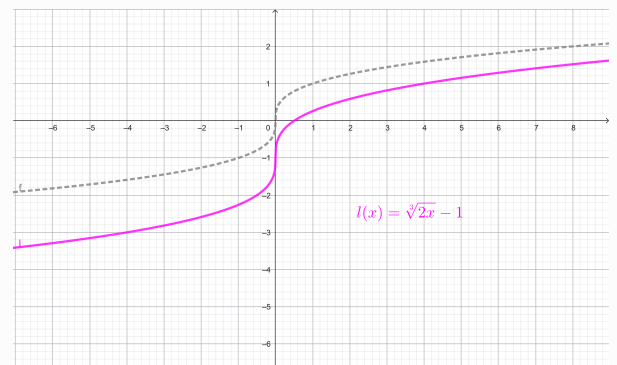
b)



c)



e)



f)

10) a) $f(g(x)) = x^2$, $g(f(x)) = 4x^2$, $f(f(x)) = 16x$ e $g(g(x)) = \frac{x^4}{64}$

b) $f(g(x)) = \sqrt{\frac{x}{3}}$, $g(f(x)) = \frac{\sqrt{x}}{3}$, $f(f(x)) = \sqrt{\sqrt{x}}$ e $g(g(x)) = \frac{x}{9}$

11) a) $f(g(x)) = \frac{1}{x^2-4}$ e $D(f(g)) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq -2, x \neq 2\}$, $g(f(x)) = \frac{1}{(x-4)^2}$ e $D(g(f)) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 4\}$

b) $f(g(-3)) = \frac{1}{5}$ e $g(f(7)) = \frac{1}{9}$

12) a) $c(d(t)) = 1154,7t^4 - 32091t^3 + 270108t^2 - 648900t + 514422$

b) O valor interno $d(t)$ calcula o número de casos para um determinado mês (t). O valor externo $c(d(t))$ calcula o custo total baseado nesse número de casos.

c) $d(4) \approx 783,33$ pessoas. Como o número de pessoas é inteiro devemos calcular o custo para 784 pessoas. Assim $c(784) = \text{R\$ } 482,40$

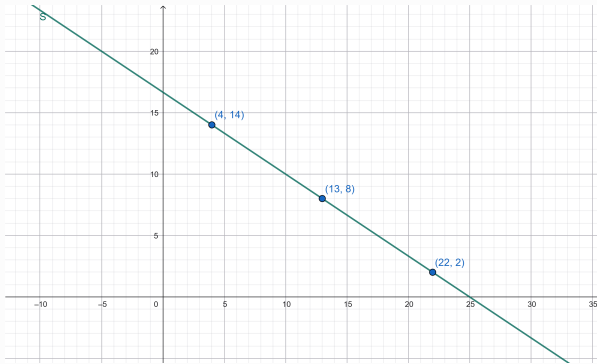
Capítulo 3

1) a) $y = -x + 5$

b) $y = 2x$

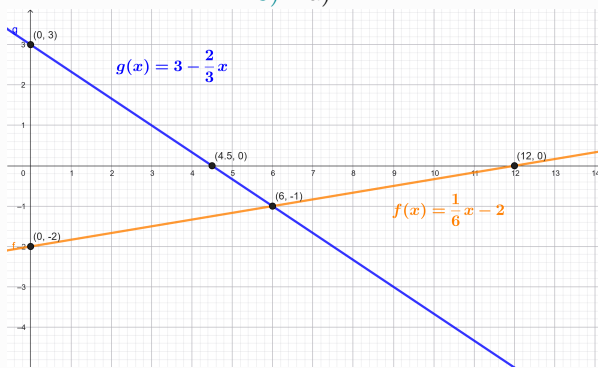
2) a) $S(t) = -\frac{2}{3}t + \frac{50}{3}$

b) 2022



c)

3) a)



b) $x \leq 6$

4) a) $y = 250 - x$

b) $A(x) = 250x - x^2$

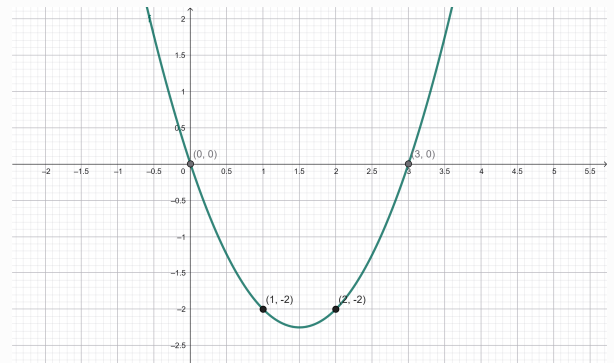
c) $x = y = 125$ m e $A_{\max} = 15\,625$ m²



d)

5) a) $x = 0$ e $x = 3$

b) $x = 1$ e $x = 2$



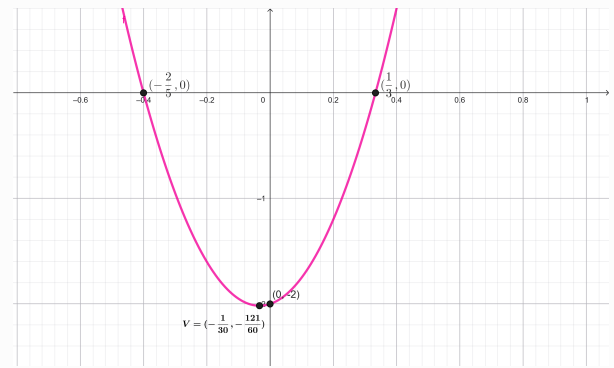
c)

d) $x \leq 1$ ou $x \geq 2$

6) a) $x = -\frac{2}{5}$ e $x = \frac{1}{3}$

b) $[-\frac{1}{15}, 0]$

c) Ponto de mínimo: $(-\frac{1}{30}, -\frac{121}{60})$

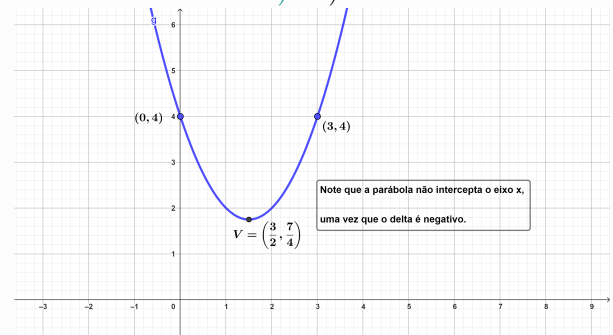


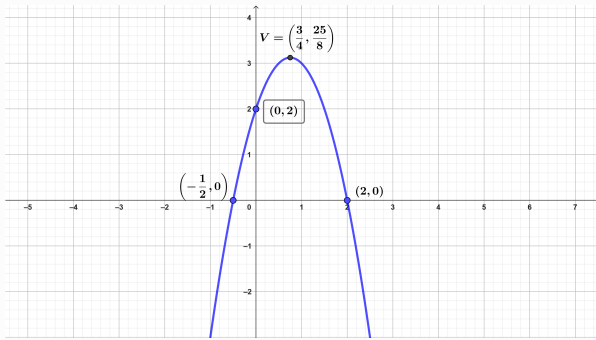
d)

7) Gasto: 3 milhões de reais.

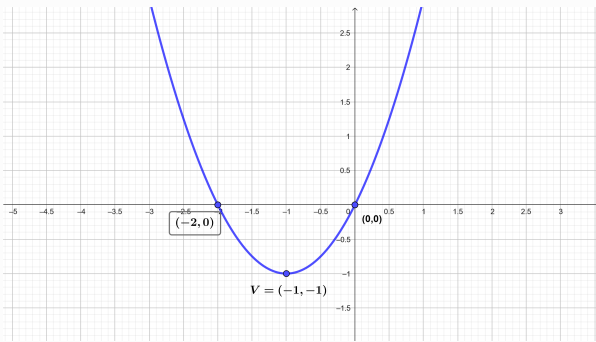
Lucro Máximo: 10,5 milhões de reais.

8) a)

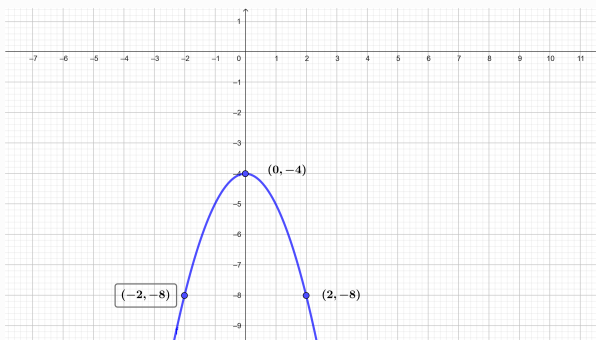




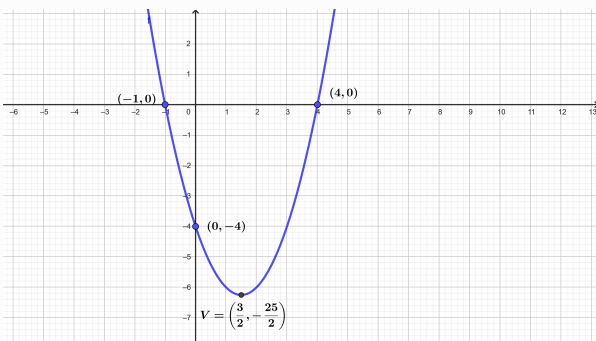
b)



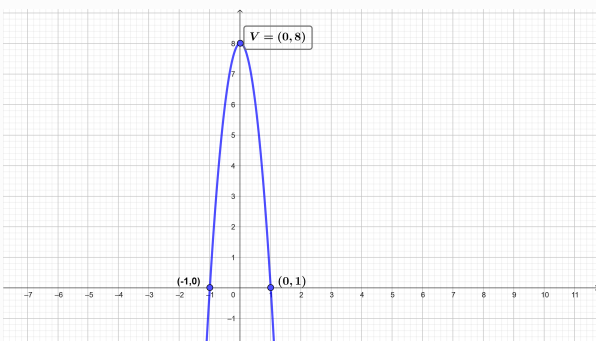
c)



d)



e)



f)

9) $S(r) = 4\pi r^2 + 6\pi r$

10) a) $x^2 - 6x + 9$

b) $x + 4x + 4$

c) $x^4 - 2$

d) $x^3 - x^2 - 5x + 5$

e) $3 - 5\sqrt{3} - \sqrt{6} + 5\sqrt{2}$

f) 1

g) $9x^2 - 12x + 4$

h) $x - 2\sqrt{3}x + 3$

i) $2x^3y - 2x^2y^2 - 5x^2 + 5xy$

j) $x^3 - 12x^2y + 48xy^2 - 64y^3$

11) a) 2, se $x \neq 3$

b) $x(1 - x)$, se $x \neq 0$

c) $\frac{x}{4}$, se $x \neq 3$

d) $\frac{2(x - 5)}{x^2}$, se $x \neq 5$

e) $x^2 + 2x + 4$, se $x \neq 2$

f) $x - y$, se $xy \neq 0$

g) $\frac{x + 3}{x}$, se $x \neq 3$

h) $(x + y)(x^2 + y^2)$, se $x - y \neq 0$

i) $x - 1$, se $x \neq 4$

j) $\sqrt{x} - 3$

12) a) Raízes: $x = \pm 1$, $x = \pm \frac{1}{3}$. Fatoração:

$$p(x) = 9(x + 1)(x - 1)(x - \frac{1}{3})(x + \frac{1}{3})$$

b) Raízes: $x = -4, 3, 5$. Fatoração:

$$q(x) = (x + 4)(x - 3)(x - 5)$$

c) Raízes: $x = -3, \frac{1}{2}, 4$. Fatoração:

$$p(x) = 2(x + 3)(x - \frac{1}{2})(x - 4)$$

d) Raízes: $x = 0, 1, 2$. Fatoração:

$$p(x) = x(x - 1)^2(x - 2)$$

13) a) $Q(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + 2$, $R(x) = 10$

b) $Q(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + \frac{2}{3}$, $R(x) = \frac{4}{3}$

c) $Q(x) = 3$, $R(x) = 22x + 6$

14) a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{5}{3}\}$

b) $S = [-2, 3]$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 3\}$

d) $S = \mathbb{R}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 2\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -8 \text{ ou } -4 < x < -3\}$

Capítulo 4

1) a) 11

b) $4 - \sqrt{8}$

c) $|5x + 1| = \begin{cases} 5x + 1, & \text{se } x \geq -\frac{1}{5} \\ -5x - 1, & \text{se } x \leq -\frac{1}{5} \end{cases}$

d) $|x^2 - 9| = \begin{cases} x^2 - 9, & \text{se } x \leq -3 \text{ ou } x \geq 3 \\ -(x^2 - 9), & \text{se } -3 < x < 3 \end{cases}$

e) $5 - |x| = \begin{cases} 5 - x & \text{se } x \geq 0 \\ 5 + x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

2) a) $S = \{1, \frac{3}{2}\}$

b) $S = \{x = -\frac{8}{7}, x = 22\}$

c) $S = \{-1, \frac{5}{3}\}$

d) $x = \pm \frac{3}{2}$

e) $S = \{-3, \pm\sqrt{7}\}$

f) $S = \{\pm 1, \pm 7\}$

3) a) $\frac{6}{5} \leq x \leq 2$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -2 \text{ ou } x \geq 5\}$

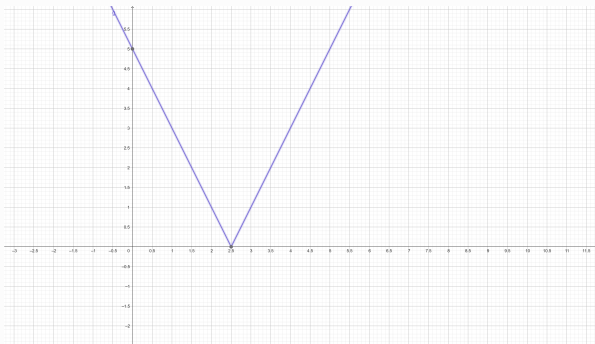
c) $S = \{x \in \mathbb{R} | -4 \leq x \leq -2 \text{ ou } x = 3\}$

d) $x \leq -1$

4) a) $x = \frac{5}{2}$

b) Nem par, nem ímpar

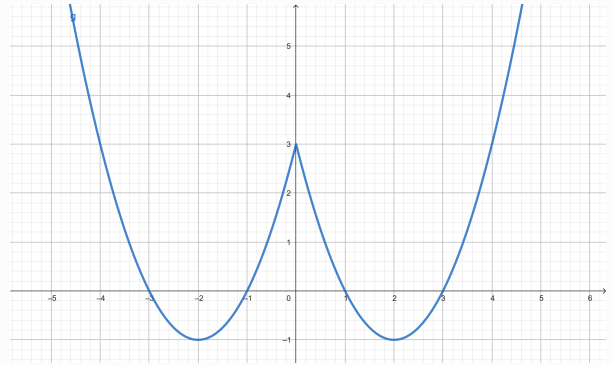
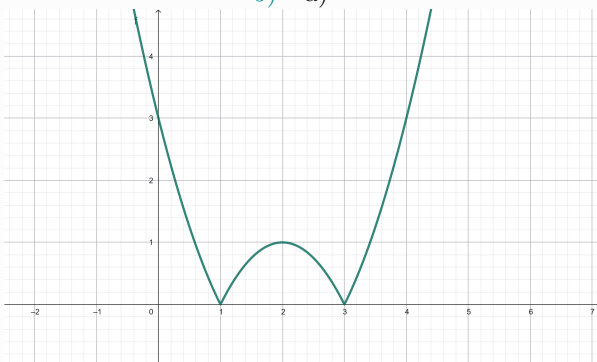
c) Não é injetora, pois, por exemplo, $f(2) = f(3) = 1$



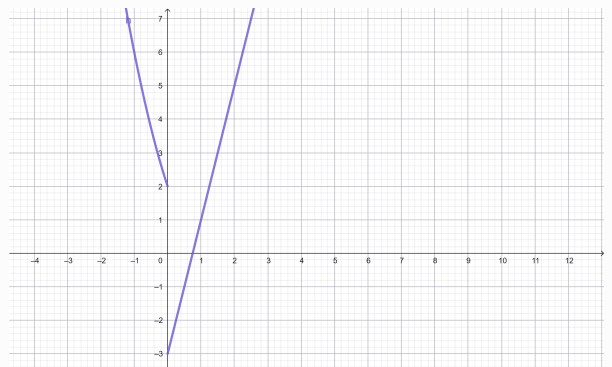
d)

e) O valor mínimo é 0 e não possui valor máximo

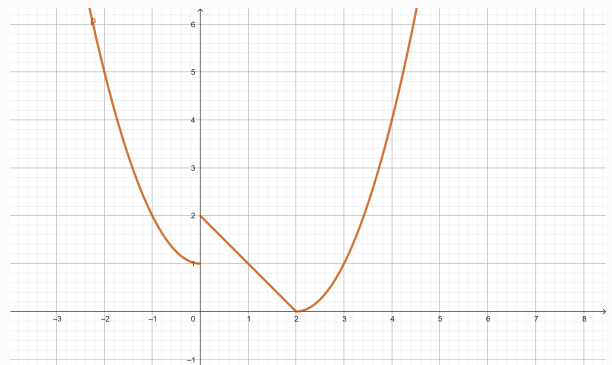
5) a)



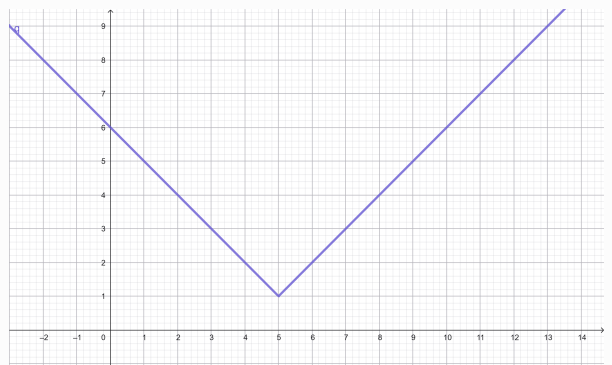
b)



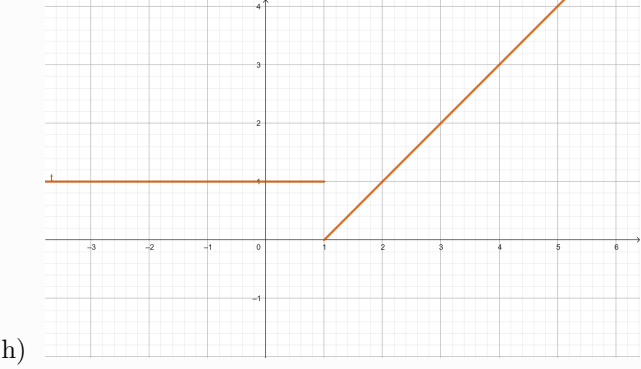
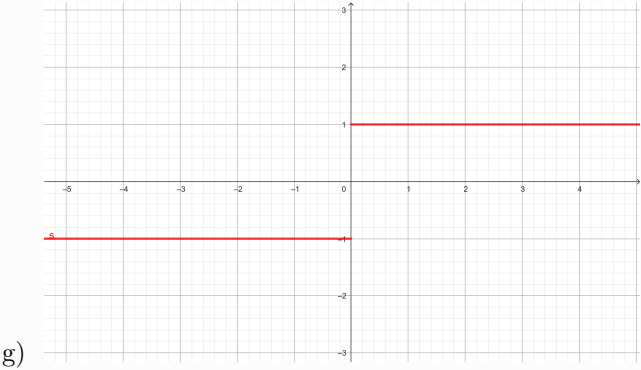
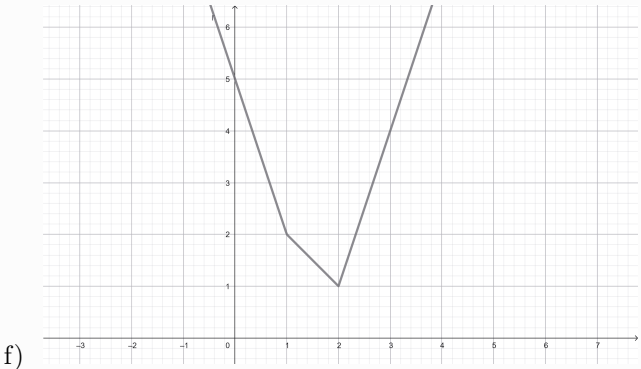
c)



d)



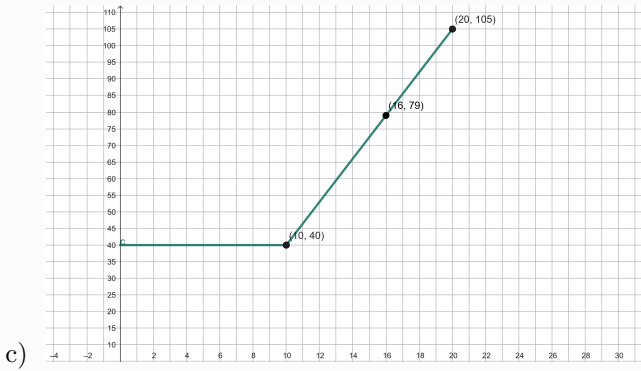
e)



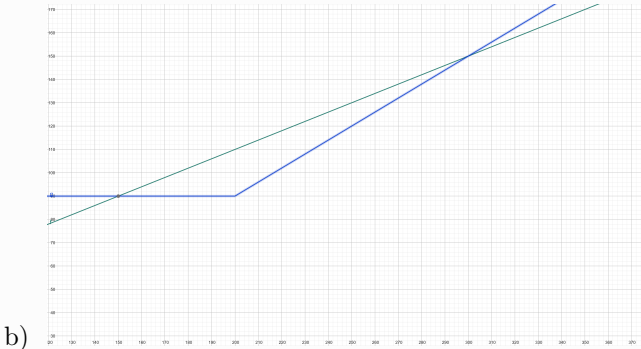
6) 6

7) a) $c(v) = \begin{cases} 40, & \text{se } v \leq 10 \\ 40 + 6,5(v - 10), & \text{se } v \geq 10 \end{cases}$

b) 79

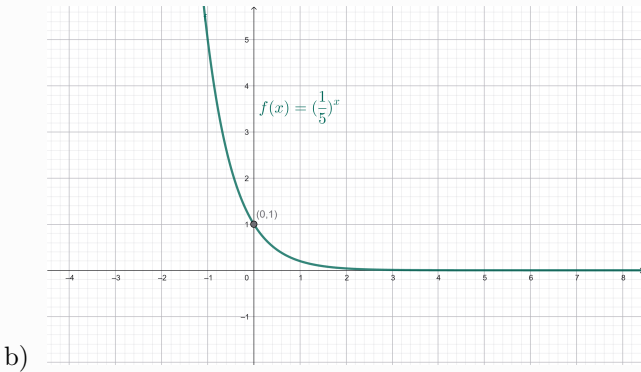
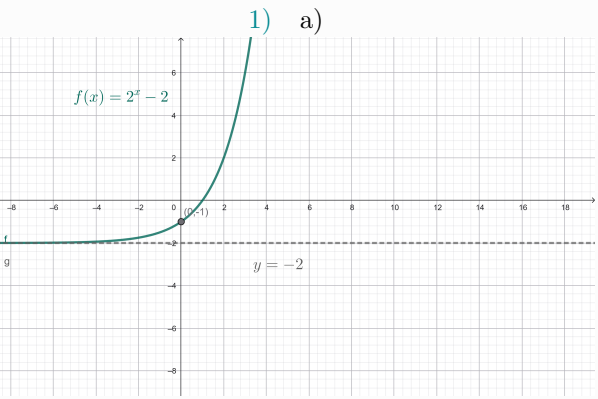


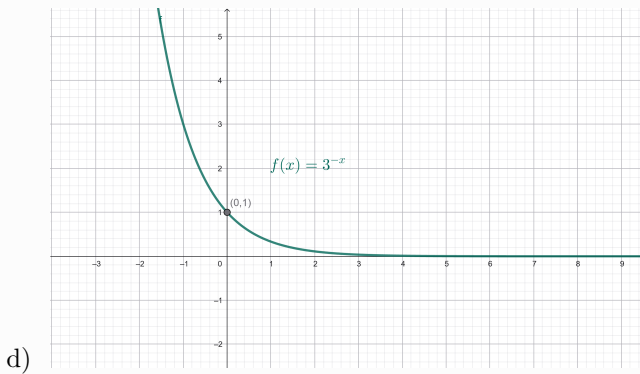
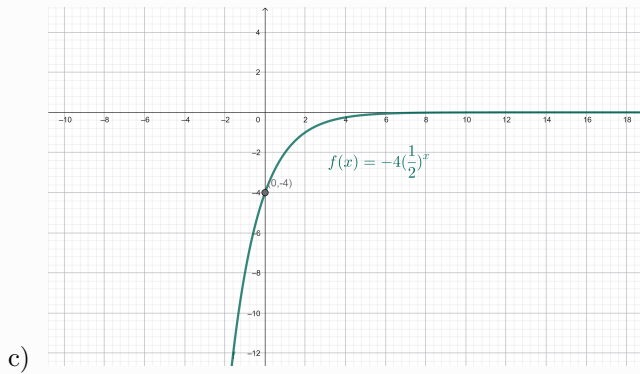
8) a) Saturno: $f(x) = 30 + 0,4x$, Mercúrio:
 $g(x) = \begin{cases} 90, & \text{se } x \leq 200 \\ 90 + 0,6(x - 200), & \text{se } x > 200 \end{cases}$



c) Saturno: $[0, 150] \cup [300, \infty)$, Mercúrio: $[150, 300]$

Capítulo 5





2) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -4\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$

3) a) $S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

b) $S = \{5\}$

c) $S = \left\{-\frac{1}{3}, 2\right\}$

d) $S = \{-1, 4\}$

e) $S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

f) $S = \{-2, 3\}$

g) $S = \{3\}$

h) $S = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

i) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

j) $S = \{14\}$

4) a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{5}{2}\right\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 5\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{5}{2}\right\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 0\}$

5) 13

6) $\frac{1}{3}$

7) 2^a

Capítulo 6

1) $A = 0$

2) a) -0,39

b) 2,015

c) 1,76

3) a) $x = -\frac{1}{3}$

b) $x = 6$

c) $x = 3$

d) $x = 3$

e) $x = 64$ ou $x = \frac{1}{4}$

4) a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 3\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 1 + \sqrt{5}\right\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} < x \leq 2\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} < x \leq \frac{17}{2}\right\}$

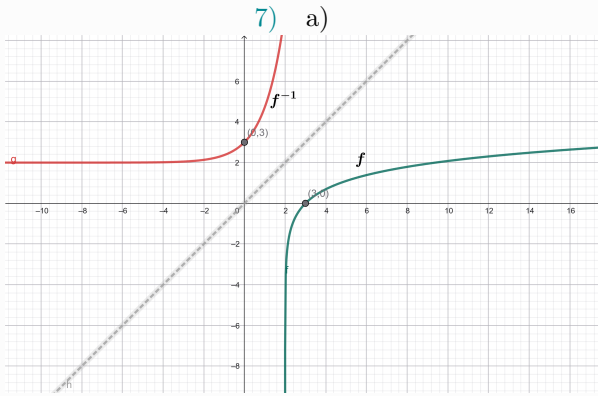
5) a) $f \circ g(x) = \log_2 \sqrt[3]{\frac{-x^2 + 9}{x + 2}}$

b)

$f \circ g(-1) = \log_2 \sqrt[3]{\frac{8}{(-1) + 2}} = \log_2 \sqrt[3]{\frac{8}{1}} = \log_2 2 = 1$

c) O domínio de $f \circ g(x)$ é $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, 3)$

6) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -1 \text{ ou } x > 3\}$



b) f é apenas crescente, logo é invertível.

c) A inversa de f é $f^{-1}(x) = e^x + 2$, com domínio $(-\infty, \infty)$

d)

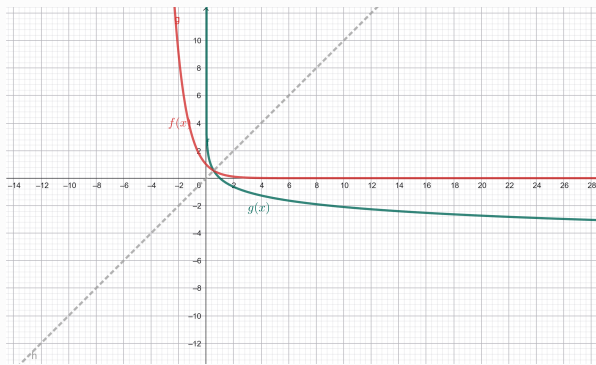
8) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$

9) a) Domínio: $(-2, 2)$. Imagem: $(-\infty, \log_2 4)$

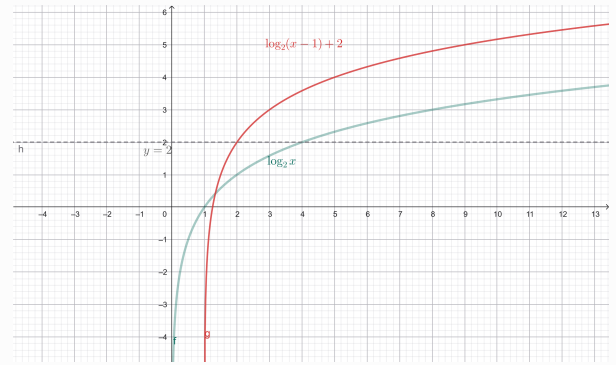
b) Sim, a equação $f(x) = 1$ possui solução. As soluções são $x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$

c) Não, f não é injetora, pois para todo x em $(-2, 2)$ temos $f(x) = f(-x)$

d) A função f é par. $\log_2(4 - x^2) = \log_2(4 - (-x)^2)$, portanto $f(x) = f(-x)$



10)



11)

12) Opção b)

13) Opção b)

14) Opção c)

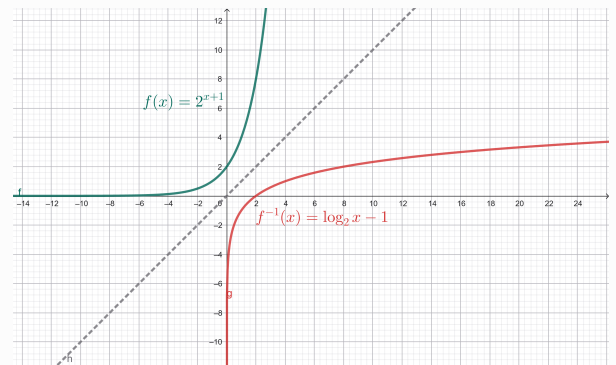
15) Opção a)

16) $x = \frac{1}{2}$

17) Opção e)

18) Opção a)

19) $a = 64$; $b = -0,805$; $c(6) \approx 2018,17$, como o número e computadores infectados é inteiro, o número de computadores infectados após 6 horas é 2019



20)

Capítulo 7

1) $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{1}{3}$

2) Sim, pois $\cos(\theta) = \frac{2}{3}$ e $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$. Como $\cos(\theta) > \cos(\frac{\pi}{3})$, então $\theta < \frac{\pi}{3}$, garantindo uma boa visão

3) a) $\frac{5\pi}{6}$, $\sin(\frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $\cos(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sec(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{cosec}(\frac{5\pi}{6}) = 2$,

$\operatorname{cotg}(\frac{5\pi}{6}) = -\sqrt{3}$

b) $\frac{7\pi}{4}$, $\sin(\frac{7\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\frac{7\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}(\frac{7\pi}{4}) = -1$, $\sec(\frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2}$, $\operatorname{cosec}(\frac{7\pi}{4}) = -\sqrt{2}$, $\operatorname{cotg}(\frac{7\pi}{4}) = -1$

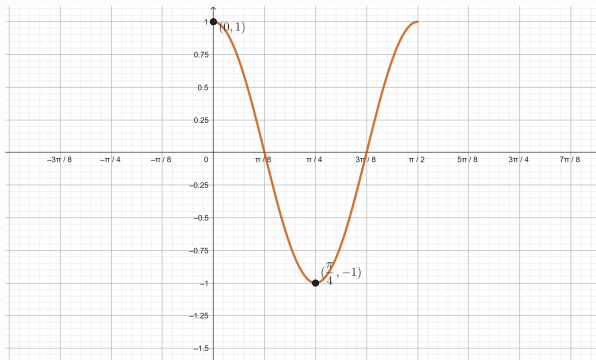
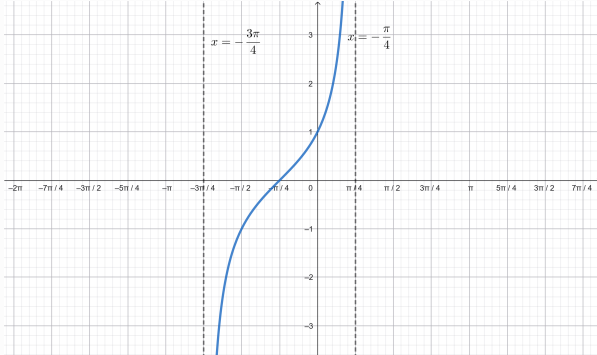
c) $\frac{7\pi}{6}$, $\sin(\frac{7\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$, $\cos(\frac{7\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}(\frac{7\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sec(\frac{7\pi}{6}) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{cosec}(\frac{7\pi}{6}) = -2$, $\operatorname{cotg}(\frac{7\pi}{6}) = \sqrt{3}$

4) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\operatorname{tg}(x) = \frac{3\sqrt{7}}{7}$ e $\sec(x) = -\frac{5\sqrt{7}}{7}$

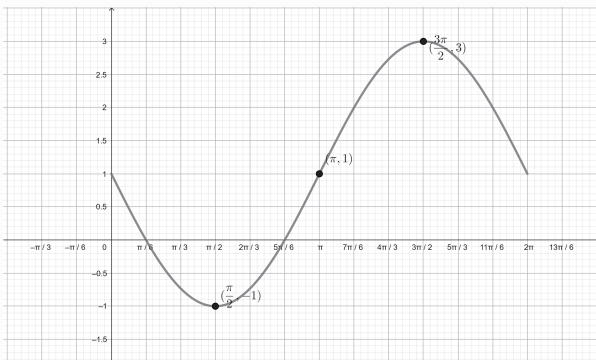
5) $\cos(\theta) = -\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg}(\theta) = -\frac{\sqrt{15}}{15}$ e $\sec(\theta) = -\frac{4\sqrt{15}}{15}$

6) $\pm\frac{4}{5}$. Primeiro ou quarto quadrante

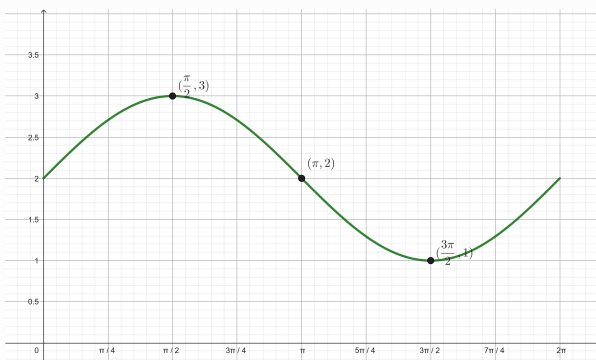
7) a)



b)



c)



d)

8) a) $-\cos(x)$

b) $4\cos(x)$

c) $\operatorname{cosec}^2(x)$

9) a) $-\operatorname{cosec}(45^\circ) = -\sqrt{2}$

b) $-\cotg(30^\circ) = -\sqrt{3}$

c) $-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - (-\cotg\left(\frac{\pi}{4}\right)) = -1 - (-1) = 0$

d) $-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

e) $-\sin(90^\circ) = -1$

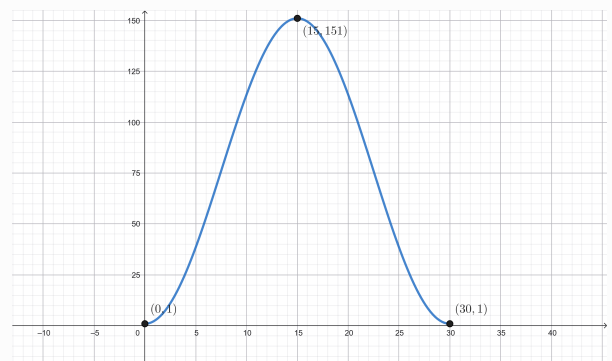
f) $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin(0) = \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $-\operatorname{tg}(45^\circ) - \cos(30^\circ) = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-2-\sqrt{3}}{2}$

10) Maior: 10. Menor: 0

11) a) Altura máxima 151m e altura mínima 1m

b) 30min



c)

12) $\sin(75^\circ) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\cos(75^\circ) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ e $\operatorname{tg}(75^\circ) = 2 + \sqrt{3}$

13) a) $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$

b) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = (1 - \sin^2(x)) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$

c) $\operatorname{tg}(2x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\cos^2(x) - \sin^2(x)} = \frac{2\operatorname{tg}(x)}{1 - \operatorname{tg}^2(x)}$

d) $\sin(x - y) = -\frac{2\sqrt{5}}{25}$, $\cos(x - y) = \frac{11\sqrt{5}}{25}$ e $\operatorname{tg}(x - y) = -\frac{2}{11}$

e) $\sin(15^\circ) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ e $\sin(7,5^\circ) = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}{4}$

f) $\cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - \sin(x) = -\sin(x)$

g) $\ln(\sec\theta \cdot \cos\theta) = \ln(1) = 0$

h) $\frac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{3(x^2+1)}}$

14) $\sin(y) = \frac{7\sqrt{2}}{26}$ e $\cos(y) = \frac{17\sqrt{2}}{26}$

15) $-\operatorname{tg}(x)$

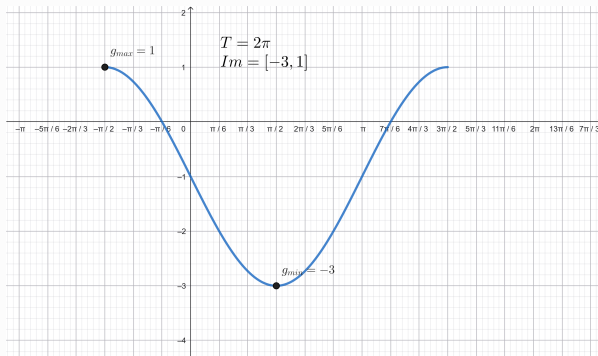
16) $\sin(2x) = 2mn$, $\cos(2x) = n^2 - m^2$ e $\operatorname{tg}(2x) = \frac{2mn}{n^2 - m^2}$

17) $\sin(105^\circ) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sec(105^\circ) = -\sqrt{2} - \sqrt{6}$
 $\cos(15^\circ) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{tg}(15^\circ) = 2 - \sqrt{3}$

18)

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)}, \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)} \text{ e}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = 3 + 2\sqrt{2}$$



19)

20) a) $x = \frac{7\pi}{6}$ ou $x = \frac{11\pi}{6}$

b) $\frac{\pi}{2}$

c) $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ ou $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, onde $n \in \mathbb{Z}$

d) $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$, $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

e) $x = 0$, $x = 2\pi$, $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$

f) $x = \pm \frac{\pi}{6}$

21) a) $\frac{\pi}{3}$

b) $\frac{\sqrt{55}}{5}$

c) $-\frac{\pi}{3}$

d) 5

22) $-\frac{5\pi}{12}$

23) a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} | 2 \leq x \leq 4\}$

b) $D_g = \{x \in \mathbb{R} | -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$

24) Seja $\theta = \arcsen(x) \Rightarrow \sin(\theta) = x$. Pela relação $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, temos

$$x^2 + \cos^2 \theta = 1 \implies \cos \theta = \sqrt{1 - x^2}. \text{ Logo,}$$

$$\cos(\arcsen(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

Índice Remissivo

- Cateto
 - adjacente, 125
 - oposto, 125
- Coeficiente
 - angular, 37
 - linear, 37
- Conjunto
 - Imagem, 13
- Contradomínio, 13
- Contraexemplo, 21
- Domínio, 13
 - natural, 13
- Eixo
 - dos cossenos, 131
 - dos senos, 131
- Equação
 - exponencial, 94
- Fatoração, 58
- Função, 13
 - afim, 36
 - bijetora, 101
 - composta, 31
 - constante, 20
 - crescente, 19
 - decrecente, 19
 - exponencial, 89
 - exponencial natural, 94
 - injetora, 102
 - inversa, 102
 - linear, 38
 - logaritmica, 105
 - modulas, 73
 - par, 17
 - por partes, 71
 - potência, 22
 - quadrática, 44
 - segundo grau, 44
 - sobrejetora, 102
 - valor absolutos, 73
 - ímpar, 17
- Graus, 124
- Gráfico, 14
- Hipotenusa, 125
- Imagem, 13
- Logaritmo
 - natural, 115
 - neperiano, 115
- Módulo, 72
- Número de Euler, 115
- Potência, 83
- Produtos notáveis, 55
- Radianos, 124
- Relação fundamental
 - trigonométrica, 133
- valor absoluto, 72
- Zeros, 18
- Ângulo, 123

Matemática Básica

Camila F. de Souza

Jeanne C. Amaral

Jônathas D. S. Oliveira

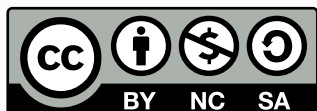
Luis A. D'Afonseca

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – [CEFET-MG](#)

2 de março de 2026

Esta apostila é ...

Arte da capa: [Imagem](#) de [Javier Miranda](#) baixada de [Unsplash](#)



Esta obra tem a licença [Creative Commons](#) “[Atribuição-NãoComercial-CompartilhaIgual 4.0 Internacional](#)”.