Matemática I

Luis A. D'Afonseca

Matemática I

Luis A. D'Afonseca

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET-MG

11 de março de 2023

Essa apostila foi escrita para apresentar de forma integrada o conteúdo da disciplina de Matemática I do CEFET-MG.

A versão mais recente desta apostila pode ser baixada clicando ou escaneando o código QR.

Arte da capa: Fotografia de Fauxels baixada de Pexels

Sumário

Prefácio

Esta apostila está em construção e provavelmente está incompleta e contém erros.

A disciplina de Matemática 1 é composta de conteúdos comuns em disciplinas de Cálculo e Geometria Analítica, com uma enfase desejável em aplicações em Administração e Economia.

1

Revisão

1.1 Preliminares

A seguir estão alguns termos usados com frequência em textos matemáticos e um esclarecimento informal do seu significado.

Teorema Uma afirmação matematicamente verdadeira

Lema Assim como o teorema, é uma afirmação matematicamente verdadeira. Geralmente recebe esse nome por fazer parte da demonstração de um teorema.

Cololário Também é uma afirmação matematicamente verdadeira. Recebe esse nome pois sua demonstração é "fácil" depois que um teorema foi demonstrado.

Axiomas São verdades não questionadas dentro de uma teoria Matemática, são consideradas "evidentemente" verdadeiras.

A seguir listamos alguns símbolos comummente usados em textos matemáticos, também com uma esclarecimento informal dos significados.

$=$	Igual a	$2+2=4$	
$\Rightarrow$	Implica em	$x>3 \Rightarrow x>2$	Não usar no lugar do igual!
$\to$	Tende para	$x \to \infty$	Usado no contexto de limites
$\forall$	Para todo	$x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$	
$\exists$	Existe	$\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 > 4$	
$\nexists$	Não existe	$\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 < 0$	
∞	Infinito	Infinto não é um número, portanto, não podemos fazer contas com ele	

Os símbolos tem significados muito específicos, não troque um por outro sem ter certeza que de os significados são equivalentes. Por exemplo, sob hipótese nenhuma, troque o símbolo $=$ por $\to$ ou $\Rightarrow$.

1.2 Conjuntos Numéricos e Desigualdades

Os conjuntos numéricos mais comuns, usados em Matemática, são

Naturais $\mathbb{N}$ Números que usamos para contar

$$1, 2, 3, \ldots$$

Inteiros $\mathbb{Z}$ Todos os números inteiros

$$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

Racionais $\mathbb{Q}$ Frações, ou razões, entre números inteiros

$$\frac{1}{3}, \frac{7}{9}$$

Reais $\mathbb{R}$ Todas as distâncias possíveis e seus negativos

$$\sqrt{2}, \pi, e$$

Note que cada um desses conjuntos tem infinitos elementos e está contido dentro do próximo

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Um número real que não é um número racional é chamado de Irracional.

Os números irracionais não possuem representação decimal finita

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1{,}41421356237309514547462185873882845044136047363281\ldots \\ e &= 2{,}71828182845904509079559829842764884233474731445312\ldots \\ \pi &= 3{,}14159265358979311599796346854418516159057617187500\ldots \end{aligned}$$

Nessa disciplina basta conhecer esses números com uma casa decimal, isso é,

$$\sqrt{2} = 1{,}4 \qquad e = 2{,}7 \qquad \pi = 3{,}1$$

Operações com Conjuntos

Se A e B são conjuntos, podemos definir as operações

Interseção Conjunto formado pelos elementos que pertencem, ao mesmo tempo, a A e a B

$$A \cap B$$

União Conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B

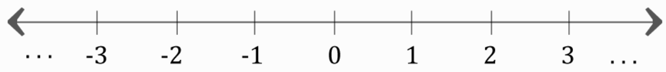
$$A \cup B$$

Complemento Conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B

$$A \setminus B$$

Reta Real

Podemos pensar nos números reais, $\mathbb{R}$ como sendo todas as distâncias possíveis e seus negativos. Representamos esses números em uma reta, que chamamos de Reta Real.



Intervalos

Em geral vamos trabalhar com subconjuntos dos números reais, podemos indicar esses subconjuntos com a notação de conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 2 < x < 4\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x < 0 \text{ ou } x > 5\}$$
$$C = \{1, 2, e, 3, \pi, 4\}$$

Porém, muitos desses subconjuntos são pedaços contínuos da reta real como o conjunto A descrito acima. Esse tipo de subconjunto dos reais é chamado de Intervalo.

Os intervalos podem ser abertos ou fechados dependendo se os seus pontos extremos pertencem ou não aos intervalos.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}$$
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\}$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x < b\}$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leq b\}$$

Cada um desses intervalos pode ser representado graficamente marcando um segmento da reta real e indicando se as extremidades pertencem ou não ao intervalo.

$[a, b]$ Intervalo Fechado 

(a, b) Intervalo Aberto 

$[a, b)$ Intervalo Semi-aberto 

$(a, b]$ Intervalo Semi-aberto 

Os intervalos podem ser infinitos, mas, note que, os intervalos sempre são abertos no infinito.

$$[a, \infty) \qquad (-\infty, b] \qquad (-\infty, \infty)$$

Desigualdades

Uma desigualdade são condições que envolvem relações de maior que, $>$, ou menor que, $<$. Muitas vezes suas soluções são expressas em termos de intervalos ou uniões de intervalos.

Propriedades das Desigualdades

1. Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$
2. Se $a < b$, então $a + c < b + c$
3. Se $a < b$ e $c > 0$, então $ac < bc$
4. Se $a < b$ e $c < 0$, então $ac > bc$

Propriedades análogas são válidas se a relação $<$ entre a e b for trocada por $\leq$, $>$ ou $\geqslant$.

Valor Absoluto ou Módulo

O valor absoluto ou módulo de um número é definido por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Propriedades do Valor Absoluto

1. $|-x| = |x|$
2. $|xy| = |x|\,|y|$
3. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \qquad y \neq 0$
4. $|x+y| \leq |x| + |y|$

Se $a > 0$

1. $|x| = a$ significa o mesmo que $x = a$ ou $x = -a$
2. $|x| < a$ significa o mesmo que $-a < x < a$
3. $|x| > a$ significa o mesmo que $x > a$ ou $x < -a$

Exercícios Seção 1.2

1) [resp] Determine se as afirmações são verdadeiras ou falsas.

a) $-3 < -20$

b) $\dfrac{2}{3} > \dfrac{5}{6}$

c) $-\dfrac{5}{6} < -\dfrac{11}{12}$

2) Represente os intervalos dados na reta real.

a) $(3,6)$

b) $[-1,4)$

c) $\left[-\dfrac{6}{5}, -\dfrac{1}{2}\right]$

d) $(-\infty, 5]$

3) Encontre os valores de x que satisfazem as desigualdades.

a) $2x + 4 < 8$

b) $-6 > 4 + 5x$

c) $-4x \geq 20$

d) $-6 < x - 2 < 4$

e) $0 \leq x + 1 \leq 4$

f) $x + 1 > 4$ ou $x + 2 < -1$

g) $x - 4 \leq 1$ e $x + 3 > 2$

4) Descreva os intervalos abaixo usando desigualdades e desenhe-os na reta real.

a) $(-2{,}0)$

b) $[1{,}6)$

c) $(-3{,}\infty)$

d) $(-\infty; 12{,}5]$

e) $[-4{,}5]$

f) $(-5, -2]$

5) Escreva os conjuntos abaixo na forma de intervalos e desenhe-os na reta real.

a) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq 0{,}17\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq 4\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ -3 < x < -1\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ -1 \leq x \leq 0\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ 1/100 \leq x < 100\}$

f) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq -2 \text{ ou } x > 5\}$

g) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x > -4\}$

h) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x < 3\}$

6) Considerando os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq 1\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x < 2\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \ / \ -2 < x \leq 4\}$$

determine

a) $A \cup C$

b) $B \cup C$

c) $A \cup B$

d) $A \cap C$

e) $B \cap C$

f) $A \cap B$

7) Reescreva os intervalos abaixo na forma mais simples e compacta possível.

a) $[-4{,}5] \cup [-2{,}1]$

b) $[-2{,}3] \cup [3{,}4]$

c) $(0{,}2) \cup [2{,}8]$

d) $(-1{,}4) \cup (4{,}6)$

e) $[-4{,}1) \cup (-2{,}2]$

f) $[-4, -52) \cup (-3, -2)$

g) $(-\infty{,}6) \cup (4{,}7)$

h) $(-\infty{,}5) \cup (-1{,}\infty)$

8) Escreva os conjuntos abaixo usando desigualdades e represente-os na reta real.

a) $(-3{,}1) \cup (-1{,}2)$

b) $[-2{,}2) \cap (1/2{,}4]$

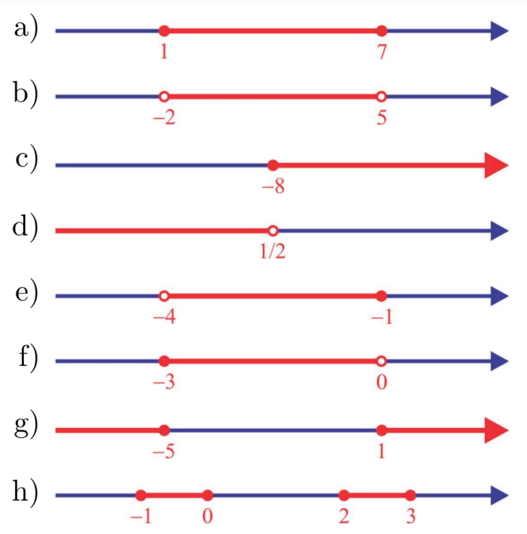
c) $[1{,}4) \cup (1{,}6]$

d) $(-\infty, 2] \cap (-2{,}0]$

e) $(-\infty, -2] \cup [3{,}\infty)$

f) $(-\infty, 8) \cap (8{,}\infty)$

9) Descreva os conjuntos abaixo usando a notação de intervalo.



10) Considerando os conjuntos

$$A = (-\infty, -3] \quad B = (-1{,}7) \quad C = [-5, 6]$$

determine

a) $A \cup C$

b) $B \cup C$

c) $A \cap C$

d) $B \cap C$

e) $A \cup B \cup C$

f) $A \cap B \cap C$

g) $(A \cup B) \cap C$

h) $A \cup (B \cap C)$

i) $(A \cap B) \cup C$

11) [resp] Resolva as inequações.

a) $2x > 3$

b) $8x \geq -5$

c) $x - 4 \leq 5$

d) $\dfrac{a}{2} < 7$

e) $3z - \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{4}$

f) $x + 1 \geq -1$

g) $-x \leq 6$

h) $3 \geq -9x$

i) $-\dfrac{w}{4} > 8$

j) $3 - 2y < 7$

12) [resp] Resolva as inequações.

a) $1 - 2(x-1) < 2$

b) $2 - 3x \geq x + 14$

c) $5v - 32 \leq 4 - 7v$

d) $2 - z > 3(z+3)$

e) $2(3x+1) < 4(5-2x)$

f) $8(x+3) > 12(1-x)$

g) $\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2}x \geq \dfrac{1}{6} + x$

h) $3(3x-2) + 2\left(x + \dfrac{1}{2}\right) \leq 19 - x$

i) $\dfrac{3x}{2} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{6} > 0$

j) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{x}{2} < \dfrac{5}{6} - \dfrac{2x}{3}$

k) $\dfrac{3x+1}{4} - 1 \geq \dfrac{1}{2} - 2x$

l) $\dfrac{1-2x}{3} + \dfrac{x-2}{6} > \dfrac{x+3}{2} - 1$

m) $\dfrac{2}{5}x + 1 \leq \dfrac{1}{5} - 2x$

n) $\dfrac{x+2}{3} + \dfrac{2-3x}{2} < \dfrac{4x}{3}$

o) $\dfrac{x}{3} - \dfrac{x+1}{2} < \dfrac{1-x}{4}$

p) $3(1-2x) < 2(x+1) + x - 7$

q) $\dfrac{x+10}{5} > -x + 6$

r) $\dfrac{3x-1}{4} + \dfrac{1-4x}{2} < 1$

s) $\dfrac{2x}{5}+1 \leq 2\left(x+\dfrac{3}{5}\right)$

t) $\dfrac{1-2x}{3}-\dfrac{1+3x}{2} \geq 2$

13) [resp] Resolva as inequações e represente suas soluções na reta real.

a) $1 < 2x < 3$

b) $-3 \leq 4x \leq 8$

c) $-1 \leq x+2 \leq 5$

d) $0 \leq 2x-2 \leq 6$

e) $-6 \leq -2(x-1) \leq 0$

f) $2 \leq \dfrac{x}{3} < 4$

g) $-3 < \dfrac{3x}{2} \leq 6$

h) $-\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{3x-4}{7} \leq \dfrac{1}{2}$

i) $\dfrac{1}{6} < \dfrac{2x-13}{12} < \dfrac{2}{3}$

j) $-6 \leq 15-3(4x+7) \leq 18$

k) $-4 \leq \dfrac{5x-4}{6} \leq 1$

l) $-1 \leq \dfrac{4s-3}{5} \leq \dfrac{3}{15}$

m) $-9 \leq \dfrac{5-8x}{3} \leq 1$

n) $-\dfrac{5}{4} \leq \dfrac{2x-3}{2} \leq \dfrac{7}{2}$

o) $-\dfrac{3}{2} \leq \dfrac{2x-5}{3} \leq \dfrac{1}{6}$

14) [resp] Resolva as desigualdades e represente a solução na reta real.

a) $(x-2)\,(x-4) \geq 0$

b) $(x+1)\,(x-3) \leq 0$

c) $x\,(2x-1) \geq 0$

d) $2x\left(x-\dfrac{1}{4}\right) \leq 0$

e) $-3\,(x+2)\,(x-3) < 0$

f) $(x+3)\,(3-5x) \geq 0$

g) $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(2x+5) \leq 0$

h) $(x-6)^2 > 0$

15) [resp] Resolva as desigualdades e represente a solução na reta real.

a) $x^2-3x \geq 0$

b) $3x^2 \leq 5x$

c) $x^2-8 \leq 0$

d) $x^2+6x \leq 0$

e) $3x^2-\sqrt{5}\,x \geq 0$

f) $x^2+2x > 3$

g) $49x^2 \leq 9$

h) $-x^2+5 \leq 0$

i) $-2x^2+x \geq -6$

j) $x^2+4x+7 \leq 0$

k) $x^2+2x+1 \leq 0$

l) $2x^2 \geq 20-6x$

m) $x^2+9x+18 \leq 0$

n) $x^2-6x+9 \geq 0$

o) $-3x^2+16x \leq 5$

p) $16x^2+25 \leq 0$

q) $-4x^2+12x-9 \leq 0$

r) $3x^2 \leq 2x+5$

s) $-2x^2+8x+24 \leq 0$

t) $-x^2+20x-36 \geq 0$

u) $2x^2-5x \geq 3$

v) $(x-6)^2 \geq 4$

16) [resp] Resolva as desigualdades e represente a solução na reta real.

a) $1 \leq x^2+2x-2 \leq 6$

b) $-4 \leq 3x^2-10 \leq 2$

c) $-3 \leq x^2-4x \leq 5$

d) $-2 \leq 2x^2+3x+4 \leq 3$

e) $4 \leq (x-6)^2 \leq 9$

f) $0 \leq x^2-x \leq 20$

17) [resp] Resolva as inequações e represente a solução na reta real.

a) $\dfrac{x-2}{x+3} \leq 0$

b) $\dfrac{x+4}{x-2} \geq 0$

c) $\dfrac{2x-3}{x-1} \leq 0$

d) $\dfrac{4x+5}{x+2} \geq 0$

e) $\dfrac{x-3}{2x+6} \leq 0$

f) $\dfrac{4-5x}{2x-1} \geq 0$

g) $3 - \dfrac{x}{x+2} \leq 0$

h) $\dfrac{3x-2}{5-2x} \geq 0$

i) $\dfrac{5x}{x-4} \geq 10$

j) $\dfrac{2x-7}{x-2} \geq 3$

k) $\dfrac{3x+10}{2x-5} \geq -3$

l) $\dfrac{3x-4}{1-6x} \leq 2$

m) $\dfrac{6-x}{x-4} \geq 1$

18) [resp] Resolva as inequações e represente a solução na reta real.

a) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x} \geq 0$

b) $\dfrac{x+8}{x^2+7x+12} \leq 0$

c) $\dfrac{x^2+5}{x^2-4} \geq 5$

d) $\dfrac{x^2+6}{x^2+1} \leq 2$

e) $1 + \dfrac{2}{x+1} \leq \dfrac{2}{x}$

f) $\dfrac{4-2x}{x^2-4} \leq 3$

g) $\dfrac{x+6}{3x^2+2} \geq 1$

h) $\dfrac{x-5}{2x-5} \geq x$

i) $\dfrac{4x-7}{x+2} \leq x-2$

j) $\dfrac{3x-1}{x+4} + \dfrac{x}{x-5} \leq 0$

k) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{1}{x-3} \geq 2$

l) $\dfrac{x^2+2x+3}{x+15} \leq 1$

m) $\dfrac{3x^2+2x-13}{x^2-3x-10} \geq 2$

19) [resp] Resolva as inequações e represente a solução na reta real.

a) $\sqrt{x} - 8 \leq 0$

b) $\sqrt{x} - 3 \geq 0$

c) $\sqrt{x} + 10 \geq 0$

d) $\sqrt{6-5x} - 4 \geq 0$

e) $\sqrt{2x-3} \leq 5$

f) $\sqrt{3x+12} + 7 \geq 0$

g) $\sqrt{x+2} \geq x-4$

h) $\sqrt{10-3x} \leq x-2$

i) $\sqrt{8x+9} \leq 2x+1$

j) $\sqrt{9x^2-1} \geq 2-3x$

k) $\sqrt{8-4x^2} + x \leq 3$

l) $\sqrt{x^2-4x-12} \leq 3x+2$

m) $\sqrt{2x^2+1} - 2x + 1 \geq 0$

n) $\sqrt{-x^2+5x+14} - 2 \leq x$

20) Calcule $|3x-10|$ para $x = 2$ e $x = 5$.

21) Calcule $|7-x|$ para $x = -7$, $x = 1$, $x = 7$ e $x = 12$.

22) Elimine o módulo da expressão $|x|/x^2$.

23) [resp] Elimine o módulo das expressões.

a) $|8|$

b) $|-8|$

c) $-|-8|$

d) $|3-\pi|$

e) $|\pi-3|$

f) $\left|\sqrt{8}-4\right|$

g) $\left|-\dfrac{10}{5^2}\right|$

h) $\sqrt{|-4|}$

24) [resp] Calcule os valores das expressões.

a) $|-6+2|$

b) $4+|-4|$

c) $\dfrac{|-12+4|}{|16-12|}$

d) $\left|\dfrac{0{,}2-1{,}4}{1{,}6-2{,}4}\right|$

e) $\sqrt{3}\ |-2| + 3\left|-\sqrt{3}\right|$

f) $|\pi - 1| + 2$

g) $\left|2\sqrt{3} - 5\right| - \left|\sqrt{3} - 4\right|$

25) Suponha que a e b são números reais não-nulos e que $a > b$. Determine se as desigualdades são verdadeiras ou falsas.

a) $b - a > 0$

b) $\dfrac{a}{b} > 1$

c) $a^2 > b^2$

d) $-a < -b$

26) Determine se as afirmações são verdadeiras para quaisquer números reais a e b.

a) $|-a| = a$

b) $\left|b^2\right| = b^2$

c) $|a - 4| = |4 - a|$

d) $|a + 1| = |a| + 1$

e) $|a + b| = |a| + |b|$

27) Determine se as afirmações são verdadeiras ou falsas. Se verdadeiras, explique o porquê. Se falsas, justifique através de um exemplo.

a) Se $a < b$, então $a - c > b - c$

b) $|a - b| \leq |b| + |a|$

28) [resp] Elimine o módulo das expressões escrevendo-as na forma “por partes”

a) $-|x|$

b) $|x| - 5$

c) $5 - |x|$

d) $|x - 5|$

e) $|5 - x|$

f) $|5x + 1|$

g) $|4 - 3x|$

h) $\left|x^2 + 7\right|$

i) $\left|x^2 - 9\right|$

29) [resp] Calcule as expressões

a) $|5 \times (-3)|$

b) $-3|-5|$

c) $\left|\dfrac{-3}{-6}\right|$

d) $\left|\dfrac{5 - 17}{15 - 6}\right|$

e) $|-2| + 6|-5|$

f) $\Big| -2 + |-5| \Big|$

30) [resp] Calcule as expressões

a) $|(-4x) \times (-6)|$

b) $\left|\dfrac{3x}{-6}\right|$

c) $\left|-\dfrac{-3}{6x}\right|$

d) $|-4x| + |8x|$

e) $|2x| - |-2x|$

f) $\left|\dfrac{2x}{3}\right| - \dfrac{|x|}{6}$

g) $\dfrac{|2x^2|}{|-4xy|}$

h) $\dfrac{\sqrt{x^2}}{|x|}$

i) $\sqrt{|-2x^2|}$

31) [resp] Calcule a distância entre os pontos da reta real.

a) $x_1 = -5$ e $x_2 = -8$

b) $x_1 = -10$ e $x_2 = 10$

c) $x_1 = 4{,}7$ e $x_2 = 1{,}2$

d) $x_1 = 2$ e $x_2 = -12$

32) Reescreva as frases abaixo usando equações modulares.

a) A distância entre x e 2 é igual a 3.

b) A distância entre s e -3 é igual a 4.

c) A casa de minha avó e a casa de meu tio estão a 5 km de distância.

d) A farmácia e a padaria estão à mesma distância de minha casa.

33) Determine os pontos da reta real que estão a uma distância de 10 unidades de 6.

34) Determine os pontos da reta real que estão a uma distância de 2/3 unidades de -1.

35) Determine o conjunto dos valores de x que satisfazem a inequação $0 < x^2 - x < 20$

36) [resp] Resolva as equações.

a) $|x| = 4$

b) $|x| = -4$

c) $x = |-4|$

d) $x = |4|$

e) $|x| = |4|$

f) $|x| = |-4|$

37) [resp] Resolva as equações.

a) $|x - 3| = 4$

b) $\left|x - \frac{1}{2}\right| = 2$

c) $|4 - x| = \frac{1}{10}$

d) $|3x - 1| = 6$

e) $|x - 2| = -1$

f) $\left|\frac{x-3}{4}\right| = 12$

g) $|5 - 4x| = 1$

h) $|5x - 2| = 13$

i) $\left|\frac{2-3x}{4}\right| = 5$

j) $\left|\frac{3x}{2} - 1\right| = \frac{5}{2}$

k) $|5x - 3| = 3x + 15$

l) $|2x - 3| = 5 - 4x$

m) $|6 - x| + 5x = 7$

n) $\left|\frac{7+4x}{3}\right| = 5 + x$

o) $|3x + 5| = |x - 3|$

p) $|2x + 1| = |2 - 5x|$

q) $|x - 1| + |x + 2| = 5$

r) $|2x - 5| - |x - 2| = 3x + 1$

1.3 Operações Aritméticas

Precedência de Operadores

Em primeiro lugar, deve-se efetuar as multiplicações e divisões, da esquerda para a direita. Em seguida, são efetuadas as somas e subtrações, também da esquerda para a direita. Quando desejamos efetuar as operações em outra ordem, somos obrigados a usar parênteses.

Propriedades da Soma e da Multiplicação

Suponha que a, b e c sejam números reais.

1. $a + b = b + a$ — Comutatividade da soma
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ — Associatividade da soma
3. $ab = ba$ — Comutatividade da multiplicação
4. $(ab)c = a(bc)$ — Associatividade da multiplicação
5. $a(b + c) = ab + ac$ — Distributividade

Propriedades de Números Negativos

Suponha que a e b sejam números reais.

1. $(-1)a = -a$
2. $-(-a) = a$
3. $(-a)b = a(-b) = -(ab)$
4. $(-a)(-b) = ab$
5. $-(a+b) = -a - b$
6. $-(a-b) = -a + b = b - a$

Propriedades das Frações

Assumindo que a, b, c e d são números reais podemos escrever as seguintes propriedades das frações.

Soma e diferença de frações com o mesmo denominador. Se $c \neq 0$,

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \qquad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Produto de frações. Se $b \neq 0$ e $d \neq 0$,

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}$$

Divisão de frações. Se $b \neq 0$, $c \neq 0$ e $d \neq 0$,

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c}$$

Soma e diferença de frações com denominadores diferentes. Se $b \neq 0$ e $d \neq 0$,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd} \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - cb}{bd}$$

Simplificação de uma fração. Se $b \neq 0$ e $d \neq 0$,

$$\frac{a\,d}{b\,d} = \frac{a}{b}$$

Exercícios Seção 1.3

1) [resp] Simplifique as expressões.

a) $\dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4}$

b) $\dfrac{2a^2 - 3ab - 9b^2}{2ab^2 + 3b^3}$

c) $\dfrac{12t^2 + 12t + 3}{4t^2 - 1}$

d) $\dfrac{3(4x-1) - 4(3x+1)}{(4x-1)^2}$

2) [resp] Efetue as operações indicadas e simplifique cada expressão.

a) $\dfrac{2a^2 - 2b^2}{b - a}\,\dfrac{4a + 4b}{a^2 + 2ab + b^2}$

b) $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - x - 6}\,\dfrac{3x + 6}{2x^2 - 7x + 3}$

c) $\dfrac{3x^2 + 2x - 1}{2x + 6} \div \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$

d) $\dfrac{58}{3(3t+2)} + \dfrac{1}{3}$

e) $\dfrac{2x}{2x - 1} - \dfrac{3x}{2x + 5}$

f) $\dfrac{-xe^x}{x + 1} + e^x$

g) $\dfrac{4}{x^2 - 9} - \dfrac{5}{x^2 - 6x + 9}$

h) $\dfrac{x}{1 - x} + \dfrac{2x + 3}{x^2 - 1}$

i) $\dfrac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$

j) $\dfrac{4x^2}{\sqrt{2x^2 + 7}} + \sqrt{2x^2 + 7}$

k) $6(2x+1)^2\sqrt{x^2 + x} + \dfrac{(2x+1)^4}{2\sqrt{x^2 + x}}$

l) $\dfrac{2x(x+1)^{-1/2} - (x+1)^{1/2}}{x^2}$

m) $\dfrac{(x^2+1)^{1/2} - 2x^2(x^2+1)^{-1/2}}{1 - x^2}$

n) $\dfrac{(2x+1)^{1/2} - (x+2)(2x+1)^{-1/2}}{2x + 1}$

3) Racionalize o denominador de cada expressão.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3} - 1}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

c) $\dfrac{a}{1 - \sqrt{a}}$

d) $\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$

4) Racionalize o numerador de cada expressão.

a) $\dfrac{\sqrt{x}}{3}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{y}}{x}$

c) $\dfrac{1 - \sqrt{3}}{3}$

d) $\dfrac{1 + \sqrt{x + 2}}{\sqrt{x + 2}}$

5) Determine se as afirmações são verdadeiras ou falsas. Se verdadeiras, explique porquê. Se falsas, justifique através de um exemplo.

a) Se $b^2 - 4ac > 0$, então $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, tem duas raízes reais.

b) Se $b^2 - 4ac < 0$, então $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, não tem raízes reais.

c) $\dfrac{a}{b+c}\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{c}\right)$

d) $\sqrt{(a+b)(b-a)} = \sqrt{b^2 - a^2}$ para todos os números reais a e b.

6) Encontre os valores de x que satisfazem a(s) desigualdade(s).

a) $-x + 3 \leq 2x + 9$

b) $x - 3 > 2$ ou $x + 3 < -1$

c) $2x^2 > 50$

7) [resp] Calcule as expressões dadas.

a) $|-5+7| + |-2|$

b) $|2\pi - 6| - \pi$

c) $\left|\sqrt{3} - 4\right| + \left|4 - 2\sqrt{3}\right|$

8) [resp] Calcule as expressões dadas.

a) $\left(\dfrac{9}{4}\right)^{3/2}$

b) $\dfrac{5^6}{5^4}$

c) $\dfrac{(3 \times 2^{-3})(4 \times 3^5)}{2 \times 9^3}$

d) $\dfrac{3\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{18}}$

9) [resp] Simplifique as expressões dadas.

a) $\dfrac{4(x^2+y)^3}{x^2+y}$

b) $\dfrac{a^6 B^{-5}}{(a^3 b^{-2})^{-3}}$

c) $\dfrac{\sqrt[4]{16x^5yz}}{\sqrt[4]{81xyz^5}}$

x, y e z positivos

d) $\left(\dfrac{3xy^2}{4x^3y}\right)^{-2}\left(\dfrac{3xy^3}{2x^2}\right)^3$

10) [resp] Fatore as expressões dadas.

a) $-2\pi^2 r^3 + 100\pi r^2$

b) $2v^3w + 22vw^3 + 2u^2vw$

c) $12t^3 - 6t^2 - 18t$

11) [resp] Faça as operações indicadas e simplifique as expressões dadas.

a) $\dfrac{6x}{2(3x^2+2)} + \dfrac{1}{4(x+2)}$

b) $\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{4x}{2x^2-1}\right) + 3\left(\dfrac{3}{3x-1}\right)$

c) $\dfrac{-2x}{\sqrt{x+1}} + 4\sqrt{x+1}$

12) Racionalize o denominador da fração

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}$$

1.4 Expoentes e Radicais

Expoentes e Radicais

Se b é um número real qualquer e n um número inteiro positivo, a expressão b^n representa

$$b^n = \underbrace{b\ b\ b\ \cdots\ b}_{n \text{ fatores}}$$

b é chamado base e n é chamado potência.

Na definição original n é restrito a ser um número inteiro positivo, mas podemos estender essa definição para todos os reais. Para $n = 0$ impomos a condição $b \neq 0$ e definimos

$$b^0 = 1$$

Para valores negativos definimos

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$$

Para valores fracionários, definimos que $b^{1/n}$ como o número tal que

$$(b^{1/n})^n = b$$

se esse número existir dizemos que ele é a raiz n-ésima de b

$$b^{1/n} = \sqrt[n]{b}$$

Propriedades dos Expoentes

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad a \neq 0$
3. $(a^m)^n = a^{m\times n}$
4. $(ab)^n = a^n \times b^n$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n} \qquad b \neq 0$

Propriedades na Forma de Raízes

Algumas dessas expressões podem ser escritas na forma de raízes

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3. $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
5. $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ |a|, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

Logaritmos

Seja a uma constante real tal que $a > 0$ e $a \neq 1$. Se $x > 0$, então dizemos que

$$y = \log_a(x) \qquad \text{se e somente se} \qquad a^y = x$$

Dizemos que $y = \log_a(x)$ é o logaritmo de x na base a.

Propriedades do Logaritmo

Propriedades derivadas da definição de logaritmo

Propriedade	*Motivo*	*Exemplo*
$\log_a(1) = 0$	Sabemos que $a^0 = 1$	$\log_8(1) = 0$
$\log_a(a) = 1$	Sabemos que $a^1 = a$	$\log_3(3) = 1$
$\log_a(a^x) = x$	$\log_a(x)$ é a inversa de a^x	$\log_7(7^4) = 4$
$a^{\log_a(x)} = x$	a^x é a inversa de $\log_a(x)$	$10^{\log_{10}(13)} = 13$

Seja a uma constante real tal que $a > 0$ e $a \neq 1$, e seja c uma constante real qualquer.

Se $x > 0$ e $y > 0$, então,

1. Logaritmo do produto $\quad \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
2. Logaritmo do quociente $\quad \log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
3. Logaritmo da potência $\quad \log_a(x^c) = c\log_a(x)$

Logaritmos Usuais

Os logaritmos mais comumente empregados possuem uma notação particular, para facilitar seu uso. O logaritmo na base 10, também chamado Logaritmo Comum ou Decimal, que é apresentado sem a indicação da base.

$$\log(x) = \log_{10}(x)$$

O logaritmo na base $e \approx 2{,}71$, também chamado Logaritmo Natural ou Neperiano, que é representado por ln.

$$\ln(x) = \log_e(x)$$

Exercícios Seção 1.4

1) [resp] Calcule os valores das expressões.

a) $27^{2/3}$

b) $8^{-4/3}$

c) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^0$

d) $(7^{1/2})^4$

e) $\left[\left(\dfrac{1}{8}\right)^{1/3}\right]^{-2}$

f) $\left[\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2\right]^{-3}$

g) $\left(\dfrac{7^{-5}\,7^2}{7^{-2}}\right)^{-1}$

h) $(125^{2/3})^{-1/2}$

i) $\sqrt[3]{2^6}$

j) $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}}$

k) $\sqrt[3]{\dfrac{-8}{27}}$

l) $\dfrac{16^{5/8}\,16^{1/2}}{16^{7/8}}$

m) $\dfrac{6^{2,5}\,6^{-1,9}}{6^{-1,4}}$

2) Determine se as afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique sua decisão.

a) $x^4 + 2x^4 = 3x^4$

b) $3^2\,2^2 = 6^2$

c) $\dfrac{2^{4x}}{1^{3x}} = 2^{4x-3x}$

d) $(2^2\,3^2)^2 = 6^4$

e) $\dfrac{4^{3/2}}{2^4} = \dfrac{1}{2}$

f) $(1{,}2^{1/2})^{-1/2} = 1$

3) Reescreva as expressões utilizando apenas expoentes positivos.

a) $(xy)^{-2}$

b) $\dfrac{x^{-1/3}}{x^{1/2}}$

c) $\sqrt{x^{-1}}\,\sqrt{9x^{-3}}$

d) $12^0(s+t)^{-3}$

4) Simplifique as expressões. (Assuma que x, y, r, s e t são positivos.)

a) $\dfrac{x^{7/3}}{x^{-2}}$

b) $(49x^{-2})^{1/2}$

c) $(x^2y^{-3})(x^{-5}y^3)$

d) $\dfrac{5x^6y^3}{2x^2y^7}$

e) $\dfrac{x^{3/4}}{x^{-1/4}}$

f) $\left(\dfrac{x^3}{-27y^{-6}}\right)^{-2/3}$

g) $\left(\dfrac{x^{-3}}{y^{-2}}\right)^2\left(\dfrac{y}{x}\right)^4$

h) $\dfrac{(r^n)^4}{r^{5-2n}}$

i) $\sqrt[3]{x^{-2}}\,\sqrt{4x^5}$

j) $\sqrt{81x^6y^{-4}}$

k) $\sqrt[3]{27r^6}\,\sqrt{s^2t^4}$

5) Utilize o fato de que $2^{1/2} \approx 1{,}414$ e $3^{1/2} \approx 1{,}732$ para calcular as expressões dadas sem o auxílio de uma calculadora.

a) $2^{3/2}$

b) $8^{1/2}$

6) Utilize o fato de que $10^{1/2} \approx 3{,}162$ e $10^{1/3} \approx 2{,}154$ para calcular as expressões dadas sem o auxílio de uma calculadora.

a) $10^{3/2}$

b) $10^{2,5}$

c) $(0{,}0001)^{-1/3}$

7) Racionalize o denominador das expressões.

a) $\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

b) $\dfrac{5x^2}{\sqrt{3x}}$

c) $\sqrt{\dfrac{2x}{y}}$

8) Racionalize o denominador das expressões.

a) $\dfrac{2\sqrt{x}}{3}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{24}$

c) $\sqrt{\dfrac{2y}{x}}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2 z}}{y}$

9) Coloque a expressão dada na forma logarítmica

a) $2^6 = 64$

b) $3^5 = 243$

c) $3^{-2} = \dfrac{1}{9}$

d) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^1 = \dfrac{1}{3}$

e) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^1 -4 = 16$

f) $32^{3/5} = 8$

g) $81^{3/4} = 27$

h) $10^{-3} = 0{,}0001$

10) Use o fato que $\log 3 = 0{,}4771$ e $\log 4 = 0{,}6021$ para encontrar o valor do logaritmo solicitado

a) $\log 12$

b) $\log \dfrac{3}{4}$

c) $\log 16$

d) $\log \sqrt{3}$

11) [resp] Utilize as propriedades dos logaritmos para simplificar as expressões dadas

a) $\log x(x+1)^4$

b) $\log \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2+1}$

c) $\ln \dfrac{e^x}{1+e^x}$

d) $\ln xe^{-x^2}$

e) $\ln x(x+1)(x+2)$

f) $\ln \dfrac{x^{1/2}}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

g) $\ln x^x$

12) [resp] Use logaritmos para resolver as equações em t

a) $e^{0{,}4t} = 8$

b) $\dfrac{1}{3}e^{-3t} = 0{,}9$

c) $5e^{-2t} = 6$

d) $4e^{t-1} = 4$

e) $\dfrac{50}{1+4e^{0{,}2t}} = 20$

f) $\dfrac{200}{1+3e^{-0{,}3t}} = 100$

g) $A = Be^{-t/2}$

h) $\dfrac{A}{1+Be^{t/2}} = C$

1.5 Expressões Algébricas

Expressões Algébricas

Expressões Algébricas são expressões que envolvem apenas as quatro operações básicas, expoentes e radicais.

Propriedade Distributiva dos Números Reais

1. $ab + ac = a\,(b + c)$

Algumas identidades úteis para manipulações algébricas

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
4. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
5. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Fatoração

Fatoração é o processo de decompor uma expressão algébrica como o produto de outras expressões algébricas.

Exemplo 1.5.1:

Um exemplo do uso da propriedade distributiva para fatorar uma expressão, é a relação

$$3x^2 - x = x(3x - 1)$$

Polinômios

Se n é um número inteiro positivo, o termo x^n é chamado monômio. Um polinômio é uma expressão da forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

onde n é um inteiro não negativo e é chamado de grau do polinômio, os coeficientes a_i são números reais, com $a_n \neq 0$.

Raiz de um polinômio é um número x que faça com que o valor do polinômio seja zero

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

Polinômio do Segundo Grau

Um polinômio do segundo grau tem a seguinte forma

$$ax^2 + bx + c$$

onde $a \neq 0$.

Suas raízes podem ser calculadas pela Fórmula de Bhaskara

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \Delta = b^2 - 4ac$$

Se $\Delta < 0$ o polinômio não tem raízes reais, se $\Delta = 0$ ele tem duas raízes iguais.

Se o polinômio de segundo grau possui duas raízes reais distintas, ele pode ser fatorado como

$$p = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Se ele possui duas raízes reais iguais, ele é fatorado como

$$p = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

O gráfico de um polinômio do segundo grau é uma parábola, e as coordenadas do vértice da parábola podem ser calculadas pelas fórmulas

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a} \qquad y_v = f(x_v) = -\frac{\Delta}{4a}$$

Inequações Quadráticas

Para determinar quais valores de x real satisfazem cada uma dessas inequações

$$p = ax^2 + bx + c > 0 \qquad \text{ou} \qquad p = ax^2 + bx + c < 0$$

1. Calculamos as raízes do polinômio do segundo grau x_1 e x_2
   (a) Se não existirem raízes reais, o polinômio é sempre maior ou sempre menor do que zero
   (b) Se as raízes foram reais e iguais, o polinômio nunca muda de sinal, apenas se anula na raiz
2. Se o polinômio tem duas raízes reais distintas, fatoramos o polinômio como

$$p = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

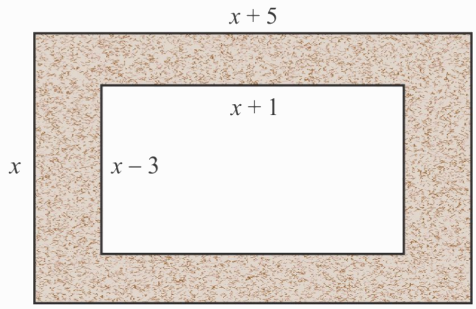
3. Construímos a tabela

	x_1	x_2	
$(x - x_1)$	$+$ ou $-$	$+$ ou $-$	$+$ ou $-$
$(x - x_2)$	$+$ ou $-$	$+$ ou $-$	$+$ ou $-$
p	$+$ ou $-$	$+$ ou $-$	$+$ ou $-$

4. Podemos agora determinar para quais valores de x o polinômio p é positivo ou negativo.

Exercícios Seção 1.5

1) Defina uma função $f(x)$ que forneça a área da região destacada na figura, lembrando que a área de um retângulo de lados b e h é bh.



2) [resp] Encontre as raízes de cada equação por fatoração.

a) $x^2 + x - 12 = 0$

b) $3x^2 - x - 4 = 0$

c) $\frac{1}{4}x^2 - x + 1 = 0$

d) $8x^2 + 2x - 3 = 0$

e) $-6x^2 - 10x + 4 = 0$

f) $2x^4 + x^2 = 1$

3) [resp] Resolva as equações utilizando a fórmula quadrática.

a) $4x^2 + 5x - 6 = 0$

b) $8x^2 - 8x - 3 = 0$

c) $x^2 - 6x + 6 = 0$

d) $2x^2 + 8x + 7 = 0$

4) [resp] Encontre as raízes da equação $2x^4 + x^2 = 1$ substituindo x^2 por y.

5) [resp] Resolva as inequações quadráticas.

a) $x^2 + 3x \geq 10$

b) $-3x^2 - 11x + 4 > 0$

c) $-4x^2 + 4x - 1 < 0$

d) $x^2 + x + 2 \leq 0$

6) [resp] Para cada expressão na forma $p(x)/d(x)$ abaixo, calcule o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$.

a) $(2x^3 - 3x^2 + 6)/(x^2 - 2)$

b) $(6x^2 - 4x - 3)/(3x - 5)$

c) $(x^4 + 2x - 12)/(x + 2)$

d) $(4x^3 + 2x^2 + 11x)/(2x^2 + 3)$

e) $(6x^4 + 5x^3 - 2x)/(3x - 2)$

f) $(4x^3 + 6x - 10)/(2x - 4)$

g) $(x^2 - 5x + 8)/(x - 3)$

h) $(3x + 7)/(x + 4)$

i) $(x^4 - 2)/(x - 1)$

j) $(24x^3 - 4x - 1)/(2x - 1)$

k) $(8x^3 - 12x^2 - 2x)/(4x - 8)$

l) $(x^3 - 3x^2 + 4x - 5)/(x - 4)$

m) $(2x^4 - 4x^3 + x - 17)/(x^2 - 4)$

n) $(x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 2x + 3)/(x^2 - 2x - 3)$

o) $(x^4 - 5x^2 + 4)/(x^2 - 1)$

p) $(3x^5 - 2x^3 - 11x)/(x^3 - 3x)$

q) $(6x^2 + 7x + 9)/(2x^2 - 5x + 1)$

7) [resp] Para os problemas do exercício anterior, expresse $p(x)$ na forma $d(x)q(x) + r(x)$.

8) [resp] Para cada expressão na forma $p(x)/d(x)$ abaixo, calcule o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ usando o algoritmo de Ruffini.

a) $(x^4 + 2x - 12)/(x + 2)$

b) $(3x^2 + 2x - 5)/(x - 2)$

c) $(4x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 22x - 24)/(x + 3)$

d) $(-2x^3 + 3x^2 + 12x + 25)/(x - 4)$

e) $(x^5 - 9x^3 + 2x)/(x - 3)$

f) $(-6x^3 + 4x^2 - x + 2)/(x - 1/3)$

g) $(2x^3 - 9x^2 + 6x + 5)/(x - 3/2)$

h) $(x^2 - 5x - 6)/(x + 1)$

i) $(-4x^2 + 11x + 26)/(x - 4)$

j) $(6x^2 - 7x - 9)/(x + 1/2)$

k) $(x^3 - 9x^2)/(x - 3)$

l) $(5x^4 - 1)/(x - 2)$

m) $(8x^4 + 6x^3 + 3x^2 + 1)/(x - 1/2)$

n) $(x^4 - 20x^2 - 50)/(x - 5)$

o) $x^4/(x - 3)$

p) $(2x^5 - 4x^4 + 9x^3 - 5x^2 + x - 3)/(x - 1)$

9) [resp] Para os problemas do exercício anterior, expresse $p(x)/d(x)$ na forma $q(x) + r(x)/d(x)$.

10) [resp] Usando o algoritmo de Ruffini, verifique quais valores abaixo correspondem a zeros das funções associadas.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 4$, $x_1 = 2$, $x_2 = -2$

b) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$, $x_1 = -1/2$, $x_2 = -2$

c) $f(x) = 4x + x^2$, $x_1 = -4$, $x_2 = 0$

d) $f(x) = -x^2 - 4$, $x_1 = 2$, $x_2 = -2$

e) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 9$, $x_1 = 3$, $x_2 = 1$

f) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$, $x_1 = 5$, $x_2 = -1$

g) $f(x) = 2x^4 + x^3 - 25x^2 + 12x$, $x_1 = -4$, $x_2 = 3$

h) $f(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 28x + 16$, $x_1 = 6$, $x_2 = 2$

i) $f(x) = 9x^3 - 15x^2 - 26x + 40$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 4/3$

j) $f(x) = x^3 - 21x - 20$, $x_1 = 5$, $x_2 = 1$

11) [resp] Para cada função polinomial abaixo, determine o valor da constante c de modo que o termo fornecido seja um fator de p.

a) $p(x) = x^2 - 9x + c$, fator: $x - 8$

b) $p(x) = 5x^2 + cx + 9$, fator: $x + 3$

c) $p(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + c$, fator: $x - 5$

d) $p(x) = 3x^3 + cx^2 - 13x + 3$, fator: $x - 1$

e) $p(x) = x^4 - 2x^3 + 8x^2 + cx - 2$, fator: $x - 2$

f) $p(x) = 2x^4 - 10x^3 + cx^2 + 6x + 40$, fator: $x - 4$

12) [resp] Determine as raízes das equações abaixo. Escreva na forma fatorada os polinômios que aparecem no lado esquerdo das equações.

a) $x^3 - 4x = 0$

b) $x^3 - 4x^2 - 21x = 0$

c) $2x^3 + 11x^2 - 6x = 0$

d) $-3x^3 + 6x^2 + 9x = 0$

e) $x^4 - x^3 - 20x^2 = 0$

f) $x^4 - 8x^3 + 16x^2 = 0$

g) $5x^4 - 8x^3 + 3x^2 = 0$

h) $8x^4 - 6x^3 - 2x^2 = 0$

13) [resp] Determine as raízes das equações abaixo. Escreva na forma fatorada os polinômios que aparecem no lado esquerdo das equações.

a) $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$,
sabendo que $x = -1$ é uma raiz.

b) $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$,
sabendo que $x = 2$ é uma raiz.

c) $x^4 - 9x^3 - x^2 + 81x - 72 = 0$,
sabendo que $x = 8$ e $x = 3$ são raízes.

d) $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$,
sabendo que $x = 4$ é uma raiz.

e) $x^3 - 4x^2 - 17x + 60 = 0$,
sabendo que $x = 3$ é uma raiz.

f) $4x^4 - 21x^3 - 19x^2 + 6x = 0$,
sabendo que $x = 1/4$ é uma raiz.

g) $4x^3 - 16x^2 + 21x - 9 = 0$,
sabendo que $x = 1$ é uma raiz.

h) $3x^3 - 26x^2 + 33x + 14 = 0$,
sabendo que $x = 7$ é uma raiz.

i) $x^4 - 9x^3 + 17x^2 + 33x - 90 = 0$,
sabendo que $x = -2$ e $x = 5$ são raízes.

j) $x^4 - 6x^3 - 5x^2 + 30x = 0$,
sabendo que $x = 6$ é uma raiz.

k) $2x^4 + 9x^3 - 80x^2 + 21x + 108 = 0$,
sabendo que $x = 4$ e $x = 3/2$ são raízes.

l) $x^3 + 7x^2 + 13x + 15 = 0$,
sabendo que $x = -5$ é uma raiz.

m) $3x^3 + 2x^2 + 17x - 6 = 0$,
sabendo que $x = 1/3$ é uma raiz.

n) $x^3 + 7x^2 + 20x + 32 = 0$,
sabendo que $x = -4$ é uma raiz.

o) $x^3 - 3x^2 + 9x - 27 = 0$,
sabendo que $x = 3$ é uma raiz.

p) $2x^3 - 10x^2 - 13x - 105 = 0$,
sabendo que $x = 7$ é uma raiz.

q) $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 36x + 60 = 0$,
sabendo que $x = 2$ é uma raiz de multiplicidade 2.

r) $x^4 - 6x^3 + 25x^2 - 150x = 0$,
sabendo que $x = 6$ é uma raiz.

s) $6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1 = 0$,
sabendo que $x = 1/3$ e $x = -1/2$ são raízes.

14) [resp] Simplifique as expressões abaixo, reduzindo os termos semelhantes.

a) $(3x + 2) + (5x - 4)$

b) $(2y - 3) - (4y - 5)$

c) $(y^3 - 4y^2 + y - 1) - (3y^2 + y - 6)$

d) $(-5z + 2x - 6) + 3(z + 4x + 2)$

e) $(2a - 5b + 3c) + (6a + 2ab - 3c)$

f) $-2(a - 2b - 3ab) - 4(b + 2a - 2ab)$

g) $\dfrac{x-2}{2} - (2 - x)$

h) $\dfrac{2}{3}(2x - 1) + \dfrac{4}{3}(2 - x)$

i) $\dfrac{1}{2}(x + 2y - 4) + \dfrac{1}{3}(3y - x + 9)$

j) $\dfrac{1}{2}(a - 3ab + 2b) + \dfrac{1}{3}(a - 3b + 4ab)$

15) [resp] Expanda as expressões e simplifique-as.

a) $\left(\dfrac{x}{5}\right)\left(\dfrac{2}{3} - 2x\right)$

b) $\left(-\dfrac{x}{2}\right)\left(2 - \dfrac{3x}{4}\right)$

c) $(5x - 3)(2x + 4)$

d) $(8 - 3x)(x^2 + 6)$

e) $-2(1 - x)\left(3 + \dfrac{x}{2}\right)$

f) $(0{,}7x - 0{,}2)(4 - 0{,}6x)$

g) $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{3} - x\right)$

h) $\left(\dfrac{x}{2} - 3\right)\left(\dfrac{5}{4} + 2x\right)$

i) $\left(\dfrac{2x}{3} - \dfrac{3}{2}\right)\left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{x}{3}\right)$

j) $(12x - 5)(12x + 5)$

k) $(3x + 4)^2$

l) $(x - \sqrt{3})^2$

16) [resp] Efetue os produtos abaixo.

a) $(x^{-1} + 3)(x + 2)$

b) $(3x^2 + 2)(6 - \sqrt{x})$

c) $(\sqrt{x} + 9)(\sqrt{x} - 9)$

d) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}} - 5\right)(\sqrt{x} - 1)$

e) $\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)\left(4 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

f) $3x^2(x^3 - 2x^2 - 4x + 5)$

g) $-4x^3(x^2 + 2x - 1)$

h) $xy^2(2x + 3xy + 4y)$

i) $(3x + 5)(3x^3 + 4x^2 + 2)$

j) $(2 - x^2)(3x^3 + 6x^2 - x)$

k) $\left(2x^2 - \dfrac{1}{2}\right)(x^2 + 3)$

l) $(x^3 + 1)(x^4 - 3x^2 + 2)$

m) $(3 - 2y + y^2)(2y^2) - 5y + 4$

n) $(x - y + 1)(2x - 4y + 6)$

o) $(x^2 + 2y)(3x - 2xy - y)$

p) $(2x - 1)^3$

q) $(x - 3)(x + 3)(x - 2)$

r) $(2w - 3)(w - 1)(3w + 2)$

s) $(x^2 + 3)(x^2 - 2)(2x^2 - 5)$

t) $(a + 2b)(3a - b)(2a + 3b)$

u) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$

17) [resp] Expanda as expressões abaixo

a) $(x+2)^2$

b) $(3x+8)^2$

c) $(x^2-\sqrt{5})^2$

d) $(2u+7v)^2$

e) $(4-y)^2$

f) $(3-2y)^2$

g) $(-2-x)^2$

h) $\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

i) $\left(\sqrt{2x}+1\right)^2$

j) $\left(3-\frac{5}{x}\right)^2$

k) $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^2$

l) $(4-x^2)^2$

m) $(x^2-x)^2$

n) $(2x^2-y)^2$

o) $(x^2+\sqrt{x})^2$

p) $(x-2)^2(3-x)^2$

q) $\left(\frac{x+3}{1-x}\right)^2$

r) $(2x+1)^3$

s) $(3-y)^3$

t) $(2\sqrt[3]{x}-3)^3$

18) [resp] Efetue os produtos abaixo.

a) $(x+4)\,(x-4)$

b) $(5x+6)\,(5x-6)$

c) $(2x+7y)\,(2x-7y)$

d) $(-x+2)\,(x+2)$

e) $\left(\frac{3x}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3x}{2}+\frac{1}{3}\right)$

f) $\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)$

g) $\left(y^2+4\right)\left(y^2-4\right)$

h) $\left(z-\sqrt{3}\right)\left(z+\sqrt{3}\right)$

i) $\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)$

j) $\left(2\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)$

19) O número áureo é uma constante real irracional, definida como a raiz positiva da equação quadrática obtida a partir de

$$\frac{x+1}{x}=x$$

Reescreva a equação acima como uma equação quadrática e determine o número áureo.

20) Calcule as expressões abaixo, simplificando o resultado. Sempre que necessário, suponha que os termos no interior das raízes são não negativos e que os denominadores são diferentes de zero.

a) $\dfrac{2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{5(x^2-3)}$

b) $\left(\frac{6}{\sqrt{x}}-\frac{4}{\sqrt{y}}\right)\left(\frac{6}{\sqrt{x}}+\frac{4}{\sqrt{y}}\right)\left(\frac{xy}{4}\right)$

c) $\dfrac{(2-\sqrt{x})(\sqrt{x}+2)}{4-(x-2)^2}$

d) $\dfrac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x-1)^2+2x-3}$

e) $\dfrac{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)}{\sqrt{x}-25}$

f) $\dfrac{(\sqrt{2x}+\sqrt{5})(\sqrt{2x}-\sqrt{5})}{(x-5)^2-x^2}$

g) $\dfrac{(x-3)^2-(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{2-x}$

h) $\dfrac{(x+2)^2-(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)}{(5+x)^2}$

21) Reescreva as expressões abaixo, colocando algum termo em evidência e simplificando o resultado sempre que possível. Quando necessário, suponha que os denominadores são não nulos.

a) $4-2y$

b) $6x-3$

c) $-4x-10$

d) $35x-5z+15y$

e) $-10a+14ab$

f) x^2-2x

g) $8ab-12b+4ab^2$

h) $3x^5-9x^4+18x^7$

i) $\frac{3x}{32}-\frac{21}{4}$

j) $\frac{5x}{2}-\frac{x^2}{2}$

k) $xy+x^2y^2$

l) $4xy+8yz-12w^2y$

m) $xy^2+y^5+3zy^3$

n) $-\dfrac{5}{12x}+\dfrac{10}{3x^3}$

o) $(4x-1)^2+(4x-1)3x$

p) $(5x+1)(x-2)-4(x-2)$

q) $\dfrac{6x^2-24x}{3x}$

r) $\dfrac{x(3-2x)-2(3-2x)}{x-2}$

22) [resp] Fatore as expressões.

a) x^2-9

b) $16x^2-1$

c) $9-\dfrac{x^2}{4}$

d) x^2-64y^2

e) $4y^2-25$

f) $36x^2-100$

g) $16-49x^2$

h) $9u^2-v^2$

i) $25-x^8$

j) x^4-x^2

k) $\dfrac{9x^2}{4}-\dfrac{1}{9}$

l) x^2-16

m) $\dfrac{36}{y^2}-\dfrac{1}{9}$

n) $(x-7)^2-4$

o) $x^2+10x+25$

p) $4x^2-12x+9$

q) $3x^2+12x+12$

r) $x^2-x+\dfrac{1}{4}$

s) $16x^2+40xy+25y^2$

t) $x^2y^2-2xy+1$

u) $x^2-2\sqrt{3}x+3$

v) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{9}$

23) [resp] Resolva as equações abaixo.

a) $4\left(x-\dfrac{3}{4}\right)(x-6)=0$

b) $(x-9)^2=0$

c) $(x-5)(2-x)=0$

d) $4x(x+8)=0$

e) $8\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x-4)=0$

f) $(5x+3)(2x+7)=0$

g) $\left(\dfrac{x}{4}-\dfrac{3}{2}\right)\left(3-\dfrac{x}{4}\right)=0$

h) $\sqrt{2}\left(x+\sqrt{2}\right)\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}-1\right)=0$

24) [resp] Reescreva as equações do exercício anterior na forma $ax^2+bx+c=0$.

25) [resp] Encontre as soluções reais das equações abaixo, caso existam.

a) $x^2-10=0$

b) $3x^2-75=0$

c) $4x^2+81=0$

d) $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{24}{9}=0$

e) $(x-2)^2=4^2$

f) $(2x-1)^2-25=0$

g) $(x+3)^2=\dfrac{1}{9}$

h) $\left(\dfrac{x}{2}+1\right)^2=\dfrac{9}{4}$

26) [resp] Determine as raízes das equações.

a) $x^2-4x=0$

b) $5x^2+x=0$

c) $x^2=-7x$

d) $2x^2-3x=0$

e) $-3x^2-\dfrac{x}{2}=0$

f) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{x}{6}=0$

g) $2x-\sqrt{2}x^2=0$

h) $\sqrt{3}x-\dfrac{x^2}{\sqrt{3}}=0$

27) [resp] Usando a fórmula de Bhaskara, determine, quando possível, as raízes reais das equações.

a) $x^2-6x+8=0$

b) $x^2-2x-15=0$

c) $x^2+6x+9=0$

d) $x^2+8x+12=0$

e) $2x^2+8x-10=0$

f) $x^2-6x+10=0$

g) $2x^2-7x-4=0$

h) $6x^2-5x+1=0$

i) $x^2 - 4x + 13 = 0$

j) $25x^2 - 20x + 4 = 0$

k) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 5 = 0$

l) $2x^2 - 2\sqrt{2}x - 24 = 0$

m) $3x^2 - 0{,}3x - 0{,}36 = 0$

n) $x^2 - 2{,}4x + 1{,}44 = 0$

o) $x^2 + 2x + 5 = 0$

p) $(x+8)^2 + 4x = 0$

q) $(3-4x)(x+3) = 9$

r) $(2-3x)(2x-5) = 4$

28) [resp] Determine quantas raízes as equações abaixo possuem.

a) $2x^2 + 12x + 18 = 0$

b) $x^2 - 3x + 8 = 0$

c) $-2x^2 - 5x + 9 = 0$

d) $\dfrac{x^2}{5} - 2x + 20 = 0$

e) $-x^2 + 16x - 64 = 0$

f) $3x^2 - 4x + 1 = 0$

29) Determine para que valores de m as equações abaixo possuem ao menos uma raiz.

a) $-x^2 - 8x + m = 0$

b) $4x^2 + 12x + m = 0$

c) $5x^2 - 8x + m = 0$

d) $mx^2 + 6x - 15 = 0$

e) $mx^2 - 5x + 10 = 0$

f) $mx^2 - 6x + 9 = 0$

30) Sabendo que a equação

$$4x^2 - (m-3)x + 1 = 0$$

possui exatamente uma raiz, x, determine os possíveis valores da constante m.

31) Sabendo que a equação

$$mx^2 + (2m+5)x + (m+3) = 0$$

não possui raízes reais em x, determine os possíveis valores da constante m.

32) A equação $4x^2 - 12x + c = 0$ tem duas raízes reais, x_1 e x_2. Sabendo que x_2 é 2 unidades maior que x_1, determine essas raízes, bem como o valor de c.

33) [resp] Determine as raízes das equações.

a) $9x^4 - 20x^2 + 4 = 0$

b) $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$

c) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

d) $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$

e) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$

f) $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$

34) Determine o domínio das expressões.

a) $\dfrac{x}{3x-8}$

b) $\dfrac{y-12}{16-y^2}$

c) $\dfrac{\sqrt{3x}+1}{2x-15+x^2}$

d) $\dfrac{2x}{16+9x^2}$

e) $\sqrt{5x-4}$

f) $\sqrt{35-7x}$

g) $\sqrt{x^2-8}$

h) $\sqrt[3]{x-7}$

i) $\dfrac{\sqrt{2x-5}}{20-8x}$

j) $\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x-1}$

k) $\dfrac{x-6}{\sqrt{x-5}}$

l) $\dfrac{\sqrt{49-x^2}}{\sqrt{x}}$

m) $\dfrac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-2}}$

35) [resp] Simplifique as expressões, fatorando os termos, caso necessário. Suponha sempre que os denominadores são não nulos.

a) $\dfrac{2x-6}{x-3}$

b) $\dfrac{2x-6}{3-x}$

c) $\dfrac{x^2-3x}{4x-12}$

d) $\dfrac{3y-12}{6y-18}$

e) $\dfrac{2x-4}{3x-6}$

f) $\dfrac{x^2-x^3}{x}$

g) $\dfrac{x^2+x^4}{3x^3}$

h) $\dfrac{x^2y-xy^2}{xy}$

i) $\dfrac{x^2y-xy^2}{x-y}$

j) $\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$

k) $\dfrac{2x^2-50}{x^3+5x^2}$

l) $\dfrac{x^2-5x+4}{x-4}$

36) [resp] Calcule as expressões abaixo e simplifique o resultado quando possível.

a) $\left(\dfrac{x^2-4x-12}{x+2}\right)\left(\dfrac{2x+1}{x-6}\right)$

b) $\left(\dfrac{2x^2+8x}{x-5}\right)\left(\dfrac{x^2-25}{4x^2+20x}\right)$

c) $\dfrac{\frac{8}{5x}}{\frac{4}{35x}}$

d) $\dfrac{2-\frac{3}{4}}{\frac{1}{2x}-\frac{1}{3x}}$

e) $\dfrac{3u^3v^3}{v^5u^2}+\dfrac{u^2}{v^2}$

f) $\dfrac{2w^3}{y^2}-\dfrac{w^6y^3}{2w^3y^5}$

g) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{5}$

h) $\dfrac{2}{5x}-\dfrac{4}{3}$

i) $\dfrac{2}{5x-1}+\dfrac{3}{7}$

j) $\dfrac{x+3}{1-xd}-2$

k) $\dfrac{5x}{x-4}+\dfrac{3}{x+1}$

l) $\dfrac{x}{x^2-9}-\dfrac{3x-1}{x-3}$

37) Racionalize os denominadores, supondo que x pertença a um domínio adequado.

a) $\dfrac{x}{\sqrt{3x}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$

c) $\dfrac{2}{2-\sqrt{2x}}$

d) $\dfrac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+4}$

e) $\dfrac{x-1}{\sqrt{2x-1}-1}$

f) $\dfrac{\sqrt{3x}}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

38) [resp] Resolva as equações.

a) $\dfrac{x-2}{x+3}=0$

b) $\dfrac{2x+5}{x-1}=3$

c) $\dfrac{5x-2}{1-3x}=-1$

d) $\dfrac{3-x/2}{3x+8}=\dfrac{1}{4}$

e) $\dfrac{3x+5}{4x-5}=-3$

f) $\dfrac{4-x/2}{4x+1}=0$

g) $\dfrac{x}{x^2-3x+2}=0$

h) $\dfrac{2x^2}{x+5}=5$

i) $\dfrac{x^2}{3x-2}=2x-1$

j) $\dfrac{2\,(x - {}^{5}\!/\!_{6}) + 1}{5x - 3} = \dfrac{2}{3}$

k) $\dfrac{x^2 - 26}{x^2 - 9} = 10$

l) $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 4} = 6$

m) $\dfrac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 2} = 5$

n) $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = 4$

o) $\dfrac{x^2 - 4x + 9}{x^2 - 5x + 6} = 3$

p) $\dfrac{2}{x + 1} - \dfrac{4}{x - 1} = 0$

q) $\dfrac{4}{x + 1} + \dfrac{1}{x - 1} = \dfrac{5}{x^2 - 1}$

r) $\dfrac{3}{x + 1} + \dfrac{2}{x - 1} = 3$

s) $\dfrac{2}{x - 4} + \dfrac{5}{x - 2} = 3$

t) $\dfrac{6}{x - 3} + \dfrac{5}{x - 4} = 2$

u) $\dfrac{x}{x - 2} - \dfrac{3}{x + 2} = 1$

v) $\dfrac{1}{2x + 1} + \dfrac{1}{3x - 1} = \dfrac{2}{5}$

w) $\dfrac{3}{x - 2} - \dfrac{2}{x + 3} = \dfrac{1}{x}$

x) $\dfrac{2}{x + 1} - \dfrac{2}{2x - 3} = \dfrac{3}{x}$

y) $\dfrac{4}{x - 5} - \dfrac{2}{x - 2} = \dfrac{12}{(x - 5)(x - 2)}$

z) $\dfrac{4}{5 - 2x} - \dfrac{3}{x} = 0$

39) [resp] Resolva as equações.

a) $\dfrac{3x + 4}{1 - 5x} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{6}$

b) $\sqrt{3x + 4} = 8$

c) $\sqrt{x + 1} = 2x - 1$

d) $\sqrt{2x + 1} = x - 1$

e) $\sqrt{x - 3} + x = 9$

f) $\sqrt{4 - x} + 2 = 3x$

g) $4\sqrt{3x - 1} = \dfrac{2}{3} - 2x$

h) $\sqrt{5 - x^2} = 3 - 2x$

i) $\sqrt{8x + 25} - 2 = 3 - 4x$

j) $\sqrt{4x + 4} - x + 2 = 0$

k) $2x + \sqrt{10 - 4x} = 1$

l) $\sqrt{4x + 5} - x = 2x + 4$

m) $\sqrt{2x + 5} - 1 = x$

n) $3 + \sqrt{45 - 6x} = x$

o) $\sqrt{2x^2 + 7} = 2x - 1$

p) $\sqrt{25 - 3x^2} = -x$

q) $2\sqrt{9x^2 - 7} = 6$

r) $\sqrt{x^2 + 3} + x = 5$

s) $\sqrt{4x^2 - 1} + 1 = 2x$

t) $\sqrt{9x^2 - 2} - 3x = 4$

u) $(x + 2)^{2/3} = 9$

v) $(5x - 6)^{3/2} = 8$

w) $(4x^2 - 13)^{3/5} = 27$

x) $x^{1/2} - 13x^{1/4} + 12 = 0$

y) $3\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = 2$

z) $x^{1/3} - x^{1/6} = 2$

40) [resp] Efetue as operações indicadas e simplifique cada expressão.

a) $(7x^2 - 2x + 5) + (2x^2 + 5x - 4)$

b) $(3x^2 + 5xy + 2y) + (4 - 3xy - 2x^2)$

c) $x - \{2x - [-x - (1 - x)]\}$

d) $\left(\dfrac{1}{3} - 1 + e\right) - \left(-\dfrac{1}{3} - 1 + e^{-1}\right)$

e) $-\dfrac{3}{4}y - \dfrac{1}{4}x + 100 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}y - 120$

f) $3\sqrt{8} + 8 - 2\sqrt{y} + \dfrac{1}{2}\sqrt{x} - \dfrac{3}{4}\sqrt{y}$

g) $\dfrac{8}{9}x^2 + \dfrac{2}{3}x + \dfrac{16}{3}x^2 - \dfrac{16}{3}x - 2x + 2$

h) $(x+8)(x-2)$

i) $(3a-4b)^2$

j) $(x+2y)^2$

k) $(2x+y)(2x-y)$

l) $(x^{1/2}+1)\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)-(x^{1/2}-1)\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)$

m) $2(t+\sqrt{t})^2-2t^2$

41) [resp] Coloque em evidência o maior fator comum de cada expressão.

a) $4x^5-12x^4-6x^3$

b) $4x^2y^2z-2x^5y^2+6x^3y^2z^2$

c) $3x^{2/3}-2x^{1/3}$

d) $e^{-x}-xe^{-x}$

e) $2ye^{xy^2}+2xy^3e^{xy^2}$

f) $2x^{-5/2}-\frac{3}{2}x^{-3/2}$

g) $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u^{3/2}-2u^{1/2}\right)$

42) [resp] Fatore cada expressão.

a) $6ac+3bc-4ad-2bd$

b) $4a^2-b^2$

c) $12x^2-3y^2$

d) $10-14x-12x^2$

e) $3x^2-6x-24$

f) $12x^2-2x-30$

g) $(x+y)^2-1$

h) $8a^2-2ab-6b^2$

i) x^6+125

43) [resp] Efetue as operações indicadas e simplifique cada expressão.

a) $(x^2+y^2)x-xy(2y)$

b) $2kr(R-r)-kr^2$

c) $2(x-1)(2x+2)^3[4(x-1)+(2x+2)]$

d) $5x^2(3x^2+1)^4(6x)+(3x^2+1)^5(2x)$

e) $4(x-1)^2(2x+2)^3(2)+(2x+2)^4(2)(x-1)$

f) $(x^2+2)^2[5(x^2+2)^2-3](2x)$

g) $(x^2-4)(x^2+4)(2x+8)-(x^2+8x-4)(4x^3)$

1.6 Geometria

Triângulos e Círculos

Em um triângulo retângulo vale o Teorema de Pitágoras

$$a^2=b^2+c^2$$

onde a é a medida da hipotenusa e b e c são as medidas dos catetos.

A área de um triângulo de base b e altura h é

$$A=\frac{bh}{2}$$

A área de um círculo de raio r é

$$A = \pi r^2$$

O perímetro de um círculo de raio r é

$$P = 2\pi r$$

Sólidos

O volume, V, e a área, A, de uma esfera de raio r são

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad A = 4\pi r^2$$

O volume, V, e a área, A, de um cilindro de raio r e altura h são

$$V = \pi r^2 h \qquad A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

O volume, V, e a área, A, de um cone de raio r e altura h são

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

1.7 Revisão

1) Determine o custo mínimo C (em reais) de um certo produto, dado que

$$5(C - 25) \geq 1{,}75 + 2{,}5C$$

2) Determine o lucro máximo P (em reais) resultante de uma certa transação, dado que

$$6(P - 2500) \leq 4(P + 2400)$$

3) Determine as distâncias entre os pontos

$$\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right) \text{ e } \left(-\frac{1}{2}, 2\sqrt{3}\right)$$

4) Determine o custo mínimo C (em reais) dado que

$$2(1{,}5C + 80) \leq 2(2{,}5C - 20)$$

5) Encontre o retorno máximo R (em reais) dado que

$$12(2R - 320) \leq 4(3R + 240)$$

2

Matrizes

2.1 Matrizes e operações matriciais

Matrizes

Definimos como matriz do tipo $m \times n$ o conjunto de números reais, dispostos em um quadro de m linhas por n colunas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Podemos definir uma matriz abreviadamente como $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Os valores a_{ij} são chamados elementos de A.

Dizemos que uma Matriz é Quadrada se $m = n$.

Uma matriz quadrada importante é a Matriz Identidade. Essas matrizes tem todos os elementos da diagonal iguais a 1 e os demais elementos nulos

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dizemos que duas matrizes são iguais se elas tem as mesmas dimensões e todos os seus elementos são iguais.

Transposição

Matriz Transposta ou transposta de uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é uma matriz construída trocando as linhas e colunas de A

$$A^t = (a_{ji})_{n\times m}$$

Soma

A Soma de duas matrizes de mesma dimensão $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ é uma matriz construída somando cada elemento de A com o elemento correspondente de B. Assim

$$C = A + B$$

significa que

$$C = (c_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Subtração

A Subtração de matrizes é definida de modo equivalente a soma, ou seja,

$$C = A - B$$

significa que

$$C = (c_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{bmatrix}$$

Multiplicação por um número real

Multiplicação por um número real ou Multiplicação por um Escalar é uma operação que multiplica cada elemento da matriz por um número, isso é, se k é um número real, então

$$B = kA$$

é a operação

$$B = (b_{ij})_{m\times n} = (ka_{ij})_{m\times n} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Multiplicação de Matrizes

A Multiplicação de Matrizes é uma operação menos intuitiva do que as demais. Ela é definida entre duas matrizes tais que o número de linhas da segunda seja igual ao número de colunas da primeira. Assim para multiplicarmos as matrizes A e B elas devem ter as dimensões compatíveis

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \qquad B = (b_{ij})_{n\times p}$$

A matriz

$$C = AB$$

terá dimensões $C = (c_{ij})_{m\times p}$ e seu elemento c_{ij} é igual a soma dos produtos da i-ésima linha de A com os elementos da j-ésima coluna de B.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

Por exemplo, se A for uma matriz 2×3 e B uma matriz 3×2 teremos

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} t & u \\ v & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} at + bv + cy & au + bx + cz \\ dt + ev + fy & du + ex + fz \end{bmatrix}$$

A multiplicação de uma matriz pela matriz identidade retorna a matriz original

$$AI_n = A \qquad\qquad I_m A = A$$

2.2 Propriedades das Operações com Matrizes

Propriedades das Operações com Matrizes – Soma

Sejam A, B e C matrizes com as dimensões apropriadas, então as operações com matrizes tem as seguintes propriedades

1. Comutatividade da soma

$$A + B = B + A$$

2. Associatividade da soma

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

3. Elemento neutro da soma
   Se $\mathbf{0}$ é uma matriz com todos os elementos nulos então $A + \mathbf{0} = A$
4. Elemento simétrico
   Para cada matriz A existe uma matriz $-A = (-1)A$ tal que $A + (-A) = \mathbf{0}$

Propriedades das Operações com Matrizes – Produto por Escalar

Sejam A, B e C matrizes com as dimensões apropriadas e α e β números reais (escalares), então as operações com matrizes tem as seguintes propriedades

1. Associatividade do produto por escalar

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$$

2. Distributividade do produto por escalar

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

3. Distributividade do produto por escalar

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

Propriedades das Operações com Matrizes – Produto

Sejam A, B e C matrizes com as dimensões apropriadas e α e β números reais (escalares), então as operações com matrizes tem as seguintes propriedades

1. Associatividade do produto

$$A(BC) = (AB)C$$

2. Distributividade do produto

$$A(B + C) = AB + AC$$

3. Distributividade do produto

$$(B + C)A = BA + CA$$

4. Elemento neutro do produto
   A matriz identidade I_n é tal que $AI_n = I_mA = A$
5. Associatividade dos produtos

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$$

Note que a multiplicação de matrizes não é comutativa, isso é, em geral

$$AB \neq BA$$

Na multiplicação de matrizes não vale a lei do anulamento do produto, é possível que $A \neq 0$ e $B \neq 0$ e mesmo assim $AB = 0$

Se acontecer $AB = BA$ dizemos que as matrizes A e B são comutativas.

Propriedades das Operações com Matrizes – Transposição

Sejam A, B e C matrizes com as dimensões apropriadas e α e β números reais (escalares), então as operações com matrizes tem as seguintes propriedades

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$
3. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$
4. $(AB)^t = B^t A^t$

Simetria

Dizemos que uma matriz A é

Simétrica	quando $A^t = A$
Antissimétrica	quando $A^t = -A$

EXEMPLO 2.2.1: Verifique se a identidade é verdadeira ou falsa

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

$$\begin{aligned}(A + B)(A - B) &= (A + B)A - (A + B)B \\ &= AA + BA - AB - BB \\ &= A^2 + BA - AB - B^2\end{aligned}$$

A identidade só será verdadeira se $BA - AB = 0$ o que não é verdade em geral para matrizes. Portanto a identidade não é verdadeira.

Fazendo as contas com um exemplo numérico simples

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculamos agora $(A+B)(A-B)$ e $A^2 - B^2$ e verificamos que os resultados não serão iguais

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)(A-B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa

Se A é uma matriz quadrada de ordem n se existir uma matriz B com a mesma ordem que A e que satisfaça

$$AB = BA = I_n$$

a matriz B é chamada de Inversa da matriz A. Se a inversa da matriz A existe podemos indicá-la por A^{-1}.

Quando A não possui uma inversa dizermos que A é uma Matriz Singular.

Exercícios Seção 2.2

Matrizes

1) [resp] Indicar explicitamente os elementos da matriz $A = (a_{ij})_{2\times 3}$ tal que $a_{ij} = i - j$

2) [resp] Ache a matriz A do tipo 2×3 definida por $a_{ij} = ij$ onde i indica a linha e j, a coluna.

3) [resp] Construir as seguintes matrizes

a) $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$

b) $B = (b_{ij})_{3\times 3}$ tal que $b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i + j = 4 \\ 0, & \text{se } i + j \neq 4 \end{cases}$

4) Construa a matriz $A = (a_{ij})_{2\times 3}$ definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} 3i + j, & \text{se } i < j \\ 7, & \text{se } i = j \\ i^2 + j, & \text{se } i > j \end{cases}$$

5) Dada as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} x+y & 1 \\ -5 & x-y \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$$

calcule x e y de modo que $A = B$.

Operações com Matrizes

6) [resp] Datas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

calcule $A + B$, $A - B$, $2A + 3B$, AB, BA, A^t e $A^t + B$.

7) [resp] Datas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 11 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

calcule, se possível, $A + B + C$, $A - B + C$, $A - B - C$, $-A + B - C$, AB, BC, AB^t, CB^t, A^tB e A^tB^t.

8) [resp] Calcule os seguintes produtos matriciais

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

9) [resp] Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ calcule A^2, A^3, A^4 e A^n.

10) [resp] Calcule AB, BA, A^2 e B^2 sabendo que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

11) [resp] Calcular o produto ABC sendo dados

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

12) [resp] Considerando as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Calcule

a) $C = A + B$
b) $D = A - B$
c) $E = 2A + 3B$
d) $F = A^t + B^t$
e) $G = AB^t$
f) $H = A^t B$

13) [resp] Considerando as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule

a) $C = AB$
b) $D = A(3B)$
c) $E = B^2$
d) $F = B^3$
e) $G = BB^t$
f) $H = A^t A$
g) $J = AA^t$

14) [resp] Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -6 & 9 & -7 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -9 \\ -1 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Se for possível calcule

a) $AB - BA$
b) $2C - D$
c) $(2D^t - 3E^t)^t$
d) $D^2 - DE$

15) [resp] Sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

calcule

a) $(A + B)^2$
b) $(A + B)(A - B)$
c) $A^2 - 2I_2 A + I_2^2$
d) $A^3 - I_2^3$

16) Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, qual das matrizes comuta com A

a) $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
b) $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$
c) $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
d) $E = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

17) Calcule x, y, z e t sabendo que

$$\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & y \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ z & t \end{bmatrix}$$

18) Obtenha X sabendo que

$$X + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

19) Determine x e y de modo que mas matrizes A e B comutem

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{bmatrix}$$

20) Obter todas as matrizes B que comutem com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

21) Dada as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

determine X e Y, tais que

a) $X = A + 2B - C + D$
b) $\dfrac{Y + A}{2} = \dfrac{C}{2} + 2B - 3D$

22) Sendo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

resolva o sistema, onde X e Y são matrizes quadradas de ordem 2

$$\begin{cases} AX + Y = O \\ BX + Y = I \end{cases}$$

23) Calcule x, data a igualdade

$$\begin{bmatrix} x & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

24) Determine os valores de x, y e z na igualdade abaixo, envolvendo matrizes reais 2×2

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y & 0 \\ x & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z-4 & 0 \\ y-z & 0 \end{bmatrix}$$

25) Calcule x de modo que as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & x \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

sejam comutativas.

26) Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

determine uma matriz real da forma

$$T = \begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}$$

para a qual $AT = T$

27) Seja, para cada x real, a matriz quadrada de ordem 2

$$M(x) = \begin{bmatrix} x & -x \\ 2x & x \end{bmatrix}$$

Calcule o produto de $M(x)$ por $M(-x)$.

28) Se conhecemos apenas as matrizes AB e AC como podemos calcular as matrizes

a) $A(B+C)$

b) B^tA^t

c) C^tA^t

d) $(ABA)C$

29) Mostre que as matrizes da forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & y^{-1} \\ y & 1 \end{bmatrix}$$

em que y é uma número real não nulo, verificam a equação

$$X^2 = 2X$$

30) Verifique se as identidades são verdadeiras

a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

b) $(AB)C = C(AB)$

c) $(ABC)^t = C^tB^tA^t$

d) $(A+I)(A-I) = A^2 - I$

Matriz Transposta

31) [resp] Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

calcule

a) $X = A + A^t$

b) $Y = A^t - A$

32) Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine a e b, sabendo que

$$AB^t = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

33) Sabendo que

$$A = \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

e que $A^tB = 4$ determine o valor de x.

34) Encontre um valor de x tal que $AB^t = 0$, sendo que

$$A = \begin{bmatrix} x & 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa

35) Mostre que A^{-1} é a inversa de A

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 31 & -19 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

36) Resolva a equação matricial $AX = B$, dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$$

37) Determine a real de modo que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

seja igual à sua inversa.

2.3 Determinante de uma Matriz e suas Propriedades

Determinante de uma Matriz Quadrada de Ordem 1

O determinante de uma matriz com uma linha e uma coluna é igual ao valor do elemento da matriz

$$A = [a_{11}] \qquad \text{então} \qquad \det A = a_{11}$$

Determinante de uma Matriz Quadrada de Ordem 2

Data uma matriz A quadrada de ordem 2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

definimos o determinante de A como sendo a subtração do produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

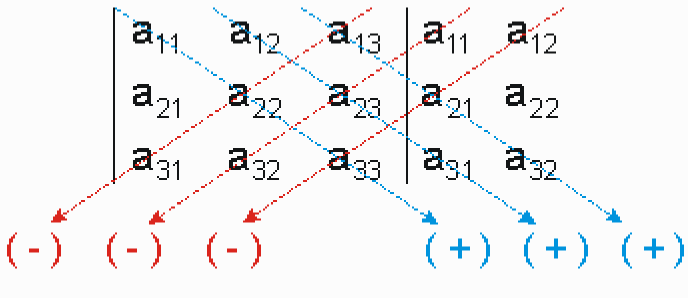
Note a diferença na notação de Matriz $[\,\cdot\,]$ e de determinante $|\,\cdot\,|$.

Determinante de uma Matriz Quadrada de Ordem 3

Podemos calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem 3 pela Regra de Sarrus. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Copiamos as duas primeiras colunas no final da matriz e somamos os produtos dos elementos das diagonais à direita e subtraímos os produtos dos elementos das diagonais à esquerda



Obtemos assim o resultado

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Note que essa regra se aplica apenas a matrizes de ordem 3.

Para definirmos o determinante para matrizes quadradas de ordem maior do que 3 precisamos de algumas definições auxiliares e um teorema.

Menor Complementar

O Menor complementar, $\overline{A}_{ij}$, de uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ relativo ao elemento a_{ij} é o determinante da matriz obtida removendo a linha i e a coluna j da matriz A.

Exemplo 2.3.1: Encontre os menores complementares dos elementos da primeira linha da matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Os menores complementares dos elementos a_{11}, a_{12} e a_{13} são

$$\overline{A}_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

$$\overline{A}_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$$

$$\overline{A}_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}$$

Cofator

O Cofator do elemento a_{ij} é o número obtido multiplicando $(-1)^{i+j}$ com o Menor Complementar de a_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\overline{A}_{ij}$$

Determinante de uma Matriz Qualquer Ordem – Teorema de Laplace

O Teorema de Laplace nos diz como calcular o determinante de uma matriz A. O determinante é calculado somando os Cofatores de cada elemento de uma linha ou coluna da matriz.

Se aplicarmos o teorema a primeira linha temos

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

Explicitando os Menores Complementares temos

$$\det A = a_{11}(-1)^{1+1}\overline{A}_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}\overline{A}_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}\overline{A}_{13} + \cdots + a_{1n}(-1)^{1+n}\overline{A}_{1n}$$

Exemplo 2.3.2: Calcule o determinante da matriz

$$M = \begin{bmatrix} 4 & x & 0 & x \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det M &= \begin{vmatrix} 4 & x & 0 & x \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} \\
&= a_{11}\overline{A}_{11} - a_{12}\overline{A}_{12} + a_{13}\overline{A}_{13} - a_{14}\overline{A}_{14} \\
&= 4\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{=0} - x\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{=0} + 0\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -x\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -x\left(3\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ x & 0 \end{vmatrix}\right) \\
&= -x\big[3(2 \times 1 - 0) + 2(0 - 2x)\big] \\
&= -x(6 - 4x) \\
&= 2x(x - 3)
\end{aligned}$$

Combinação Linear

Uma Combinação Linear de colunas de uma matriz é a soma de duas colunas podendo multiplicar cada uma delas por um número não negativo. Por exemplo, considerando a matriz A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Podemos construir uma matriz B fazendo uma combinação linear da primeira e segunda colunas de A

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & ra_{12} + sa_{11} & a_{13} \\ a_{21} & ra_{22} + sa_{21} & a_{23} \\ a_{31} & ra_{32} + sa_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

onde r e s são números reais não nulos. O mesmo pode ser feito com as linhas de uma matriz.

Propriedades dos Determinantes

O determinante de uma matriz será zero quando

1. Todos os elementos de uma de suas linhas (ou colunas) forem zero
2. Quando a matriz possui duas linhas (ou colunas) iguais ou proporcionais
3. Quando uma linha (ou coluna) é a combinação linear de outras linhas (ou colunas)

Transformações que não alteram o determinante de uma matriz

1. Quando transpomos a matriz

   $$\det A^t = \det A$$

2. Quando somamos aos elementos de uma linha (ou coluna) os elementos de outra linha (ou coluna) multiplicados por uma constante

Transformações que alteram o determinante

1. O determinante muda de sinal se trocarmos duas linhas (ou colunas) de lugar
2. Se multiplicarmos linha (ou coluna) por uma constante o valor do determinante será multiplicado por essa mesma constante.

Se A e B forem duas matrizes quadradas de mesma ordem, então

$$\det(AB) = \det A \det B$$

O determinante de qualquer matriz identidade é sempre 1

$$\det I = 1$$

Uma matriz quadrada A possui inversa se, e somente se,

$$\det A \neq 0$$

O determinante da inversa da matriz A é

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Exercícios Seção 2.3

1) [resp] Calcule os determinantes

a) $\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 13 & 7 \\ 11 & 5 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} \log(a) & \log(b) \\ 1/2 & 1/4 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 2m^2 & 2m^4 - m \\ m & m^3 - 1 \end{vmatrix}$

2) [resp] Calcule os determinantes

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & -7 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 11 \\ -2 & 1 & 13 \\ 5 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 0 & a & c \\ -c & 0 & b \\ a & b & 0 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ m & n & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

3) [resp] Calcule os determinantes das matrizes usando o Teorema de Laplace

a) $M=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

b) $M=\begin{vmatrix} 0 & a & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & b \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix}$

c) $M=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

d) $M=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & a & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & b & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & c & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$

e) $M=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l & p & z & 0 & 0 & 0 \\ m & n & p & x & 0 & 0 \\ b & c & d & e & y & 0 \\ a & b & c & d & e & z \end{vmatrix}$

4) [resp] Calcule o valor do determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & 0 & a & a \\ 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

5) [resp] Calcule o valor de A sabendo que

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix}$$

6) [resp] Determine x tal que

a) $\begin{vmatrix} 2x & 3x+2 \\ 1 & x \end{vmatrix}=0$

b) $\begin{vmatrix} 2x & x-2 \\ 4x+5 & 3x-1 \end{vmatrix}=11$

7) [resp] Determine x tal que

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 2 & 2x & 1 \\ 3 & x+1 & 1 \end{vmatrix}=0$

b) $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & -1 & x \\ 1 & -x & 1 \end{vmatrix}=0$

c) $\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ -2 & x & -4 \\ 1 & -3 & -x \end{vmatrix}=0$

d) $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 \\ 3x & x+1 & 2x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3x & 2x \\ 4 & -x \end{vmatrix}$

8) [resp] Encontre os valores de a para os quais a matriz A possui inversa.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix}$$

9) [resp] Calcule o determinante da matriz M e determine para quais valores de x ela possui inversa

$$M=\begin{bmatrix} 4 & x & 0 & x \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

10) [resp] Calcule o determinante da matriz

$$A=\begin{bmatrix} e^{rt} & te^{rt} \\ re^{rt} & (1+rt)e^{rt} \end{bmatrix}$$

11) [resp] Sabendo que $\det A=-3$ calcule

a) $\det A^2$ b) $\det A^3$ c) $\det A^t$

12) Determine os valores de λ tais que

$$\det(A-\lambda I)=0$$

para as matrizes

a) $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

13) Calcule o determinantes das matrizes

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

c) AB

d) $2A$

e) A^tB

f) A^2B^{-1}

14) Calcule o determinante da matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, sabendo que $2a = e^x + e^{-x}$ e $2b = e^x - e^{-x}$.

15) Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & n & 2 \\ 5 & 1 & m \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

a) Ache um valor de m, tal que $\det A = 0$, qualquer que seja n.

b) Esse valor de m é o único com essa propriedade?

16) A matriz real $A = (a_{ij})$ quadrada e de ordem 3, é definida pela regra

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i > j \\ i^j, & \text{se } i = j \\ (-1)^{i+1}, & \text{se } i < j \end{cases}$$

a) Escreva a matriz A na forma usual de linhas e colunas, onde o valor numérico de a_{ij} está na i-ésima linha e na j-ésima coluna de A.

b) Calcule o determinante D da matriz A.

17) Determine o valor de x para que o determinante da matriz $C = AB^t$ seja igual a 602, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} x-1 & 8 & -5 \\ -2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

e B^t é a matriz transposta de B.

18) Duas matrizes de ordem n são inversas quando o produto delas é a identidade de ordem n. A inversa da matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

é a matriz

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & y & z \\ 1 & z & w \end{bmatrix}$$

Encontre

a) o valor da expressão $A = x - 3y - z + w$.

b) $\det(2M)$.

19) [resp] Determine o conjunto solução da equação

$$\begin{vmatrix} 3^x & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

20) Determine x de modo que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} \geq 0$$

21) [resp] Resolva a equação

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & x & 0 \\ x & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

22) Desenvolva o determinante a seguir

$$x = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

23) Sabendo que $\begin{vmatrix} a & x & 1 \\ b & y & 2 \\ c & z & 3 \end{vmatrix} = 4$

calcule $M = \begin{vmatrix} 2a & 3x & -1 \\ 2c & 3z & -3 \\ 2b & 3y & -2 \end{vmatrix}$

24) Sem calcular os determinantes a seguir, justifique a sua nulidade

a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ ka & kb & kc \\ x & y & m \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -4 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ m & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 11 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$

25) Calcule x para que os determinantes das matrizes sejam iguais

$$A = \begin{bmatrix} x+1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 5 \\ x & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 78 & 0 \end{bmatrix}$$

26) Determine as condições que x deve satisfazer para que a matriz A seja inversível

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & x & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 5 & x \end{bmatrix}$$

27) Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} k & k & k \\ k & k & 5 \\ k & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que a matriz A não admita inversa.

28) Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

calcule o determinante da matriz $(AB)^{-1}$.

2.4 Sistemas Lineares

Sistemas Lineares

Uma sistema linear é um conjunto de m equações lineares com n incógnitas x_1, x_2, $\ldots$, x_n

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Em termos de número de soluções, um sistema linear pode ser classificado como

Possível Admite pelo menos uma solução

- **Determinado** Admite uma única solução
- **Indeterminado** Admite infinitas soluções

Impossível Não existe nenhuma solução para o sistema

Dois sistema lineares são ditos Sistemas Equivalentes se, e somente se, admitem a mesma solução.

Forma Matricial

Sempre podemos escrever um sistema linear em sua forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Abreviadamente podemos escrever $AX = B$ onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Um sistema linear com o mesmo número de equações e incógnitas, $m = n$, será determinado se, e somente se, a sua matriz A for inversível, isso é $\det A \neq 0$.

Sistemas Lineares Homogêneos

Sistema lineares homogêneos são sistemas onde os termos independentes, b_i são todos nulos.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

ou matricialmente

$$AX = 0$$

Não deixe de conferir suas respostas. Uma pequena distração, como uma troca de sinal, é suficiente para produzir falsos resultados.

Regra de Cramer

A Regra de Cramer é um método para resolver um sistema linear, com $m = n$, determinado. A solução do sistema é calculada pela formula

$$x_i = \frac{D_i}{\det A} \qquad i = 1, \ldots, n$$

onde D_i é o determinante da matriz construída a partir da matriz A substituindo a coluna i pelos valores de B, por exemplo,

$$D_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A Regra de Cramer tem grande importância teórica, mas existem métodos que demandam muito menos operações para chegar a solução de um sistema linear. Principalmente quando n é grande.

2.5 Método de Gauss

Sistema Triangular Superior

Se a matriz de um sistema linear, com $m = n$, tiver todas as entradas abaixo da diagonal nulas, como nesse exemplo com $n = 3$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Dizermos que o sistema é Triangular Superior.

Esse tipo de sistema pode ser facilmente resolvido se resolvermos primeiro a ultima equação encontrando x_3. Então substituímos esse valor na segunda equação e calculamos x_2. Por fim substituímos x_3 e x_2 na primeira equação e encontramos x_1. O mesmo método pode ser usado para resolver sistemas triangulares de qualquer dimensão.

Método de Gauss

Como resolver um sistema triangular é relativamente fácil o Método de Gauss busca transformar o sistema que desejamos resolver em um sistema equivalente que seja triangular superior.

Para transformar um sistema qualquer em um sistema triangular superior equivalente podemos usar qualquer uma das seguintes operações elementares nas linhas da matriz do sistema

1. Trocar duas linhas entre si.
2. Multiplicar todos os elementos de uma linha por uma constante não-nula.
3. Substituir uma linha pela sua soma com um múltiplo de outra.

O Método de Gauss usa esses passos em uma sequencia específica que garante a transformação de qualquer matriz não singular em triangular superior.

Para ilustrar a aplicação do Método de Gauss apresentamos aqui um sua aplicação em uma matriz de ordem 3.

1. Construir a matriz aumentada do sistema $[A|B]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

2. Queremos agora transformar anular os elementos abaixo da diagonal da matriz A. Primeiro dividimos todos os elementos da primeira linha por a_{11}, isso é, $L_1^{(1)} = L_1^{(0)}/a_{11}$, obtermos assim

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

3. Substituímos agora a segunda linha por ela mesma subtraída da primeira linha multiplicada por a_{21}, isso é, $L_2^{(1)} = L_2^{(0)} - L_1^{(1)} a_{21}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

4. Fazemos o procedimento equivalente para anular o termo a_{31}, isso é, $L_3^{(1)} = L_3^{(0)} - L_1^{(1)} a_{31}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & b_3^{(1)} \end{array}\right]$$

5. Repetimos o processo para a segunda coluna. Primeiro dividimos a segunda linha por $a_{22}^{(1)}$, isso é, $L_2^{(2)} = L_2^{(1)} / a_{22}^{(1)}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & b_3^{(1)} \end{array}\right]$$

6. Substituímos agora a terceira linha por ela mesma subtraída da segunda linha multiplicada por a_{32}, isso é, $L_3^{(2)} = L_3^{(1)} - L_2^{(1)} a_{32}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & b_3^{(2)} \end{array}\right]$$

7. Dividimos agora a terceira linha por $a_{33}^(2)$, isso é, $L_3^{(3)} = L_3^{(2)} / a_{33}^{(2)}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & b_3^{(3)} \end{array}\right]$$

Obtemos assim um sistema equivalente ao original que pode ser resolvido com muito mais facilidade

Exemplo 2.5.1: Resolva o sistema linear usando o Método de Gauss

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x + y + 4z = 20 \\ 2x + 3y + 5z = 25 \end{cases}$$

Construindo a matriz aumentada do sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 20 \\ 2 & 3 & 5 & 25 \end{array}\right]$$

Como o elemento a_{11} já é igual a 1 não precisamos dividir a primeira linha por ele. Subtraímos a segunda linha menos a primeira vezes 2 e a terceira linha menos a primeira, também, vezes 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right]$$

Dividimos a segunda linha por $a_{22} = -1$ e obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right]$$

Subtraímos a terceira linha menos a segunda linha

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right]$$

Dividimos a terceira linha por $a_{33} = 5$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Resolvemos a terceira equação

$$1z = 1 \qquad \Rightarrow \qquad z = 1$$

Substituímos esse valor na segunda equação e a resolvemos também

$$1y - 2z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = 2z = 2$$

Agora resolvemos a primeira equação

$$x + y + z = 10 \qquad \Rightarrow \qquad x = 10 - y - z = 10 - 2 - 1 = 7$$

A solução do sistema é

$$x = 7 \qquad y = 2 \qquad z = 1$$

Exercícios Seção 2.5

Sistemas Lineares

1) Diga qual das equações abaixo são lineares

a) $x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 3$

b) $x_1 + mx_2 + x_3^2 = n$
onde m e n são constantes dadas

c) $x - 2y + 3z = 4$

d) $a_1x_1 + a_2x_2^2 + a_3x_3^3 = b$
onde a_i e b_i são constantes dadas

e) $2x_1 + \log(x_2) + x_3 = \log(2)$

f) $-x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 = 0$

g) $\sqrt{3}x_1 + \sqrt{2}x_2 + x_3 = 5$

h) $x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 10 - 2x_5$

i) $e^2x_1 + \log(4)x_2 = \sqrt{3}$

j) $x_1 + x_1x_2 = x_3$

2) Verifique se $(2{,}0,-3)$ é solução de

$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -2$$

3) Verifique se $(1{,}1,-1,-1)$ é solução de

$$5x_1 - 10x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$$

4) Encontre uma solução para a equação linear

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

diferente de (0,0,0)

5) Escreva os seguintes sistemas na forma matricial, considerando que a, b, c, d, e, f, m e n são constantes

a) $$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -x + 2y + 2z = 5 \\ 5x - y + 5z = 1 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} -t + 3x - 5y + 4z = 8 \\ 2x + y - 2z = -3 \\ -3t - x - 2y + z = 1 \\ 6t - 5x - y = 4 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ -mz + ny = e \\ abx - b^2 + mz = f \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} \sqrt{2}x - 3y + 2z = 7 \\ 7y - z = 0 \\ 4x + \sqrt{3}y + 2z = 5 \end{cases}$$

e) $$\begin{cases} ax - by + 2z = 1 \\ a^2 - by + z = 3 \end{cases}$$

f) $\begin{cases} x+y-\ \ z=3-t \\ -x-y-2z=1-3t \\ 5x \qquad +3z=7+t \end{cases}$

6) Verifique se $(0,-3,-4)$ é solução do sistema

$$\begin{cases} x+\ \ y-z=1 \\ 2x-\ \ y+z=-1 \\ x+2y+z=2 \end{cases}$$

7) Verifique se $(1{,}0,-2{,}1)$ é solução do sistema

$$\begin{cases} -4t+5x+3y-2z=5 \\ -5t+2x-4y+3z=-9 \\ 3t-\ \ x+2y-5z=12 \end{cases}$$

8) Encontre a solução do sistema $(A+4I_3)X=0$ sabendo que

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

9) Encontre os valores de a para os quais a matriz

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix}$$

possui inversa.

10) Sejam

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

encontre a solução do sistema $(A+4I_3)X=B$.

11) Resolva o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{2}{u}+\dfrac{3}{v}=8 \\ \dfrac{1}{u}-\dfrac{1}{v}=-1 \end{cases}$$

12) Os valores de x, y e z, solução do sistema

$$\begin{cases} x+2y+3z=14 \\ 4x+5y+6z=32 \\ 7x+8y+9z=a \end{cases}$$

formam, nesta ordem, uma P.A. de razão 1. Qual é o valor de a?

13) Resolva o sistema utilizando a regra de Cramer

$$\begin{cases} 4x-3y=11 \\ 2x+5y=-1 \end{cases}$$

14) Resolva o sistema a seguir utilizando a regra de Cramer

$$\begin{cases} 2x+\ \ y-z=5 \\ 3x-2y+z=-2 \\ x \qquad +z=0 \end{cases}$$

15) Discuta o sistema, em função dos valores do parâmetro real a.

$$\begin{cases} a^2x \qquad +y=1 \\ \qquad x+y=a \end{cases}$$

16) Discuta, por Cramer, o sistema

$$\begin{cases} 7x+y-\ \ 3z=10 \\ x+y+\ \ \ z=6 \\ 4x+y+Pz=Q \end{cases}$$

17) Encontre o valor de a para que o sistema seja possível.

$$\begin{cases} 2x-\ \ y+3z=a \\ x+2y-\ \ z=3 \\ 7x+4y+3z=13 \end{cases}$$

Para o valor encontrado de a, ache a solução geral do sistema, isto é, ache expressões que representem todas as soluções do sistema. Explicite duas dessas soluções.

18) Calcule o valor de m para que o sistema admita soluções diferentes da trivial

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ my+3x-z=0 \end{cases}$$

19) Sejam a, b e c números tais que

$$\begin{cases} a+2b=5 \\ b+2c=8 \\ 2a+c=5 \end{cases}$$

Determine o valor de $a+b+c$.

20) Calcule a e b de modo que o sistema a seguir seja indeterminado

$$\begin{cases} x+2y+2z=a \\ 3x+6y-4z=4 \\ by+2x-6z=1 \end{cases}$$

21) Resolva o sistema

$$\begin{cases} x+2y=b \\ -y+2z=b \\ az+x=b \end{cases}$$

para os casos

a) $a=0$ e $b=1$ b) $a=4$ e $b=0$

22) Ache os valores de $k \in \mathbb{R}$ de maneira que o sistema linear seja impossível.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \\ kz+x=0 \end{cases}$$

Método de Gauss

23) [resp] Resolva o sistema pelo método de Gauss

$$\begin{cases} x+3y=7 \\ 2x+y=4 \end{cases}$$

24) [resp] Resolva o sistema pelo método de Gauss

$$\begin{cases} 2x+y-2z=10 \\ 3x+2y+2z=1 \\ 5x+4y+3z=4 \end{cases}$$

25) [resp] Resolva o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} w+2x+y+z=1 \\ w+x+2y+z=2 \\ w+x+y+2z=3 \\ 2w+x+y+z=4 \end{cases}$$

26) [resp] Resolva o sistema pelo método de Gauss

$$\begin{cases} x-y-2z=1 \\ -x+y+z=2 \\ x-2y+z=-2 \end{cases}$$

27) [resp] Resolva o sistema pelo método de Gauss

$$\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ 3x+6y-3z=-2 \\ 6x+6y+3z=5 \end{cases}$$

28) [resp] Use método de Gauss para resolver o sistema linear $(A+2I)X=B$, onde

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

29) [resp] Resolva se possível o sistema pelo método de Gauss

$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x+y-z=2 \\ x+3y-2z=1 \end{cases}$$

30) [resp] Resolva se possível o sistema pelo método de Gauss

$$\begin{cases} x+3y-z=6 \\ 2x+4y+2z=9 \\ x+y+3z=1 \end{cases}$$

31) [resp] Resolva se possível o sistema pelo método de Gauss

$$\begin{cases} 3x+4y-z=1 \\ 4x+5y+2z=12 \\ x-2y+3z=8 \end{cases}$$

32) [resp] Resolva se possível o sistema pelo método de Gauss

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 5x + 3y - 4z = 2 \end{cases}$$

33) [resp] Resolva se possível o sistema pelo método de Gauss

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 6 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ 4x + 3y - 2z = 14 \end{cases}$$

34) [resp] Resolva se possível o sistema pelo método de Gauss

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ x - 2y - z = 1 \\ x + 4y + z = 2 \end{cases}$$

35) [resp] Resolva se possível o sistema pelo método de Gauss

$$\begin{cases} -x + y - 2z = 1 \\ 3t + 2x - y = 2 \\ -2t + x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

36) [resp] Resolva se possível o sistema pelo método de Gauss

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 5y + 4z = 4 \\ 5x + 3y + 4z = -10 \end{cases}$$

37) [resp] Resolva se possível o sistema pelo método de Gauss

$$\begin{cases} t + x + y - z = 1 \\ t + 3x - y - 2z = 2 \\ 2t - x - 2y + 3z = -1 \end{cases}$$

38) [resp] Resolva se possível o sistema pelo método de Gauss

$$\begin{cases} t + x + y + z = 1 \\ t + x - y + z = -1 \\ 2t + y - z = 2 \\ -t + 2x + z = -1 \end{cases}$$

39) [resp] Resolva se possível o sistema pelo método de Gauss

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 5 \\ -2x + 5y + 2z = 3 \\ -x + 3y - z = 2 \end{cases}$$

2.6 Revisão

Exercícios Seção 2.6

Revisão

1) Resolva a equação matricial $AX = B$, dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$$

Desafio

2) Determinar a inversa de cada uma das matrizes

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3) Calcule a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

4) Um aluno, ao inverter a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 4 & e & f \end{bmatrix} = [a_{ij}], \qquad 1 \leq i, j \leq 3$$

cometeu um engano, e considerou o elemento a_{31} igual a 3, de forma que acabou invertendo a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 3 & e & f \end{bmatrix} = [b_{ij}]$$

Com esse engano, o aluno encontrou

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 3 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Determinar A^{-1}.

5) Considere o sistema

$$\begin{cases} x - my & = 1 - m \\ (1+m)x + y & = 1 \end{cases}$$

a) Prove que o sistema admite solução única para cada número real m.

b) Determine m para que o valor de x seja o maior possível.

6) Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

calcule a sua inversa A^{-1}. A relação especial, que você deve ter observado ente A e A^{-1} acima, seria também encontrada se calculássemos as matrizes inversas de

a) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Generalize e demonstre o resultado observado.

7) Calcule a matriz inversa da matriz

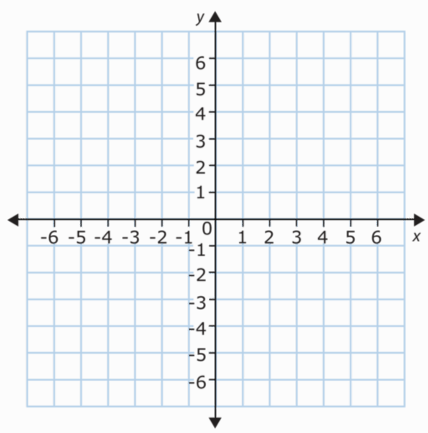
$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

3

Plano Cartesiano e Equações

3.1 Plano Cartesiano

Para identificar e localizar um ponto em um plano podemos usar o sistema de coordenadas Cartesiano. Posicionamos duas retas reais perpendiculares uma a outra, chamamos a horizontal de eixo **x** e a vertical de eixo **y**.
O ponto onde as retas se cruzam é chamado origem.
Qualquer ponto do plano é identificado pelo par ordenado (**x**,**y**).
O valor **x** é chamado abscissa e **y** é a ordenada.

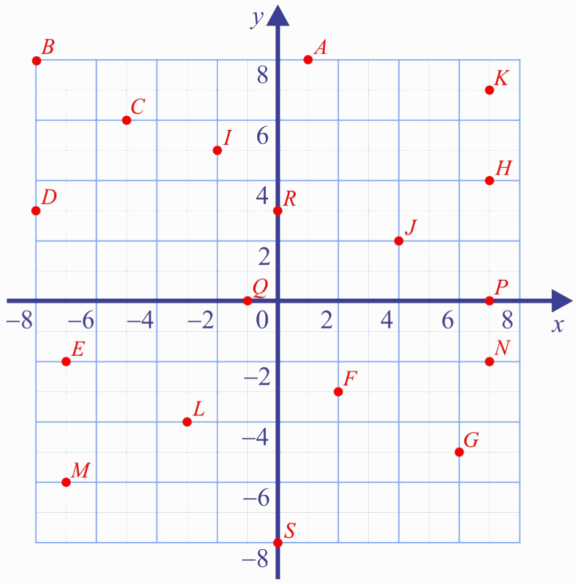


Exercícios Seção 3.1

Plano Cartesiano

1) [resp] Posicione os pontos (3,2), (4,1), $(-1,-1)$, $(^1/_2, ^3/_4)$ e (π, e) nos plano cartesiano.

2) [resp] Escreva os pares ordenados correspondentes aos pontos da figura abaixo.



3) [resp] Represente, no plano Cartesiano, os pontos (0,4), (1,0), (1,3), (5,1), (−2,0), (0, − 3), (3, − 4), (4, − 2), (−6,2), (−3, − 5) e (−4, − 1).

4) Se o ponto $P(x,y)$ está no segundo quadrante, quais são os sinais de x e y?

5) Exiba no plano Cartesiano as regiões definidas pelos conjuntos abaixo.

a) $\{(x,y) \ / \ x > -1/2\}$

b) $\{(x,y) \ / \ -3 \leq y \leq 0\}$

c) $\{(x,y) \ / \ y \geq 1{,}5\}$

d) $\{(x,y) \ / \ x = 3\}$

e) $\{(x,y) \ / \ -2 \leq x \leq 5\}$

f) $\{(x,y) \ / \ x \leq -1\}$

g) $\{(x,y) \ / \ y < 3/2\}$

h) $\{(x,y) \ / \ y = -2\}$

6) Exiba no plano Cartesiano as regiões definidas abaixo.

a) $x \geq 1$ e $y \geq 1$

b) $x \geq -1$ e $y \leq 2$

c) $-3 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq 3$

d) $-4 \leq x \leq 1$ e $y = 1$

7) Expresse o conjunto de pontos do primeiro quadrante usando desigualdades.

8) Verifique, por substituição, se os pontos abaixo pertencem ao gráfico da equação correspondente.

a) $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 12$, $(4, 10)$, $(-3, -9)$

b) $y = \sqrt{x^2 + 1}$, $(7, 5\sqrt{2})$, $(0, -1)$

c) $y = |3x - 8|$, $(-^1/_3, 7)$, $(^1/_3, 7)$

d) $y = \dfrac{1}{|x-2|} - \dfrac{1}{x-2}$, $(-^5/_2, 0)$, $(-6, -^1/_8)$

e) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{-x^3 + 2x^2 + 4}$, $(1, ^2/_3)$, $(2, 4)$

f) $y^2 + xy^2 - 9 = x^2 + 3xy - 13$, $(-2, 6)$, $(5, -1)$

9) [resp] Usando uma tabela de pares (x,y), trace o gráfico das equações abaixo, no intervalo especificado.

a) $y = -2x + 3$ $\quad x \in [-2, 3]$

b) $3y - 2x + 3 = 0$ $\quad x \in [-2, 4]$

c) $2y + x = 4$ $\quad x \in [-2, 6]$

d) $y = x^2 - 1$ $\quad x \in [-2, 2]$

e) $y = 2 - \dfrac{1}{2}x^2$ $\quad x \in [-3, 3]$

f) $y = -2x^2 + 4x$ $\quad x \in [-1, 3]$

g) $y = x^3 - x$ $\quad x \in [-2, 2]$

h) $y = \sqrt{x}$ $\quad x \in [0, 4]$

i) $y = \sqrt{x + 1}$ $\quad x \in [-1, 3]$

j) $y = 1/x$ $\quad x \in [-4, 4]$

k) $y = |x|$ $\quad x \in [-2, 2]$

l) $y = |x - 2|$ $\quad x \in [-1, 5]$

10) [resp] Determine os interceptos e trace o gráfico das equações abaixo.

a) $y = x - 1$

b) $y = x^2 + 2x - 3$

c) $y = 3 - x/2$

d) $y = -x^2 + 8x - 12$

e) $x = 3 + y$

f) $x = y^2 - 1$

g) $x = (y + 1)(y - 2)$

h) $x + y = 2$

11) [resp] Represente os pontos em um sistema de eixos coordenados.

a) $(-2, 5)$

b) $(3, -1)$

c) $(3, -4)$

d) $(8, -7/2)$

e) $(4{,}5; -4{,}5)$

3.2 Distância Entre pontos

Para definirmos a distância entre dois pontos A e B conhecendo suas coordenadas (x_A,y_A) e (x_B,y_B), usamos o teorema de Pitágoras em um triângulo definido com a hipotenusa ligando os pontos A e B e um cateto horizontal e outro vertical.

$$D^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \qquad \text{ou} \qquad D = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Também podemos usar a notação

$$\text{dist}(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

para indicar a distância entre os pontos A e B.

Exemplo 3.2.1: Calcule a distância entre os pontos (4,2) e (7,6).

$$\begin{aligned} D^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \\ &= (7-4)^2 + (6-2)^2 \\ &= 3^2 + 4^2 \\ &= 9 + 16 \\ &= 25 \end{aligned}$$

$$D = \sqrt{25} = 5$$

Exercícios Seção 3.2

Distância Entre Pontos

1) [resp] Calcule a distância entre os pontos:

a) $(4{,}1)$ e $(2{,}3)$

b) $(1{,}2)$ e $(-2,-4)$

c) $(-5,-2)$ e $(3,-2)$

d) $(-4{,}5)$ e $(1,-10)$

e) $(6{,}4)$ e $(-3{,}1)$

f) $(-3{,}4)$ e $(7{,}2)$

g) $(-2,-6)$ e $(-1{,}1)$

h) $(5,-2)$ e $(-9{,}5)$

2) [resp] Qual a distância entre esses pontos e a origem

a) $(4{,}1)$

b) $(-2,-4)$

c) $(-5,-2)$

d) $(1,-10)$

e) $(6{,}4)$

f) $(-3{,}4)$

g) $(-1{,}1)$

h) $(5,-2)$

3) [resp] Qual a distância de cada ponto ao ponto $(-1{,}1)$

a) $(4{,}1)$

b) $(-2,-4)$

c) $(-5,-2)$

d) $(1,-10)$

e) $(6{,}4)$

f) $(-3{,}4)$

g) $(5,-2)$

4) [resp] Determine a distância entre os pontos dados.

a) $(1,3)$ e $(4{,}7)$

b) $(-1{,}3)$ e $(4{,}9)$

5) Determine as coordenadas dos pontos que se encontram a 10 unidades da origem e têm coordenada y igual a -6.

6) Determine as coordenadas dos pontos que se encontram a 5 unidades da origem e têm coordenada x igual a 3.

7) Mostre que os pontos $(3,\,4)$, $(-3,\,7)$, $(-6,\,1)$ e $(0,\,-2)$ formam os vértices de um quadrado. Dica: *Lembre das propriedades dos lados e das diagonais de um quadrado.*

8) Mostre que o triângulo com vértices $(-5,\,2)$, $(-2,\,5)$ e $(5,\,-2)$ é um triângulo retângulo. Dica: *Lembre da relação que vale para todo triângulo retângulo.*

9) Calcule a distância entre os pontos $A(a-3,b+4)$ e $B(a+2,b-8)$.

10) Calcule o perímetro do triângulo ABC, sendo dados $A(2{,}1)$, $B(-1{,}3)$ e $C(4,-2)$.

11) Determine x de modo que o triângulo ABC seja retângulo em B, sendo dado que $A(4{,}5)$, $B(1{,}1)$ e $C(x{,}4)$.

12) [resp] Se $P(x{,}y)$ está a mesma distância de $A(-3{,}7)$ e $B(4{,}3)$, qual a relação entre x e y?

13) Dados $A(x{,}5)$, $B(-2{,}3)$ e $C(4{,}1)$ obtenha x de modo que A esteja a mesma distância de B e de C.

14) Dados $(-2{,}4)$ e $(3,-1)$ vértices consecutivos de um quadrado determine os outros dois vértices.

3.3 Equação da Circunferência

Quando resolvemos uma equação queremos todas as soluções possível. Encontrar apenas uma solução em geral não é suficiente.

Equação do Círculo ou Circunferência

Definimos uma circunferência como o conjunto de todos os pontos que estão a uma distância definida (raio) de um ponto dado (centro).

Dado um ponto $C = (x_0, y_0)$ e uma número positivo r os pontos $P = (x, y)$ que pertencem a circunferência de raio r e centro em C obedecem a relação

$$\text{dist}(\,P, C\,) = r$$

isso é, dado um ponto $C = (x_0, y_0)$ e uma número positivo r a equação da circunferência de raio r e centro em C é

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Todo os pontos P que satisfizerem essa equação estão na circunferência.

Exercícios Seção 3.3

Equação da Circunferência

1) [resp] Determine a equação da circunferência que possui centro em $C(3{,}6)$ e raio 4.

2) Determine a equação da circunferência com raio 2 e centro em $(-1{,}3)$ e esboce a circunferência.

3) Verifique se os pontos $(6{,}1)$, $(4{,}5)$, $(0{,}5)$, $(5{,}1)$ e $(-2, -3)$ estão dentro, fora ou sobre a circunferência de raio 5 e centro $(1{,}1)$. Esboce a circunferência e os pontos.

4) Qual a equação da circunferência de raio 4 cujo centro é a intersecção das retas

$$x - 2y + 1 = 0 \quad \text{e} \quad x + y - 2 = 0$$

5) [resp] Determine as equações do círculo que satisfazem as condições dadas.

a) Raio 5 e centro $(2,\ -3)$

b) Raio 3 e centro $(-2,\ -4)$

c) Raio 5 e centro na origem

d) Centro $(2,\ -3)$ e passando por $(5,\ 2)$

e) Centro $(-a,\ a)$ e raio $2a$

6) Determine os coeficientes a, b e c da equação do círculo, $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, que passa pelos pontos $P_1 = (-2{,}7)$, $P_2 = (-4{,}5)$ e $P_3 = (4, -3)$.

7) Construa a equação da circunferência inscrita no quadrado de vértices $(1{,}1)$, $(3{,}1)$, $(3{,}3)$ e $(1{,}3)$.

8) [resp] O centro de uma circunferência é determinado pelo ponto médio do segmento PQ, sendo $P(4{,}6)$ e $Q(2{,}10)$. Considerando que o raio dessa circunferência é 7, determine sua equação.

9) [resp] O ponto $P(3{,}b)$ pertence à circunferência de centro no ponto $C(0{,}3)$ e raio 5. Calcule valor da coordenada b.

10) [resp] Determine a equação da circunferência com centro no ponto $C(2{,}1)$ e que passa pelo ponto $A(1{,}1)$.

11) [resp] Determine a equação da circunferência de centro C e raio r

a) $C(0{,}0)$ $\quad r = 3$

b) $C(2{,}0)$ $\quad r = 4$

c) $C(-1, -2)$ $\quad r = 5$

d) $C(2{,}4)$ $\quad r = 1$

e) $C(0, -3)$ $r = 2$

f) $C(1/2, 3/2)$ $r = 4$

12) Qual é a equação da circunferência de centro $C(1,2)$ que passa por $P(5,5)$?

13) [resp] Determine o centro e o raio das seguintes circunferências

a) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 36$

b) $(x+2)^2 + y^2 - 9 = 0$

c) $y^2 = 16 - x^2$

d) $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$

e) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$

14) Esboce as regiões determinadas pelas inequações

a) $x^2 + y^2 \leq 9$

b) $x^2 + y^2 \geq 4$

c) $(x-1)^2 + (1+y)^2 < 9$

d) $1 < (2+x)^2 + y^2 < 4$

3.4 Equação da Reta

Declividade de uma reta

Dados dois pontos $A = (x_a,y_a)$ e $B = (x_b,y_b)$ que pertencem a uma reta r a declividade desta reta é

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

Não importa que pontos são escolhidos a declividade da reta é sempre a mesma.

Se a reta for horizontal $\Delta y = y_b - y_a = 0$ a declividade é nula.
Se a reta for vertical $\Delta x = x_b - x_a = 0$ a declividade não existe.

Equação da reta

A equação de uma reta vertical (m não existe) é

$$x = a$$

A equação de uma reta horizontal ($m = 0$) é

$$y = b$$

A equação de uma reta com declividade m que passa pelo ponto (a,b) é

$$m = \frac{y - b}{x - a} \qquad \text{ou equivalentemente} \qquad y = b + m(x - a)$$

Escrevendo essa equação de forma resumida temos a equação reduzida da reta

$$y = mx + c$$

Equação geral da reta

Qualquer reta pode ser descrita pela equação

$$Ax + By + C = 0$$

Exercícios Seção 3.4

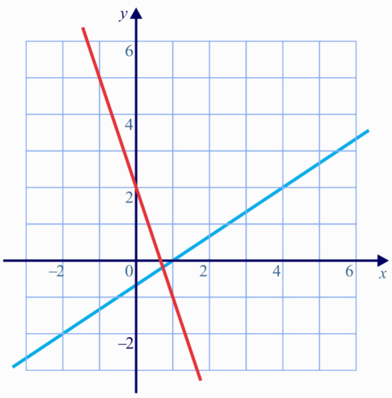
Equação da Reta

1) Encontre a equação da reta que passa pelo ponto (1,3) com declividade 2. Esboce seu gráfico e verifique se os pontos (2,6), (0,0) e $(-1,1)$ pertencem a reta.

2) Esboce o gráfico da equação $3x - 4y = 24$.

3) Dado que o ponto $(2,-3)$ pertence a reta $-2x + ky + 10 = 0$, determine o valor de k.

4) Encontre as inclinações das retas mostradas na figura abaixo.



5) [resp] Determine as inclinações das retas que passam pelos pares de ponto abaixo.

a) (4,1) e (2,3)

b) (1,2) e $(-2,-4)$

c) $(-5,-2)$ e $(3,-2)$

d) $(-4,5)$ e $(1,-10)$

e) (6,4) e $(-3,1)$

f) $(-3,4)$ e (7,2)

g) $(-2,-6)$ e $(-1,1)$

h) $(5,-2)$ e $(-9,5)$

6) [resp] Escreva as equações das retas definidas pelas inclinações e interceptos abaixo.

a) Intercepto-y: -1; inclinação: $^4/_5$

b) Intercepto-y: 2; inclinação: $^{-3}/_4$

c) Intercepto-y: 4; inclinação: -3

d) Intercepto-y: -3; inclinação: $^1/_3$

e) Intercepto-y: $^1/_2$; inclinação: 2

f) Intercepto-y: 0; inclinação: -1

7) [resp] Determine as equações das retas que satisfazem as condições indicadas. Em seguida, trace seus gráficos.

a) Passa por (2,-1) e tem inclinação 3

b) Passa por (1,5) e tem inclinação -3

c) Passa por (-2,1) e tem inclinação $^1/_3$

d) Passa por (6,-4) e tem inclinação $^{-1}/_3$

e) Passa por (-4,8) e tem inclinação -2

f) Passa por (-3,-2) e tem inclinação $^3/_2$

8) Escreva a equação reduzida da reta r que passa pelos pontos $A(-1,1)$ e $B(7,25)$.

9) [resp] Escreva a equação geral das retas que passam pelos pontos

a) $(-2{,}0)$ $(3{,}0)$

b) $(0,-1)$ $(2{,}0)$

c) $(-4/3{,}0)$ $(0,-2)$

10) Encontre as equações das retas que satisfazem as condições indicadas.

a) Passa por (-1,-3) e intercepta o eixo-y na ordenada 1

b) Passa por (1,2) e por (2,1)

c) Passa por (4,-2) e por (-3,-2)

d) Intercepta o eixo-y na ordenada 3 e o eixo-x na abscissa -2

e) Intercepta o eixo-y na ordenada 2 e o eixo-x na abscissa 1

f) Passa por (-2,-6) e intercepta o eixo-x na abscissa 10

g) Passa por (-6,4) e por (2,-1)

h) Passa por (-2,8) e por (3,4)

i) Passa por (-5,0) e por (0,-5)

j) Passa por (3,14) e por (-4,-28)

k) Passa por (-1,2 1) e por (2,19)

l) Passa por (3,5;-0,6) e por (-2;2,7)

11) Encontre a reta definida pelos pontos $A\left(7/2, 5/2\right)$ e $B\left(-5/2, -7/7\right)$.

12) A reta determinada por $A(a{,}0)$ e $B(0{,}b)$ passa por $C(3{,}4)$. Qual a relação entre a e b?

13) A reta determinada por $A(q{,}q)$ e $B(3,-2)$ passa pela origem. Qual a relação entre p e q?

14) Desenhe no plano cartesiano as retas cujas equações são

a) $y = 2x$

b) $x + y + 3 = 0$

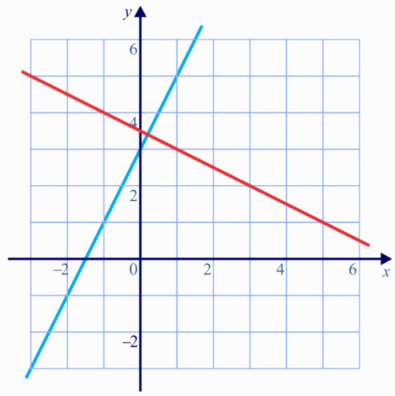
c) $x + y = 5$

d) $2y + x = 0$

e) $x - y + 5 = 0$

f) $x - y - 4 = 0$

15) Determine as equações das retas mostradas na figura abaixo.



16) Trace os gráficos das equações abaixo.

a) $y = -\dfrac{2}{3}x + 1$

b) $y = 5x - 2$

c) $y = -2x$

d) $y = 4$

e) $x - y = -3$

f) $3y - x + 4 = 0$

17) Encontre as equações das retas que satisfazem as condições abaixo. Em seguida, trace os gráficos correspondentes.

a) Passa por (-2,1) e (-2, 5).

b) Passa por (-7,8) e (10, 8).

c) Reta vertical que passa por (3,-1).

d) Reta horizontal que passa por (6,-4).

18) Dados os pontos $A(-1{,}2)$ e $B(3,-1)$

a) Marque os pontos no plano Cartesiano, considerando as abscissas no intervalo $[-3{,}5]$ e as ordenadas em $[-2,3]$.

b) Determine a equação da reta que passa pelos pontos. Trace essa reta no gráfico.

c) Determine a ordenada do ponto dessa reta no qual a abscissa vale 1.

d) Determine a abscissa do ponto da reta que tem ordenada 0.

3.5 A Reta Tangente

A Reta Tangente a uma Circunferência A reta tangente a uma circunferência é a reta que toca a circunferência em um único ponto.

A Reta Tangente a uma Curva A reta tangente a uma curva qualquer é a reta que "apenas toca" a curva em um ponto.

3.6 Posição Relativa de Retas

Posição relativa de retas

Paralelas As retas nunca se encontram

Concorretes As retas se encontram um um ponto

Perpendiculares As retas são concorrentes e fazem um ângulo reto ($90°$) entre elas

Retas Paralelas

Duas retas, r e s, são paralelas, se e somente se, suas declividades são iguais

$$m_r = m_s$$

ou ambas as retas são verticais (a declividade não existe). Se r é paralela a s escrevemos $r \mathbin{/\!/} s$.

Retas Perpendiculares

Duas retas, r e s, são perpendiculares, se e somente se, suas declividades obedecem a relação

$$m_r = -\frac{1}{m_s}$$

ou uma reta é vertical e a outra horizontal. Se r é perpendicular a s escrevemos $r \perp s$.

Interseção Entre Retas

Duas retas concorrentes tem um ponto em comum, esse ponto satisfaz as equações de ambas as retas. Assim, para encontrarmos esse ponto basta resolvermos o sistema de equações lineares composto de ambas as equações de reta. Por exemplo se queremos encontrar o ponto de interseção entre as retas $r\colon a_r x + b_r y + c_r = 0$ e $s\colon a_s x + b_s y + c_s = 0$ devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} a_r x + b_r y + c_r = 0 \\ a_s x + b_s y + c_s = 0 \end{cases}$$

Se desejarmos podemos escrever esse sistema na sua forma matricial $AX = B$

$$\begin{bmatrix} a_r & b_r \\ a_s & b_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_r \\ -c_s \end{bmatrix}$$

Dessa forma podemos usar o determinante da matriz A para verificarmos se as retas possuem ou não um ponto em comum.

Exercícios Seção 3.6

Posição Relativa de Retas

1) Se a reta que passa pelos pontos $(1,a)$ e $(4,-2)$ é paralela a reta que passa pelos pontos $(2,8)$ e $(-7,a+4)$ qual o valor de a?

2) Determinar o ponto onde as retas $3y + 3x - 2 = 0$ e $3y - x = 1$ se cruzam.

3) Encontre uma equação para a reta que passa pelo ponto $(2, 3)$ e é paralela à reta com equação $3x + 4y - 8 = 0$.

4) Encontre uma equação para a reta que passa pelo ponto $(-1, 3)$ e é paralela à reta que passa pelos pontos $(-3, 4)$ e $(2, 1)$.

5) Encontre uma equação para a reta que passa pelo ponto $(-2,-4)$ e é perpendicular à reta com equação $2x - 3y - 24 = 0$.

6) Encontre uma equação para a reta que passa pelo ponto $(-2,-4)$ e é perpendicular à reta com equação $2x - 3y - 24 = 0$.

7) Construa a equação da reta s que passa pelo ponto $(1,-1)$ e é perpendicular a reta r, definida pela equação $2y = x + 4$.

8) Determine a interseção entre as retas $x + 2y = 3$ e $2x + 3y = 5$.

9) Mostrar que as retas $2x + 3y - 1 = 0$, $x + y = 0$ e $3x + 4y - 1 = 0$ se encontram no mesmo ponto.

3.7 Revisão

1) Qual a equação da circunferência de raio 3 cujo centro é a intersecção das retas $x - 2y + 1 = 0$ e $x + y - 2 = 0$.

2) Construa a equação da reta s que passa pelo ponto $(2, -2)$ e é perpendicular a reta r, definida pela equação $2y = x + 4$.

3) Dada a circunferência c definida pela equação $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$, construa as retas r e s tangentes a circunferência nos pontos $(4, -1)$ e (1,2), respectivamente. Qual o ponto de intersecção das retas r e s? (Dica: esboce a circunferência e as retas.)

4) Dada a circunferência c definida pela equação $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$, construa as retas r e s tangentes a circunferência nos pontos $(-1, -1)$ e (1,3), respectivamente. Qual o ponto de intersecção das retas r e s?

5) Dada a circunferência c definida pela equação $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$, construa as retas r e s tangentes a circunferência nos pontos $(-1, -1)$ e $(1, -3)$, respectivamente. Qual a distância do ponto de intersecção das retas r e s até o centro da circunferência?

6) Sejam

i. a circunferência u dada por

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

ii. a circunferência v dada por

$$(x + 2)^2 = 9 - y^2$$

iii. a reta r que passa pelos pontos

$$(0, -3) \quad \text{e } (3, -1)$$

iv. a reta s dada pela equação

$$2y + 3x = 5$$

a) Ilustre as formas geométricas definidas.

b) Calcule a distância entre os centros das circunferências u e v.

c) Escreva a equação da reta a que passa pelos centros das circunferências u e v.

d) Qual a declividade da reta a?

e) Qual a equação da reta r?

f) Qual a relação entre a reta r e a reta a (elas são paralelas, concorrentes, perpendiculares)?

g) Escreva a equação da circunferência com centro na origem e que passe pelo centro da circunferência u.

h) Escreva a equação da reta paralela a reta r que passa pela origem.

7) Encontre uma equação para a reta L que passa pelo ponto $(-2, 4)$ e satisfaz a condição dada.

a) L é uma reta vertical.

b) L é uma reta horizontal.

c) L passa pelo ponto $(3, 7/2)$.

d) A intersecção x de L é 3.

e) L é paralela à reta $5x - 2y = 6$.

f) L é perpendicular à reta $4x + 3y = 6$.

8) Sabendo que formula para calcular a distância entre uma reta, $r\colon ax + by + c = 0$, e um ponto, $P(x_0, y_0)$, é

$$d(r,P) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Calcule a distância entre a reta e o ponto dados

a) $r\colon 3x + 4y + 2 = 0$ $\quad P(-1, 1)$

b) $r\colon x + y - 1 = 0$ $\quad P(2, 1)$

c) $r\colon y = 2x + 1$ $\quad P(0, -1)$

d) $r\colon y = x$ $\quad P(0, 1)$

9) Sabemos que a reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao seu raio. Usando essa informação, calcule a equação da reta tangente a circunferência $x^2 + y^2 - 25 = 0$ que passa pelo ponto (3,4).

10) Determine se as afirmações dadas são verdadeiras ou falsas. Se verdadeiras, explique porquê. Se falsas, justifique através de um exemplo.

a) O ponto $(-a, -b)$ é simétrico ao ponto (a, b) em relação à origem.

b) Se a distância entre os pontos $P_1(a, b)$ e $P_2(c, d)$ é D, então a distância entre os pontos $P_1(a, b)$ e $P_3(kc, kd)$, $(k \neq 0)$, é dada por $|k|D$.

c) O círculo com equação $kx^2 + ky^2 = a^2$ situa-se dentro do círculo com equação $x^2 + y^2 = a^2$, desde que $k > 1$.

d) Sejam (x_1, y_1) e (x_2, y_2) dois pontos no plano xy. Mostre que a distância entre os dois pontos é dada por

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

11) [resp] Determine o perímetro do triângulo ABC que é descrito as seguintes condições

a) O vértice A pertence ao eixo-x

b) O vértice B pertence ao eixo-y

c) A reta que contêm BC tem equação $x - y = 0$

d) A reta que contêm AC tem equação $x + 2y - 3 = 0$

12) Determine a posição relativa de cada par de retas

a) $2x - y + 3 = 0$ $\quad 4x - 2y = -6$

b) $2x - y + 5 = 0$ $\quad 3x - 6y = -3$

c) $x - 2y + 3 = 0$ $\quad 2x + 4y + 3 = 0$

d) $2x - y + 3 = 0$ $\quad 4x - 2y + 10 = 0$

e) $2x + 4y + 3 = 0$ $\quad 4x - 2y = -6$

13) Para quais valores de k as retas $(k - 1)x + 6y + 1 = 0$ e $4x + (k + 1)y - 1 = 0$ são paralelas?

14) Ache a equação da reta que passa pelo centro da circunferência $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 8$ e é perpendicular à reta $x - y - 16 = 0$.

15) Um quadrado tem vértices consecutivos $A(5,0)$ e $B(-1,0)$. Determine as equações das circunferências inscrita e circunscrita ao quadrado.

16) Encontre a região do plano cujos pontos $P(x,y)$ satisfazem as relações $x + y \leq 2$ e $x^2 + y^2 \leq 16$, esboce essa região.

17) Resolva os sistemas de inequações

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ x + y \leq 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x + y \geq 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ (x - 1)^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 16 \end{cases}$

18) Sejam os conjuntos

$$A = \{(x,y) \ / \ x^2 + y^2 \leq 25\}$$
$$B = \{(x,y) \ / \ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 16\}$$

Determine

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $A - B$

d) $B - A$

19) Encontre os pontos onde a circunferência $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 29$ encontra o eixo-x.

20) Encontre os pontos onde a circunferência $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 26$ encontra o eixo-y.

Desafio

21) Se r e s são retas paralelas e $AX = B$ é o sistema linear construído para calcular o ponto de interseção entre elas, determine det A.

4

Funções

Nesse capítulo apresentamos a definição de funções suas principais propriedades e uma lista das funções reais mais comuns. A partir desse ponto todas as atividades empregarão funções.

4.1 Definição de Função

Definição de Função

Uma função f é uma relação que associa a cada elemento x de um conjunto D, chamado domínio, um único elemento $y = f(x)$ de um conjunto C. Usamos a seguinte notação para indicar o domínio e contradomínio de uma função

$$f : D \to C$$

Exemplo 4.1.1: Os preços dos produtos de uma loja são uma função.

Os itens a venda são compõem o domínio e os valores são o contradomínio.

A forma como os valores são atribuídos para cada idem não é importante. O valor pode ser determinado por uma tabela onde o vendedor escolhe o preço de cada idem de forma arbitrária, ou pode existir uma regra para calcular o preço a partir do peso ou comprimento do item comprado.

O que jamais pode acontecer é um produto a venda não possuir um preço ou possuir dois preços diferentes. Esses dois casos geram problemas e são proibidos na definição de funções.

Exemplo 4.1.2: Quantidade de chuva precipitada em uma região a cada dia.

Note que nesse exemplo só podemos saber o valor da função, isso é, a quantidade de chuva, nos dias em que fizemos a medição. Mas o valor existe para todos os dias, sendo zero para dias sem chuva e algum valor que desconhecemos para os dias chuvosos.

O fato de não sabermos a quantidade de chuvas em um determinado dia não muda o fato de que esse valor existe e é bem determinado.

Note que não é necessário que exista uma formula matemática para calcular o valor da função. O que é necessário é que exista um único elemento no contradomínio para cada elemento do domínio.

Esses elementos não precisam nem mesmo ser valores numéricos. Porém, aqui estamos interessados em funções reais, isso é funções que recebem um número real e retornam um número real

$$f\colon D \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Seja D o domínio e C o contradomínio de uma função f, que associa a $x \in D$ um valor $y \in C$. Nesse caso,

1. Todo elemento de D deve estar associado a um elemento de C, ou seja, f deve estar definida para todo elemento x do domínio D.

2. Nem todo elemento de C precisa estar associado a um elemento de D.
3. Um elemento de D não pode estar associado a dois elementos de C, ou seja, a função não pode fornecer dois valores de y para um único de x.
4. Um elemento de C pode estar associado a mais de um elemento de D, ou seja, dois valores de x podem estar associados a um mesmo y.

Observe que f é o nome da função e $f(x)$ é o valor que a função associa a x.

Conjunto imagem

Dada uma função f, com domínio D, denominamos conjunto imagem (ou simplesmente Im) o conjunto de todos os valores $f(x)$ obtidos a partir de $x \in D$.

Exercícios Seção 4.1

Definição de Função

1) [resp] Seja f a função definida por

$$f(x) = 5x + 6$$

Calcule $f(3)$, $f(-3)$, $f(a)$, $f(-a)$ e $f(a+3)$.

2) [resp] Seja g a função definida por

$$g(x) = 3x^2 - 6x - 3$$

Calcule $g(0)$, $g(-1)$, $g(a)$, $g(-a)$ e $g(a+1)$.

3) [resp] Seja h a função definida por

$$h(x) = x^3 - x^2 + x + 1$$

Calcule $h(-5)$, $h(0)$, $h(a)$ e $h(-a)$.

4) [resp] Seja s a função definida por

$$s(t) = \frac{2t}{t^2 - 1}$$

Calcule $s(4)$, $s(0)$, $s(a)$, $s(2+a)$ e $s(t+1)$.

5) [resp] Seja f a função definida por

$$f(x) = 2 + 2\sqrt{5 - x}$$

Calcule $f(-4)$, $f(1)$, $f(^{11}/_{4})$ e $f(x+5)$.

6) [resp] Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Calcule $f(-2)$, $f(0)$ e $f(1)$.

7) [resp] Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 3, & \text{se } x < 1 \\ 2x^2 + 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Calcule $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ e $f(2)$.

8) [resp] Determine se o ponto dado pertence ao gráfico da função

a) $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ $\quad (2, \sqrt{3})$

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+7}} + 2$ $\quad (3, 3)$

c) $f(t) = \dfrac{|t-1|}{t+1}$ $\quad (-2, -3)$

9) [resp] Determine o domínio de cada função

a) $f(x) = x^2 + 3$

b) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

d) $f(x) = \sqrt{5-x}$

e) $f(x) = \sqrt{2x^2+3}$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x-2}$

h) $f(x) = (x+3)^{3/2}$

i) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{x^2-4}$

j) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{(x+2)(x-3)}$

10) [resp] Dada a função f definida pela fórmula

$$f(x) = 2x^2 + 1$$

determine

a) $f(1)$

b) $f(0)$

c) $f(-1)$

d) $f(\sqrt{2})$

e) $f(-\sqrt{2})$

f) $f(u+v)$

11) [resp] Calcule as funções nos pontos indicados.

a) $f(x) = -2(x+1)$
$f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(a)$ e $f(-a)$

b) $g(y) = 3(y-2)^2$
$g(-2)$, $g(-1)$, $g(0)$, $g(1)$ e $g(2)$

c) $h(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$
$h(0)$, $h(-2)$, $h(1/2)$, $h(a)$ e $h(a-1)$

d) $f(w) = w - \dfrac{2}{w}$
$f(-1)$, $f(1/2)$, $f(x)$, $f(1/x)$ e $f(2z)$

e) $f(y) = \dfrac{1}{y^2}$
$f(-1)$, $f(3)$, $f(1/5)$, $f(2x)$ e $f(1/x^2)$

f) $f(y) = \sqrt{y-5} + 5$
$f(5)$, $f(9)$, $f(45/4)$ e $f(x+5)$

g) $f(y) = \dfrac{1}{1+\sqrt{y}}$
$f(0)$, $f(4)$, $f(1/4)$, $f(9x)$ e $f(x-1)$

h) $f(y) = \dfrac{|4-y|}{y}$
$f(-1)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(x+2)$ e $f(4-x)$

12) [resp] Verifique algebricamente se as equações abaixo permitem a definição de y como uma função de x.

a) $12 - 2y = 0$

b) $x^2 - y + 9 = 0$

c) $x - y^2 + 4 = 0$

d) $\sqrt{x-2} + y = 3$

e) $(x-3)^2 + y = x^2$

f) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

g) $y - 2 = 0$

h) $y^3 - x = 0$

i) $|2x-3| + y = 0$

j) $|y| = x + 5$

13) [resp] Determine o domínio das funções.

a) $f(x) = 3x + 2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{2x+5}$

d) $g(x) = \sqrt{x+9}$

e) $f(x) = \sqrt{5-2x}$

f) $f(x) = \sqrt{4x-3}$

g) $p(x) = \sqrt[3]{x-2}$

h) $f(x) = \dfrac{5x}{5x-13}$

i) $g(x) = \dfrac{3x+1}{4x+6}$

j) $h(x) = \dfrac{1}{2x-1}$

k) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3-x}}{x+1}$

l) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-5x}}{x^2+4}$

m) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-3}$

n) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{2x-7}}$

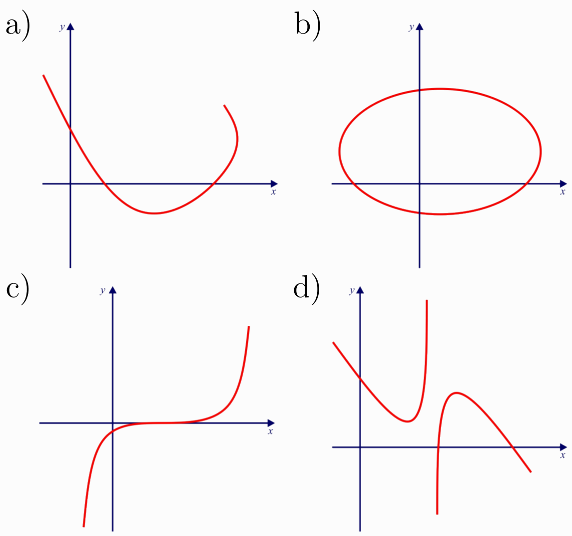
o) $f(x) = \dfrac{1}{|x|-6}$

p) $f(x) = \dfrac{1}{|x-4|+2}$

q) $f(x) = \sqrt{16-x^2}$

r) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$

14) [resp] Usando o teste da reta vertical, indique quais gráficos representam funções.



15) [resp] Esboce o gráfico de cada uma das funções abaixo com base em uma tabela de valores da função em pontos que você escolheu.

a) $f(x) = 5$

b) $f(x) = 2x + 1$

c) $f(X) = -\dfrac{x^2}{2} + 2$

d) $f(X) = 2\sqrt{x}$

16) [resp] Calcule $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ para as funções e os valores de a fornecidos abaixo. Simplifique os resultados e suponha sempre que os denominadores são diferentes de zero.

a) $f(x) = 3x + 4, \qquad a = 2$

b) $f(x) = x^2 + 6, \qquad a = 4$

17) [resp] Calcule

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

para as funções e os valores de a fornecidos abaixo. Simplifique os resultados e suponha sempre que os denominadores são diferentes de zero.

a) $f(x) = 2x - 5, \quad a = 6$

b) $f(x) = x^2 - 3x, \quad a = 1$

18) Define-se como ponto fixo de uma função f o número real x tal que $f(x) = x$. Seja dada a função

$$f(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{2}} + 1$$

a) Calcule os pontos fixos de $f(x)$.

b) Trace o gráfico da função f e o gráfico de $g(x) = x$, indicando os pontos calculados no item (a).

19) [resp] Esboce o gráfico e determine o domínio e a imagem da função

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = \sqrt{-x}$

c) $f(x) = \sqrt{x+1}$

d) $f(x) = \sqrt{x-1}$

e) $f(x) = \sqrt{1-x}$

f) $g(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{se } x < 0 \\ x^2 - 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$

20) [resp] Determine os interceptos das funções

a) $y = -2x + 3$ b) $y = 3 - x^2$

4.2 Gráficos

Gráfico de Uma Função

O gráfico de uma função f é o conjunto de todos os pontos (x,y) no plano xy tal que x está no domínio de f e $y = f(x)$.

Teste da reta vertical

Um gráfico no plano Cartesiano representa uma função se, e somente se, nenhuma reta vertical o intercepta mais de uma vez.

Interceptos

Intercepto-x ou Raiz é a coordenada x onde o gráfico cruza o eixo-x.
Para encontrá-lo fazemos $y = 0$ e resolvemos a equação resultante.

Intercepto-y é a coordenada y onde o gráfico cruza o eixo-y.
Para encontrá-lo avaliamos a função em $x = 0$, isso é, $y = f(0)$.

Funções pares e ímpares

Uma função f é par se seu gráfico é simétrico com relação ao eixo-y, isto é, se

$$f(-x) = f(x)$$

para todo x no domínio de f.

Uma função f é ímpar se seu gráfico é simétrico com relação à origem, isto é, se

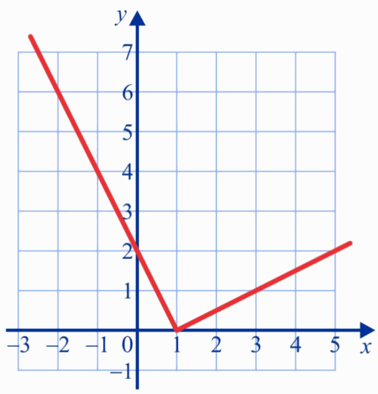
$$f(-x) = -f(x)$$

para todo x no domínio de f.

Exercícios Seção 4.2

Gráficos

1) [resp] O gráfico de uma função f é mostrado abaixo. Com base no gráfico, determine



a) os valores de $f(-2)$, $f(0)$ e $f(4)$;

b) o conjunto imagem de f;

c) os pontos em que $f(x) = 2$;

d) os pontos em que $f(x) < 1$;

e) os pontos de máximo e mínimo local;

f) os intervalos de crescimento e decrescimento.

2) Seja f a função definida pela regra

$$f(x) = x^2 - x - 6$$

a) Determine o domínio de f.

b) Calcule $f(x)$ para $x = -3, -2, -1, 0, 1/2, 1, 2, 3$

c) Use os resultados obtidos nos itens anteriores para esboçar o gráfico de f.

3) Seja f a função definida pela regra

$$f(x) = 2x^2 + x - 3$$

a) Determine o domínio de f.

b) Calcule $f(x)$ para $x = -3, -2, -1, 0, 1/2, 1, 2, 3$

c) Use os resultados obtidos nos itens anteriores para esboçar o gráfico de f.

4) Esboce o gráfico de cada função dada. Determine o domínio e a imagem da função

a) $f(x) = 2x^2 + 1$

b) $f(x) = 2 + \sqrt{x}$

c) $g(x) = 4 - \sqrt{x}$

d) $f(x) = \sqrt{1 - x}$

e) $f(x) = |x| - 1$

f) $f(x) = |x| + 1$

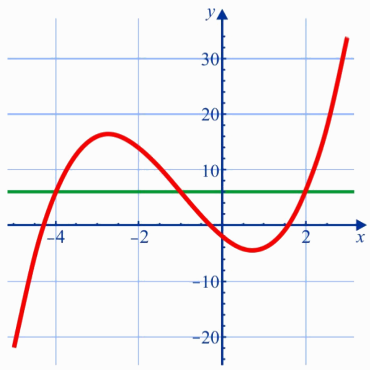
g) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 0 \\ 2x + 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} -x + 1, & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 - 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

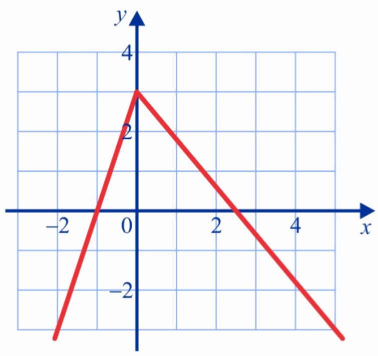
5) A figura abaixo mostra o gráfico de

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 2$$

e a reta $y = 6$. A partir do gráfico, indique as soluções de $f(x) \geq 6$.



6) O gráfico de uma função f é mostrado abaixo. Com base no gráfico, determine



a) o conjunto imagem de f;

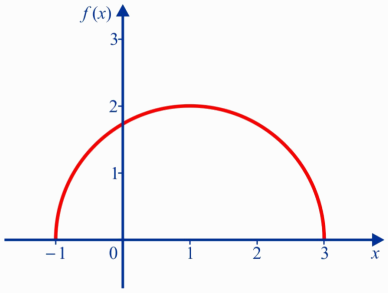
b) os zeros de f;

c) os pontos em que $-3 \leq f(x) \leq 0$;

d) os pontos de máximo e mínimo local;

e) os intervalos de crescimento e decrescimento.

7) O gráfico da função $f(x) = \sqrt{-x2 + 2x + 3}$ é mostrado abaixo. Com base no gráfico, determine



a) os valores de $f(0)$, $f(0{,}5)$ e $f(2)$;

b) o domínio de f;

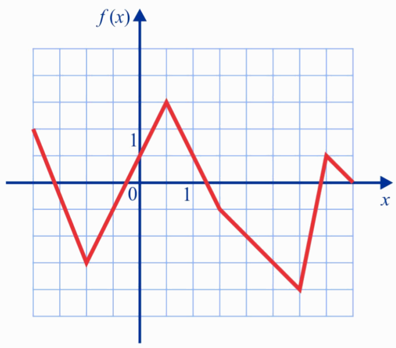
c) o conjunto imagem de f;

d) os zeros de f;

e) os intervalos de crescimento e decrescimento;

f) os pontos de máximo e mínimo local.

8) Dada a função f cujo gráfico é representado abaixo, determine, para o domínio especificado,



a) os valores de $f(-1)$, $f(2)$ e $f(3)$;

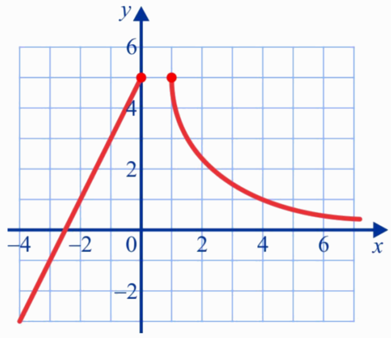
b) os valores de x para os quais $f(x) = -0{,}5$;

c) os valores de x para os quais $f(x) < -1$;

d) os intervalos em que f é crescente e decrescente;

e) os pontos de máximo e mínimo local de f e os valores da função nesses pontos.

9) O gráfico de uma função f é mostrado abaixo. Com base no gráfico, determine



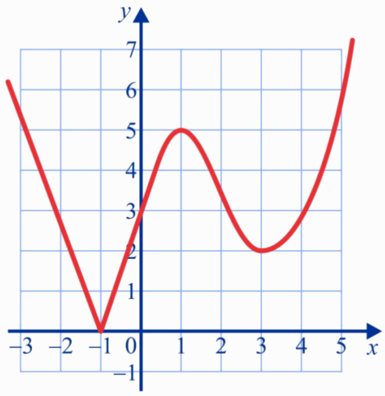
a) o domínio de f;

b) o conjunto imagem de f;

c) os pontos em que $f(x) \geq 1$;

d) os intervalos de crescimento e decrescimento.

10) O gráfico da função f é mostrado abaixo. Com base no gráfico, determine



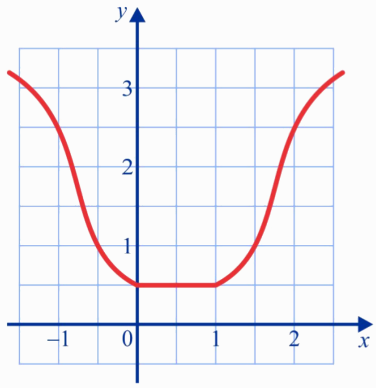
a) o conjunto imagem de f;

b) os zeros de f;

c) os intervalos de crescimento e decrescimento;

d) os pontos de máximo e mínimo local.

11) O gráfico da função f é mostrado abaixo. Com base no gráfico, determine



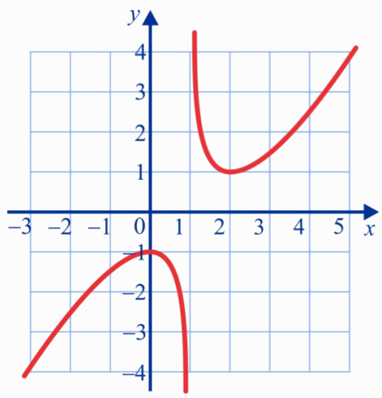
a) o conjunto imagem de f;

b) os pontos em que $f(x) \leq 2{,}5$;

c) os intervalos de crescimento e decrescimento;

d) os pontos de máximo e mínimo local.

12) O gráfico da função f é mostrado abaixo. Com base no gráfico, determine



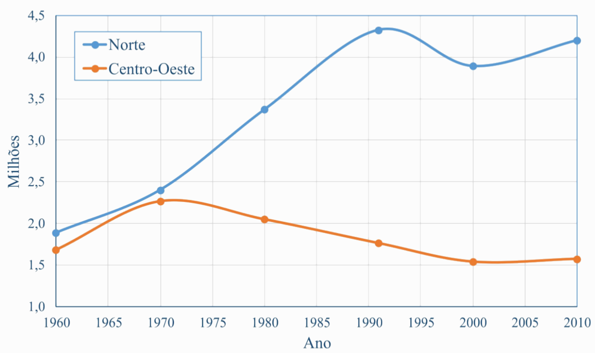
a) o domínio de f;

b) o conjunto imagem de f;

c) os intervalos de crescimento e decrescimento;

d) os pontos de máximo e mínimo local.

13) O gráfico abaixo mostra a população rural das regiões norte e centro-oeste do Brasil, ao longo do tempo, segundo o IBGE.



a) Determine em que período a população rural da região norte superou 3 milhões de habitantes.

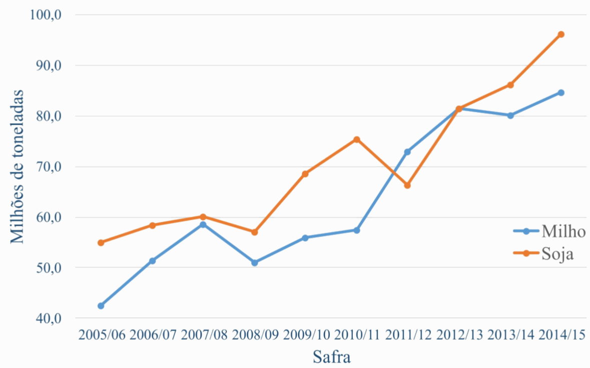
b) Determine em que período a população rural da região centro-oeste superou 2 milhões de habitantes.

c) Forneça os intervalos de crescimento e decrescimento da população rural das duas regiões.

d) Indique em que décadas do século XX o crescimento da população rural da região norte foi mais intenso.

e) Determine os pontos de máximo e mínimo local dos gráficos.

14) A produção brasileira de milho e soja, em milhões de toneladas, no período compreendido entre as safras de 2005/06 e 2014/15 é mostrada abaixo. Os dados foram extraídos das séries históricas fornecidas pela CONAB – Companhia Nacional de Abastecimento.



a) Determine em que safras a produção de soja foi maior ou igual a 60 milhões de toneladas.

b) Determine em que safras a produção de milho foi superior a 70 milhões de toneladas.

c) Forneça os intervalos de crescimento e decrescimento da produção de soja.

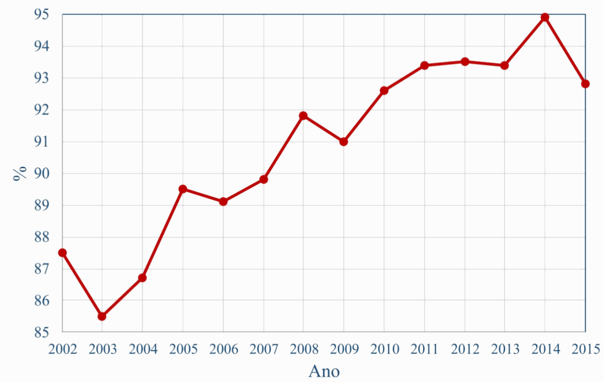
d) Indique entre quais safras houve o maior crescimento da produção de milho. Forneça esse crescimento.

e) Indique entre quais safras houve a maior queda da produção de soja. Calcule em quantas toneladas a produção foi reduzida.

f) Determine o crescimento percentual da produção de milho e de soja entre as safras de 2005/06 e 2014/15.

g) Determine os pontos de máximo e mínimo local dos gráficos.

15) Dá-se o nome de taxa de ocupação ao percentual de pessoas ocupadas em relação ao número de pessoas dispostas a trabalhar. O gráfico abaixo mostra a taxa de ocupação na região metropolitana de São Paulo, em junho de cada ano, segundo o IBGE.



a) Determine entre quais anos consecutivos houve o maior aumento do desemprego em junho, ou seja, a maior variação negativa da taxa de ocupação.

b) Determine entre quais anos consecutivos houve o maior aumento da taxa de ocupação em junho. Calcule a variação da taxa nesse caso.

c) Determine em que anos a taxa de ocupação foi superior a 90%.

d) Forneça os intervalos de crescimento e decrescimento da taxa de ocupação.

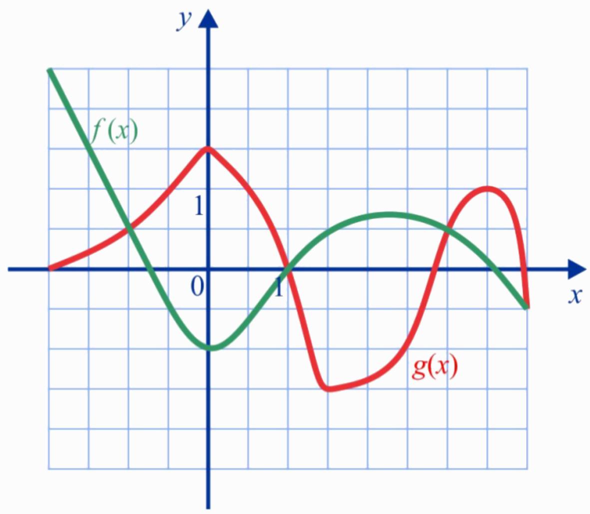
e) Determine quais anos apresentaram a maior e a menor taxa de ocupação em junho.

16) Sejam dadas as funções $f(x) = x/6 - 2$ e $g(x) = 3 - 2x/3$.

a) Exiba os gráficos de f e g no plano Cartesiano.

b) Determine para que valores de x a desigualdade $f(x) \leq g(x)$ é satisfeita.

17) Dadas as funções f e g cujos gráficos são representados abaixo, determine, para o domínio especificado,



a) os pontos nos quais $f(x) \leq 0{,}5$;

b) os pontos nos quais $g(x) \geq 0{,}5$;

c) os pontos nos quais $f(x) \geq g(x)$;

d) os intervalos em que f é crescente ou decrescente;

e) os intervalos em que g é crescente ou decrescente;

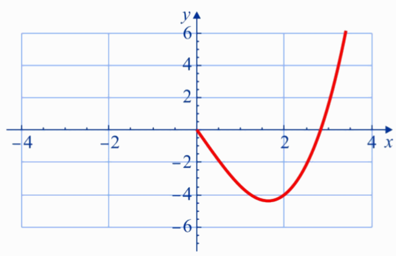
f) os pontos de máximo e mínimo local de f e o valor da função nesses pontos;

g) os pontos de máximo e mínimo local de g e o valor da função nesses pontos;

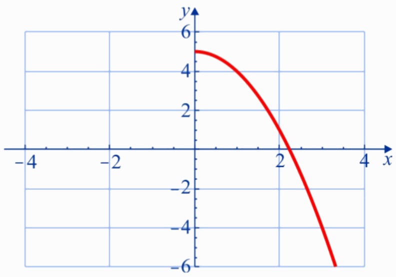
h) valores aproximados para os zeros de f.

18) Complete os gráficos das funções abaixo, supondo que eles possuem o tipo de simetria indicado.

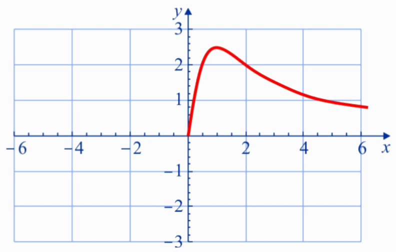
a) $f(x)$ é ímpar.



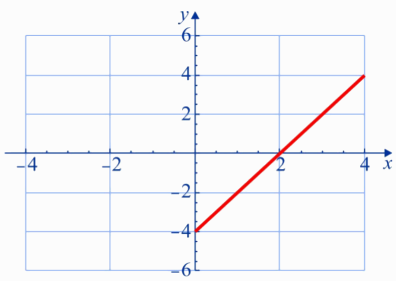
b) $f(x)$ é ímpar.



c) $f(x)$ é par.



d) $f(x)$ é par.



19) [resp] Determine algebricamente se as funções abaixo são pares, ímpares ou não possuem simetria.

a) $f(x) = 4$

b) $f(x) = -2x$

c) $f(x) = 2x - 1$

d) $f(x) = x^2 - 1$

e) $f(x) = x^2 - 3$

f) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

g) $f(x) = -x^3 + 2x$

h) $f(x) = 2x^5 - x^3 + x$

i) $f(x) = x^6 - 3x^4 + x^2 - 15$

j) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

k) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

l) $f(x) = x\sqrt{x}$

m) $f(x) = |x|$

20) Levando em conta a simetria, trace os gráficos das funções dos itens (d), (f), (i) e (j) do exercício anterior.

4.3 Algumas Funções Comuns

Função Constante

A função constante retorna sempre o mesmo valor não importando o valor da variável

$$f(x) = c$$

Função Afim

Uma função f é chamada afim se pode ser escrita na forma

$$f(x) = mx + b$$

em que m e b são coeficientes reais constantes.

O gráfico de uma função afim é uma reta, não vertical, m é a declividade do gráfico da função e b é o intercepto-y

Função Potência

Dada uma constante natural n, uma função na forma

$$f(x) = x^n$$

é chamada função potência.

As principais características da função potência são:

1. O domínio de f é $\mathbb{R}$.
2. O conjunto imagem é $\mathbb{R}$ se o expoente é ímpar e é $[0, \infty)$ se o expoente é par.
3. Há um único zero em $x = 0$.
4. Quando o expoente é par, f é decrescente para $x < 0$, e crescente para $x > 0$.
5. Quando o expoente é ímpar, f é crescente em $(-\infty, \infty)$.
6. Não há máximos locais.
7. A função tem um ponto de mínimo local em $x = 0$ quando o expoente é par, e não tem mínimos locais quando o expoente é ímpar.
8. Quando o expoente é par, f é par, quando o expoente é ímpar, f é ímpar.

Função Raiz

Dada uma constante natural n maior que 1, uma função na forma

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

é chamada função raiz.

Também podemos representar uma função raiz na forma de uma potência

$$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$

As principais características da função raiz são:

- O domínio é $\mathbb{R}$ se o índice n é impar, e é $[0, \infty)$ se n é par.
- O conjunto imagem é $\mathbb{R}$ se o índice é ímpar e é $[0, \infty)$ se o índice é par.
- Há um único zero em $x = 0$.
- A função é crescente em todo o domínio.
- Não há máximos ou mínimos locais.
- Quando o índice é ímpar, f é ímpar.

Função Recíproca

Funções na forma

$$f(x) = \frac{1}{x^n}$$

em que n é um número natural, são chamadas funções recíprocas.

As principais características das funções recíprocas são:

1. O domínio inclui todos os valores reais, exceto o zero.
2. O conjunto imagem é $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ se o expoente é ímpar e $(0, \infty)$ se o expoente é par.
3. A função não tem zeros.
4. Quando o expoente é ímpar, a função é decrescente em todos os pontos do domínio. Já quando o expoente é par, f é crescente para $x < 0$ e decrescente para $x > 0$.
5. Não há máximos ou mínimos locais.

Funções Definidas por Partes

Em geral precisamos trabalhar com funções que não podem ser facilmente descritas por uma expressão simples. Um desses casos é quando a função tem comportamentos diferentes em partes diferentes do seu domínio, isso é, em cada parte do domínio ela é definida por uma expressão diferente.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{se } x \in A_1 \\ f_2(x), & \text{se } x \in A_2 \\ \vdots & \quad \vdots \\ f_n(x), & \text{se } x \in A_n \end{cases}$$

As partes A_i do domínio devem ser disjuntas e cobrir todo o domínio

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = D_f \qquad \text{e} \qquad A_i \cap A_j = \emptyset \ \text{ se } \ i \neq j$$

Exemplo 4.3.1:

Essas são funções definidas por partes

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{se } x < 0 \\ x + x^2, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$

Função Modulo

A função valor absoluto ou função modular é uma função definida por partes, dada por

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

As principais características da função módulo são:

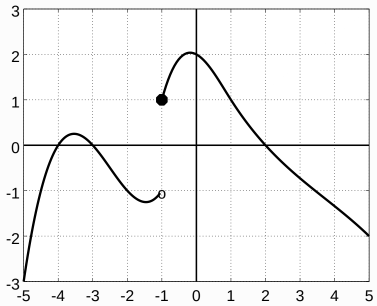
◇ O domínio é $\mathbb{R}$.

- O conjunto imagem é $[0, \infty)$.
- Há um zero em $x = 0$.
- A função é decrescente em $(-\infty, 0)$ e crescente em $(0, \infty)$.
- Não há máximos locais.
- Há um único ponto de mínimo local, em $x = 0$.
- A função é par.

Exercícios Seção 4.3

Funções Mais Comuns

1) Considerando que f é a função descrita pelo gráfico



Determine:

a) as raízes de f e os valores de $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$ e $f(4)$,

b) o ponto onde a função cruza o eixo y,

c) os intervalos onde a função é crescente,

d) os intervalos onde a função é decrescente.

2) Determine se a equação define y como uma função de afim de x, se isso ocorrer, escreve a equação na forma $y = mx + b$.

a) $2x + 3y = 6$

b) $-2x + 4y = 7$

c) $x = 2y - 4$

d) $2x - 4y + 9 = 0$

e) $2x^2 - 8y + 4 = 0$

f) $3\sqrt{x} + 4y = 0$

3) Determine se a função dada é uma função polinomial, racional ou de algum outro tipo. Dê o grau de cada função polinomial.

a) $f(x) = 3x^6 - 2x^2 + 1$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

c) $G(x) = 2(x^2 - 3)^3$

d) $f(t) = 2t^2 + 3\sqrt{t}$

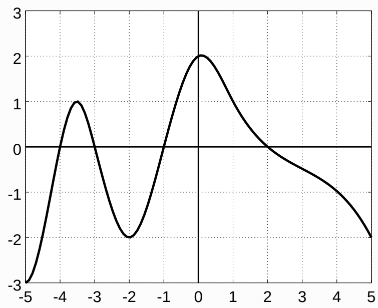
e) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x - 1}{3}$

f) $f(t) = 2t^2 + t\sqrt{5}$

4) Determine as constantes m e b na função afim $f(x) = mx + b$, de modo que $f(0) = 2$ e $f(3) = -1$.

5) Determine as constantes m e b na função afim $f(x) = mx + b$, de modo que $f(2) = 4$ e que a reta correspondente ao gráfico de f tenha declividade -1.

6) Considerando que f é a função descrita pelo gráfico



Determine:

a) as raízes de f e os valores de $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$ e $f(4)$,

b) o ponto onde a função cruza o eixo y,

c) os intervalos onde a função é crescente,

d) os intervalos onde a função é decrescente.

7) Determine o domínio e esboce o gráfico das funções

a) $f(x) = \ln|x|$ c) $f(x) = 10^{-x}$

b) $f(x) = x^{-2}$ d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

8) Esboce o gráfico e determine o domínio e a imagem da função

a) $f(x) = \sqrt{|x| - 1}$

b) $g(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{se } x < 0 \\ 1 - x^2, & \text{se } x > 0 \end{cases}$

9) Considerando a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{2x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Avalie f para x igual a $-2, -1, 0, 1, 2$

b) Esboce o gráfico de f

c) Para quais valores de x temos $f(x) = 1$

d) Explicite a formula da função

$$g(x) = f\big(|x - 1|\big)$$

10) Considerando a função

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^3 & \text{se } x < 0 \\ x^2 - x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Avalie f para x igual a $-2, -1, 0, 1, 2$

b) Esboce o gráfico de f

c) Para quais valores de x temos $f(x) = 1$

d) Explicite a formula da função

$$g(x) = f\big(|x - 1|\big)$$

11) Determine o domínio e esboce o gráfico das funções

a) $f(x) = \ln x$ c) $f(x) = 2^x$

b) $f(x) = x^{-1}$ d) $f(x) = \sqrt{|x|}$

12) Esboce o gráfico, determine o domínio, imagem e interceptos das funções

a) $f(x) = 2x + 5$

b) $f(x) = 5$

c) $f(x) = 2x^2 - 2x - 4 = 2(x + 1)(x - 2)$

13) Esboce o gráfico de cada uma das funções abaixo com base em uma tabela de valores da função em pontos que você escolheu.

a) $f(x) = 3 - 2x$ d) $f(x) = 1 + \sqrt{x}$

b) $f(x) = 2x^2 - 3$ e) $f(x) = \sqrt{1 + x}$

c) $f(x) = (x - 1)^2$ f) $f(x) = 2/x$

14) [resp] Calcule o valor das funções abaixo nos pontos $x = -2$; $x = -1$; $x = 0$; $x = 0{,}5$; $x = 1$ e $x = 2$

a) $f(x) = \begin{cases} 3 + x, & \text{se } x \leq -1 \\ 2 - 3x, & \text{se } x > -1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 1 \\ x^2, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

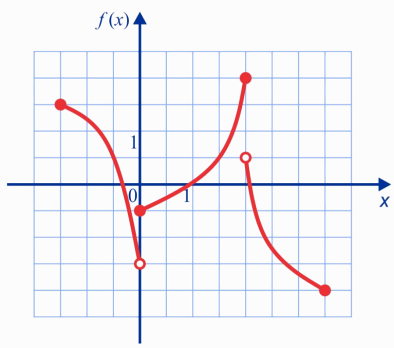
15) Trace o gráfico das funções abaixo para $x \in [-2{,}4]$.

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{se } x \leq 2 \\ x, & \text{se } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0 \\ -1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

16) Dada a função f cujo gráfico é representado abaixo, determine, para o domínio especificado,



a) o domínio e a im-gem de-f;

b) os valores de f — $-1{,}5$)- $f(0)$ e $f(2)$;

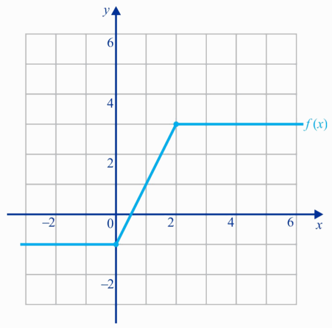
c) os pontos nos quais $f(x) \geq 0{,}5$;

d) os intervalos em que f é crescente ou decrescente;

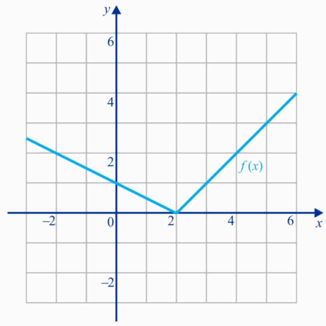
e) os pontos de máximo e mínimo local de f e os valores da função nesses pontos.

17) As figuras abaixo mostram os gráficos de funções definidas por partes. Escreva a expressão de cada função e determine seus domínios.

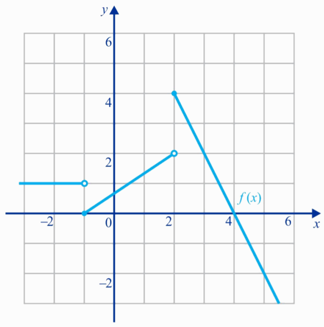
a)



b)



c)



4.4 Funções Polinomiais

Função Polinomial

Seja dado um número inteiro não negativo n, bem como os coeficientes reais a_0, a_1, $\ldots$, a_n, com $a_n \neq 0$. A função definida por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

é denominada função polinomial de grau n, com relação a x.

Exemplo 4.4.1:

Essas funções são exemplos de funções polinomiais

$f(x) = c$	Função constante (polinômio de grau 0)
$f(x) = mx + b$	Função linear ou afim (polinômio de grau 1)
$f(x) = x^n$	Função potência de grau n

Função Quadrática

Sejam dados os coeficientes reais a, b e c, com $a \neq 0$. A função definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

é denominada função quadrática.

O gráfico de uma função quadrática tem um formato característico, similar a uma letra “U” mais aberta, e é chamado parábola.

Ponto de máximo ou mínimo da função quadrática

Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Se $a > 0$, f tem um único ponto de mínimo em $x^* = -\dfrac{b}{2a}$
   O valor mínimo de f é dado por $f(x^*) = -\dfrac{\Delta}{4a}$
2. Se $a < 0$, f tem um único ponto de máximo em $x^* = -\dfrac{b}{2a}$
   O valor máximo de f é dado por $f(x^*) = -\dfrac{\Delta}{4a}$

Gráficos de Funções Polinomiais

De forma geral, o gráfico de uma função polinomial possui as seguintes características

1. Ele é contínuo, ou seja, ele não contém buracos, saltos (descontinuidades verticais) ou falhas (descontinuidades horizontais).
2. Ele é suave, ou seja, ele não possui mudanças bruscas de direção ou inclinação. Essas mudanças são denominadas informalmente de quinas ou bicos.

Infinito

Dizemos que uma grandeza a tende para infinito quando seu valor cresce arbitrariamente. Indicamos essa ideia pela notação

$$a \to \infty$$

Se o valor de a decresce indefinidamente dizemos que a tende a menos infinito

$$a \to -\infty$$

Atenção: ∞ não é um número e portanto não obedece as regras de contas com números

Comportamento Extremo

Dizemos que uma função f tende ao infinito quando x cresce se ela assume valores arbitrariamente grandes quando x assume valores arbitrariamente grandes. Nesse caso, usamos a notação

$$f \to \infty \qquad \text{quando} \qquad x \to \infty$$

Dizemos que f tende para infinito quando x decresce se ela assume valores arbitrariamente grandes quando x assume valores negativos arbitrariamente grandes. Nesse caso, escrevemos

$$f \to \infty \qquad \text{quando} \qquad x \to -\infty$$

Teste do coeficiente dominante

O comportamento extremo da função polinomial de grau n

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

depende de n, bem como de a_n, o coeficiente dominante (ou principal) do polinômio, isto é, o coeficiente de seu monômio de maior grau.

1. Se n é ímpar, temos duas situações, dependendo do sinal de a_n

   (a) Se $a_n > 0$, então p decresce ilimitadamente ($p \to -\infty$) quando $x \to -\infty$ e p cresce ilimitadamente ($p \to \infty$) quando $x \to \infty$.
   (b) Se $a_n < 0$, então p cresce ilimitadamente ($p \to \infty$) quando $x \to -\infty$ e p decresce ilimitadamente ($p \to -\infty$) quando $x \to \infty$.

2. Se n é par, temos duas situações, dependendo do sinal de a_n
   (a) Se $a_n > 0$, então p cresce ilimitadamente ($p \to \infty$) quando $x \to -\infty$ ou quando $x \to \infty$.
   (b) Se $a_n < 0$, então p decresce ilimitadamente ($p \to -\infty$) quando $x \to -\infty$ ou quando $x \to \infty$.

Teorema do Fator

Um polinômio $p(x)$ tem um fator $(x - a)$ se e somente se a é um zero de $p(x)$, ou seja, se $p(a) = 0$.

Número de Zeros Reais de um Polinômio

Uma função polinomial de grau n tem, no máximo, n zeros reais.

Fatoração de um Polinômio

Se um polinômio possui n raízes reais, ele pode ser fatorado em n fatores, como nesse exemplo

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

onde x_i são as raízes do polinômio.

Divisão de Polinômios

Dados dois polinômios $p(x)$ e $d(x)$, podemos dividir $p(x)$ por $d(x)$ desde que $d(x) \neq 0$ e que o grau de $d(x)$ seja menor ou igual ao grau de $p(x)$. Nesse caso, existe um único polinômio $q(x)$, chamado quociente, e um único polinômio $r(x)$, chamado resto, tais que

$$p(x) = d(x)q(x) + r(x)$$

e $r(x) = 0$ ou o grau de $r(x)$ é menor que o grau de $d(x)$.

Como era de se esperar, os polinômios $p(x)$ e $d(x)$ recebem os nomes de dividendo e divisor, respectivamente.

A razão $p(x)/q(x)$ é dita imprópria quando o grau de $p(x)$ é maior que o de $q(x)$. A divisão de polinômios converte uma razão imprópria na soma de um polinômio $q(x)$ e de uma razão própria $r(x)/d(x)$, na qual $r(x)$ tem grau menor que $d(x)$.

$$\frac{p(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$$

A divisão polinomial pode ser realizada de forma muito similar a divisão entre números, veja o exemplo a seguir.

Exemplo 4.4.2: Divida $p(x) = 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 5$ por $d(x) = x^2 - 2x + 1$.

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
3x^4 & -4x^3 & -2x^2 & +0x & +5 & x^2 & -2x & 1 \\ \cline{6-8}
-3^4 & +6x^3 & -3x^2 & & & 3x^2 & +2x & -1 \\ \cline{1-3}
 & 2x^3 & -5x^2 & +0x & +5 & & & \\
 & -2x^3 & +4x^2 & -2x & & & & \\ \cline{2-5}
 & & -x^2 & -2x & +5 & & & \\
 & & x^2 & -2x & +1 & & & \\ \cline{3-5}
 & & & -4x & +6 & & &
\end{array}$$

Método de Briot-Ruffini

Para dividir um polinômio por divisores na forma $(x - a)$, em que a é um número real, podemos usar um algoritmo rápido, conhecido como Método de Ruffini (ou de Briot-Ruffini).

Exemplo 4.4.3: Use o método de Briot-Ruffini para dividir o polinômio

$$p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 25x + 1$$

pelo polinômio $x - 2$.

1. Escreva o dividendo $p(x)$ na ordem decrescente do grau dos monômios. Certifique-se de que o divisor tenha a forma $x - a$, em que a é um número

real.

No nosso caso, os monômios de $p(x)$ já estão em ordem decrescente de grau. Além disso, o divisor, que é $x - 2$, tem a forma exigida, com $a = 2$.

2. Copie o termo a na primeira linha do quadro, à esquerda do traço vertical.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

3. Ainda na primeira linha, mas do lado direito do traço vertical, copie os coeficientes do dividendo $p(x)$.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 4 & 3 & -25 & 1 \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

4. Copie na terceira linha o coeficiente do termo de maior grau de p(x), que vale 4.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 4 & 3 & -25 & 1 \\ \hline & & & & \\ \hline & 4 & & & \end{array}$$

5. Multiplique o coeficiente que você acabou de obter pelo termo a, e escreva o resultado na segunda linha da coluna seguinte. No nosso caso, esse produto é $4 \times 2 = 8$.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 4 & 3 & -25 & 1 \\ \hline & & 8 & & \\ \hline & 4 & & & \end{array}$$

6. Some os dois termos da nova coluna, e anote o resultado na terceira linha.

Em nosso problema, a soma em questão é $3 + 8 = 11$.

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 4 & 3 & -25 & 1 \\ \hline
 & & 8 & & \\ \cline{2-5}
 & 4 & 11 & \multicolumn{1}{r|}{} &
\end{array}$$

7. Multiplique o coeficiente que você acabou de obter pelo termo a, e escreva o resultado na segunda linha da coluna seguinte. No nosso exemplo, o produto é $11 \times 2 = 22$.

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 4 & 3 & -25 & 1 \\ \hline
 & & 8 & 22 & \\ \cline{2-5}
 & 4 & 11 & \multicolumn{1}{r|}{} &
\end{array}$$

8. Some os dois termos da nova coluna, e anote o resultado na terceira linha. Em nosso caso, a soma fornece $-25 + 22 = -3$.

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 4 & 3 & -25 & 1 \\ \hline
 & & 8 & 22 & \\ \cline{2-5}
 & 4 & 11 & \multicolumn{1}{r|}{-3} &
\end{array}$$

9. Multiplique o coeficiente que você acabou de obter pelo termo a, e escreva o resultado na segunda linha da coluna seguinte. No nosso exemplo, o produto é $-3 \times 2 = -6$.

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 4 & 3 & -25 & 1 \\ \hline
 & & 8 & 22 & -6 \\ \cline{2-5}
 & 4 & 11 & \multicolumn{1}{r|}{-3} &
\end{array}$$

10. Some os dois termos da nova coluna, e anote o resultado na terceira linha. Em nosso caso, a soma é $1 + (-6) = -5$.

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 4 & 3 & -25 & 1 \\ \hline
 & & 8 & 22 & -6 \\ \cline{2-5}
 & 4 & 11 & \multicolumn{1}{r|}{-3} & -5
\end{array}$$

11. Como as colunas do quadro acabaram chegamos ao fim da divisão.

A última linha fornece os coeficientes dos monômios do quociente, na ordem decrescente de grau.

$$q(x) = 4x^2 + 11x - 3$$

Além disso, o último elemento da terceira linha corresponde ao resto da divisão

$$r = -5$$

Observe que o grau de $q(x)$ é igual ao grau de $p(x)$ menos 1. Além disso, o resto da divisão um polinômio $p(x)$ por $x - a$ é sempre um número real. Se $p(x)$ é divisível por $x - a$, então o resto é zero.

Exercícios Seção 4.4

Funções Polinomiais

1) Esboce o gráfico, determine o domínio, imagem e interceptos das funções

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ &= (x-1)(x+1)(x-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 \\ &= (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3) \end{aligned}$$

2) Determine as raízes da função polinomial do segundo grau $f(x) = x^2 - x - 2$.

3) Dada a função $f(x) = x^2 - 3x$,

a) determine algebricamente os pontos nos quais $f(x) = 0$;

b) determine algebricamente os pontos nos quais $f(x) = -2$;

c) esboce o gráfico da função no plano coordenado, indicando os pontos que você obteve no item (b);

d) determine graficamente as soluções da inequação $f(x) \geq -2$.

4) Dada a função $f(x) = 5x - 2x^2$,

a) determine algebricamente os pontos nos quais $f(x) = 0$;

b) determine algebricamente os pontos nos quais $f(x) = 2$;

c) esboce o gráfico da função no plano coordenado, indique os pontos que você obteve no item (b);

d) determine graficamente as soluções da inequação $f(x) \geq 2$.

5) Dada a função $f(x) = -2x^2 + 9x$,

a) determine algebricamente os pontos nos quais $f(x) = 0$;

b) determine algebricamente as soluções da inequação $f(x) \geq 9$;

c) determine algebricamente o ponto de mínimo ou máximo de f;

d) esboce o gráfico da função no plano coordenado;

6) Dada a função $f(x) = -3x^2 + 15x$,

a) determine algebricamente os pontos nos quais $f(x) = 0$;

b) determine algebricamente as soluções da inequação $f(x) \geq 12$;

c) determine algebricamente o ponto de mínimo ou máximo de f;

d) esboce o gráfico da função no plano coordenado;

7) Dada a função $f(x) = 15x^2 + x - 2$,

a) determine algebricamente os pontos nos quais $f(x) = 0$;

b) determine algebricamente as soluções da inequação $f(x) \leq -2$;

c) determine algebricamente o ponto de mínimo ou máximo de f.

8) Esboce o gráfico e determine o ponto de mínimo ou máximo de cada função.

a) $f(x) = (x - 1)(x + 2)$

b) $f(x) = (-3 - x)(x + 3)$

c) $f(x) = x^2 - 3x + 4$

d) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$

e) $f(x) = 4x + x^2$

f) $f(x) = -x^2 - 4$

g) $f(x) = (x - 4)(x + 1)$

9) Determine a função quadrática que satisfaz cada uma das condições abaixo.

a) Tem vértice em $(1, -2)$ e passa pelo ponto (2,3).

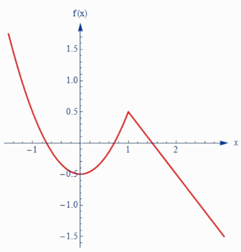
b) Tem vértice em (3,4) e cruza o eixo-y na ordenada -5.

10) Identifique, no plano coordenado, as regiões definidas abaixo.

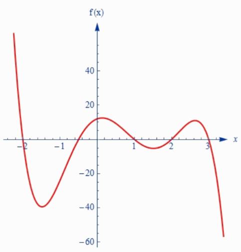
a) $y \geq x^2$ b) $y = x^2 - 4$ c) $y \leq 4 - x^2$

11) [resp] Dados os gráficos abaixo, determine quais podem representar uma função polinomial. Caso o gráfico não possa corresponder a uma função polinomial, indique o motivo.

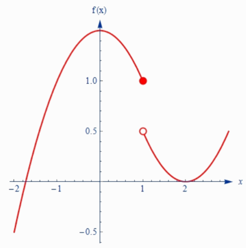
a)



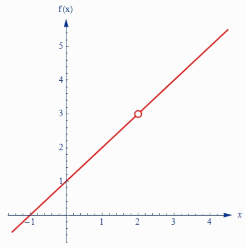
b)



c)



d)



12) [resp] Considerando apenas o comportamento extremo das funções abaixo, relacione-as aos gráficos apresentados.

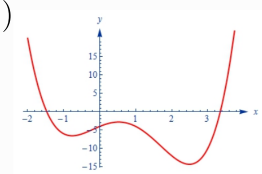
a) $f(x) = x^3 - 5x + 1$

b) $f(x) = -2x^3 - x^2 + 4x + 6$

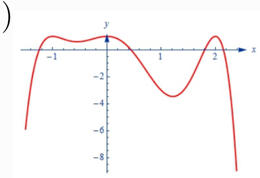
c) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 4x - 4$

d) $f(x) = 1 - 4x^2 - 4x^3 + 3x^4 + 2x^5 - x^6$

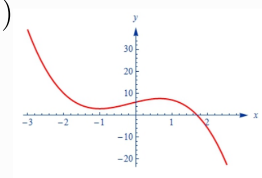
1)



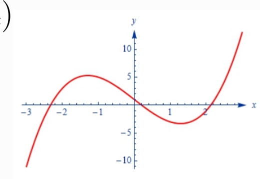
2)



3)



4)



13) [resp] Descreva o comportamento extremo de cada função abaixo.

a) $f(x) = -3x^3 + 4x^2 - x + 1$

b) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 5x$

c) $f(x) = 625 - x^4$

d) $f(x) = 2x^4 - 6x^2 + 3x + 10$

e) $f(x) = 3x^5 - 25x^2 + 30$

f) $f(x) = -x^5 + 6x^4 + 9x^3 - 21x^2 - 18x - 20$

g) $f(x) = -2x^6 + 36x^4 - 25x^2 - 48$

h) $f(x) = x^6 - 4x^5 + 3x^3$

14) [resp] Fazendo a mudança de variável $w = x^2$, determine os zeros das funções abaixo, e as escreva na forma fatorada.

a) $p(x) = x^4 - 13x^2 + 36$

b) $p(x) = 4x^4 - 65x^2 + 16$

c) $p(x) = 9x^4 - 10x^2 + 1$

d) $p(x) = x^4 - 24x^2 - 25$

e) $p(x) = 2x^4 - 27x^2 - 80$

f) $p(x) = x^4 - 32x^2 - 144$

15) Em cada caso abaixo, escreva na forma fatorada um polinômio que tenha o grau e os zeros indicadas.

a) Grau 2, com zeros $x = -4$ e $x = 0$.

b) Grau 2, com zeros $x = 1/2$ e $x = 2$, com concavidade para baixo.

c) Grau 3, com zeros $x = 0$, $x = 1$ e $x = 3$.

d) Grau 3, com zeros $x = -2$ e $x = 1$ (com multiplicidade 2).

e) Grau 3, com zero $x = 8$ (com multiplicidade 3).

f) Grau 4, com zeros $x = -3$, $x = -2$, $x = 0$ e $x = 5$.

g) Grau 4, com zeros $x = -6$, $x = 6$ e $x = \sqrt{3}$ (com multiplicidade 2).

h) Grau 4, com zeros $x = -5$, $x = -4$, $x = -1$ e $x = 3$.

i) Grau 5, com zeros $x = -1/3$, $x = -2/3$, $x = 4/3$ e $x = 5/3$ (com multiplicidade 2).

j) Grau 6, com zeros $x = -1/2$ (com multiplicidade 3), $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$ e $x = 0$.

16) Escreva na forma expandida os polinômios que você encontrou nos itens (a) a (f) do exercício anterior.

17) [resp] Resolva as desigualdades abaixo.

a) $(x-1)(x+2)(x-4) \leq 0$

b) $(x+1)(x-2)x \geq 0$

c) $x^3 - 2x \geq 0$

d) $2x^3 - 18x \leq 0$

18) Sabendo que $x = 3$ é um zero de $f(x) = 3x^3 - 39x + 36$,

a) Determine todos os zeros da função.

b) Resolva $3x^3 - 39x + 36 \leq 0$.

19) Sabendo que $x = -5$ é uma raiz da equação $2x^3 + 7x^2 - 17x - 10 = 0$,

a) Determine todas as raízes reais da equação.

b) Resolva a inequação $2x^3 + 7x^2 - 17x - 10 \geq 0$

20) Sabendo que $x = 4$ é um zero da função $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 23x + 12$,

a) Determine todos os zeros de $f(x)$.

b) Escreva $f(x)$ na forma fatorada.

c) Resolva a inequação $f(x) \leq 0$.

21) Sabendo que $x = 5$ é uma raiz da equação $-x^3 + 5x^2 + 4x - 20 = 0$,

a) Determine todas as raízes reais da equação.

b) Escreva o polinômio $-x^3 + 5x^2 + 4x - 20$ na forma fatorada.

c) Resolva a inequação $-x^3 + 5x^2 + 4x - 20 \leq 0$.

22) Sabendo que $x = -6$ é uma raiz da equação $16x^3 + 88x^2 - 47x + 6 = 0$,

a) Determine todas as raízes reais da equação.

b) Escreva o polinômio $16x^3 + 88x^2 - 47x + 6$ na forma fatorada.

c) Resolva a inequação $16x^3 + 88x^2 - 47x + 6 \leq 0$.

23) Sabendo que $x = 7$ é uma raiz da equação $x^3 - 5x^2 - 13x - 7 = 0$,

a) Determine todas as raízes reais da equação.

b) Escreva o polinômio $x^3 - 5x^2 - 13x - 7$ na forma fatorada.

c) Resolva a inequação $x^3 - 5x^2 - 13x - 7 \leq 0$.

24) Sabendo que $x = 2$ é uma raiz da equação $x^3 - 2x^2 + 16x - 32 = 0$,

a) Determine todas as raízes reais da equação.

b) Escreva o polinômio $x^3 - 2x^2 + 16x - 32$ na forma fatorada.

c) Resolva a inequação $x^3 - 2x^2 + 16x - 32 \leq 0$.

25) Sabendo que $x = -3$ é uma raiz da equação $x^3 + 5x^2 + 10x + 12 = 0$,

a) Determine todas as raízes reais da equação.

b) Escreva o polinômio $x^3 + 5x^2 + 10x + 12$ na forma fatorada.

c) Resolva a inequação $x^3 + 5x^2 + 10x + 12 \geq 0$.

26) Sabendo que $x = 4$ é uma raiz da equação $x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 24x = 0$,

a) Determine todas as raízes reais da equação.

b) Escreva o polinômio $x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 24x$ na forma fatorada.

c) Resolva a inequação $x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 24x \geq 0$.

27) Sabendo que $x = 3$ é uma raiz da função $f(x) = 2x^4 + 10x^3 - 16x^2 - 96x$,

a) Determine todos os zeros de f.

b) Escreva o polinômio $f(x)$ na forma fatorada.

c) Resolva a inequação $f(x) \leq 0$.

28) Sabendo que $x = 6$ é uma raiz da função $f(x) = 4x^4 - 20x^3 - 23x^2 - 6x$,

a) Determine todos os zeros da função.

b) Escreva o polinômio na forma fatorada.

c) Resolva a inequação $f(x) \geq 0$.

29) Sabendo que $x = 1$ e $x = -2$ são zeros da função $f(x) = x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 2x - 16$,

a) Determine todos os zeros da função.

b) Escreva o polinômio f na forma fatorada.

c) Resolva a inequação $f(x) \geq 0$.

4.5 Funções Racionais

Funções Racionais

Uma Função Racional é a função definida como a divisão de um polinômio por outro.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

onde p e q são polinômios em x.

As principais características das funções racionais são:

- O domínio é composto por todos os $x \in \mathbb{R}$, tais que $q(x) \neq 0$.
- A função racional tem zeros quando $p(x) = 0$ e $q(x) \neq 0$

Propriedades das Funções Racionais

A Funções Racionais, que são quocientes de polinômios, respeitam as mesmas propriedades das frações de números reais.

1. $\dfrac{p}{q}\dfrac{r}{s} = \dfrac{pr}{qs}$
2. $\dfrac{p}{q} \div \dfrac{r}{s} = \dfrac{p}{q}\dfrac{s}{r} = \dfrac{ps}{qr}$
3. $\dfrac{p}{r} + \dfrac{q}{r} = \dfrac{p+q}{r}$
4. $\dfrac{p}{r} - \dfrac{q}{r} = \dfrac{p-q}{r}$

Estamos assumindo que todos os divisores são diferentes de zero.

Outra fórmula que pode ser útil para a manipulação de frações

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps+rq}{qs}$$

Atenção para não cometer esse erro muito comum $\dfrac{p}{r+s} \neq \dfrac{p}{r} + \dfrac{p}{s}$

Exercícios Seção 4.5

Funções Racionais

1) Determine e desenhe o esboço do domínio da função real

$$f(x) = \frac{\sqrt{4-2x}}{x^2+x-2}$$

2) Dada a função $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+2}$, determine x tal que $f(x) = 1$.

3) Determine e desenhe o esboço do domínio da função real

$$f(x) = \sqrt{4-2x} - \frac{1}{x-2}$$

4.6 Operações de Funções

Soma, subtração, multiplicação e divisão de funções

Dadas as funções f e g, cujos domínios são A e B, respectivamente, podemos definir

1. Soma de f e g $\quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$
2. Diferença entre f e g $\quad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$
3. Produto de f e g $\quad (fg)(x) = f(x)g(x)$
4. Quociente de f por g $\quad \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

O domínio da função resultante é $A \cap B$, salvo no caso do quociente, para o qual também se exige que os membros do domínio satisfaçam $g(x) \neq 0$.

Exercícios Seção 4.6

Operações com Funções

1) Sejam $f(x) = x^3 + 5$, $g(x) = x^2 - 2$ e $h(x) = 2x + 4$. Determine a expressão de dada função

a) $f+g$

b) $f-g$

c) fg

d) $\dfrac{f}{g}$

e) $\dfrac{f-g}{h}$

f) $\dfrac{fg}{h}$

2) Sejam $f(x) = x - 1$, $g(x) = \sqrt{x+1}$ e $h(x) = 2x^3 - 1$. Determine a expressão de dada função

a) $f+g$

b) $g-f$

c) fg

d) gf

e) $\dfrac{g}{h}$

f) $\dfrac{fg}{h}$

g) $\dfrac{fh}{g}$

h) $\dfrac{f-h}{g}$

3) Para cada caso, determine as funções $f+g$, $f-g$, fg e f/g

a) $f(x) = x^2 + 5$ $\quad g(x) = \sqrt{x} - 2$

b) $f(x) = \sqrt{x-1}$ $\quad g(x) = x^3 + 1$

c) $f(x) = \sqrt{x+3}$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{x-1}$

d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ $\quad g(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$

4) Para as funções f e g apresentadas abaixo, defina $f+g$, fg e f/g.

a) $f(x) = x - 2$ $\qquad g(x) = x^2 - 1$

b) $f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad g(x) = 2x^2 + 1$

c) $f(x) = \sqrt{x-1}$ $\qquad g(x) = \sqrt{x+1}$

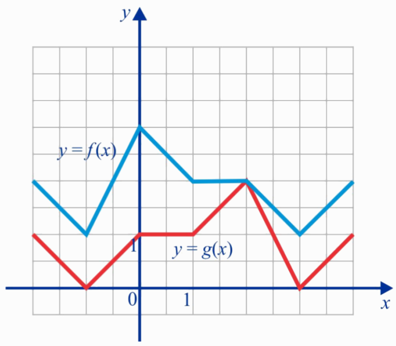
d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad g(x) = \dfrac{3}{x+2}$

e) $f(x) = x - 3$ $\qquad g(x) = x + 3$

f) $f(x) = \sqrt{1-x}$ $\qquad g(x) = x^2$

g) $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ $\qquad g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

5) Com base nas figuras abaixo, trace o gráfico de $h(x) = f(x) + g(x)$.



6) Sejam dadas as funções $f(x) = px$ e $g(x) = 2x + 5$, em que p é um parâmetro real.

a) Supondo que $p = -5$, determine para quais valores reais de x tem-se $f(x)g(x) < 0$.

b) Determine para quais valores de p temos $f(x) \geq g(x)$, ou seja, $f(x) - g(x) \geq 0$, para todo $x \in [-8, -1]$.

7) Dadas $f(x) = 2x^2 - 1$ e $g(x) = x - 3$, calcule

a) f(g(0)) $\qquad$ d) g(f(3))

b) f(g(1)) $\qquad$ e) g(g(-1))

c) f(f(2)) $\qquad$ f) g(g(f(2)))

8) Sejam dadas as funções $f(x) = 1/(x-4)$ e $g(x) = x^2$

a) Defina $f(g(x))$ e $g(f(x))$ e seus domínios.

b) Calcule $f(g(-3))$ e $g(f(7))$.

9) Dadas as funções f e g abaixo, defina $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(f(x))$ e $g(g(x))$.

a) $f(x) = 3x - 5$ $\qquad g(x) = -2x + 7$

b) $f(x) = 4x$ $\qquad g(x) = \dfrac{x^2}{4}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad g(x) = \dfrac{x}{3}$

d) $f(x) = x^2$ $\qquad g(x) = \dfrac{1}{5x}$

10) Dadas as funções f e g abaixo, defina $f(g(x))$ e $g(f(x))$ e os domínios das novas funções.

a) $f(x) = 3x - 1$ $\qquad g(x) = x^2 + 2x$

b) $f(x) = 2x + 3$ $\qquad g(x) = \dfrac{1}{x}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad g(x) = 2x - 1$

d) $f(x) = \sqrt{x-1}$ $\qquad g(x) = 3x^2 + 1$

e) $f(x) = \sqrt{x-2}$ $\qquad g(x) = x^2 + 3x$

f) $f(x) = \dfrac{X}{x-1}$ $\qquad g(x) = x^2$

g) $f(x) = x^{2/3}$ $\qquad g(x) = x^6$

h) $f(x) = x - 1$ $\qquad g(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$

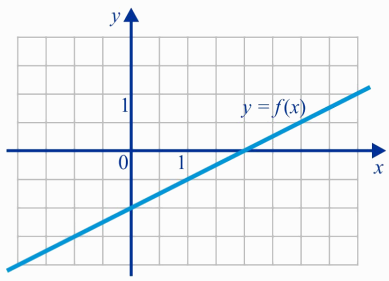
i) $f(x) = \sqrt{x+4}$ $\qquad g(x) = x^2 - 6$

j) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad g(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$

k) $f(x) = \sqrt{3x^2-1}$ $\qquad g(x) = \sqrt{x^2-8}$

l) $f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad g(x) = \dfrac{x}{25-x}$

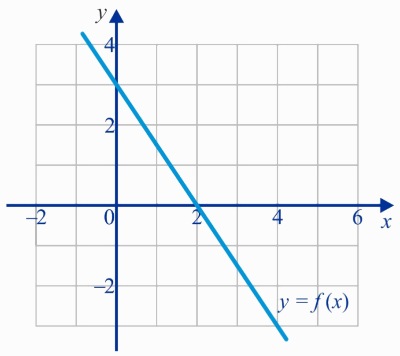
11) A figura abaixo mostra o gráfico de $y = f(x)$.



a) Sabendo que $g(x) = 1/x$, defina $f(g(x))$ e $g(f(x))$ e os domínios dessas funções.

b) Calcule $f(g(1/2))$ e $g(f(4))$.

12) A figura abaixo mostra o gráfico de $y = f(x)$.

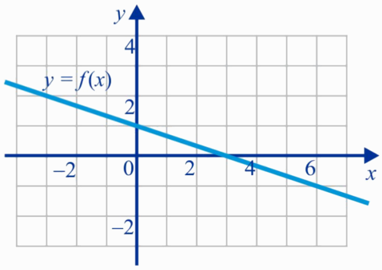


a) Sabendo que $g(x) = 1/x^2$, defina $f(g(x))$ e $g(f(x))$ e os domínios dessas funções.

b) Calcule $f(g(-1))$ e $g(f(3/2))$.

13) A figura abaixo mostra o gráfico de $y = f(x)$. Sabendo que

$$g(x) = \frac{6x}{5 - 3x}$$

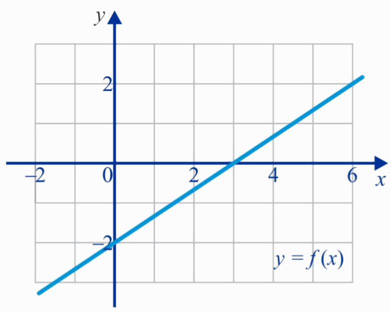


a) Calcule $f(g(5))$

b) Defina $f(x)$

c) Defina $g(f(x))$ e seu domínio.

14) A figura abaixo mostra o gráfico de $y = f(x)$.

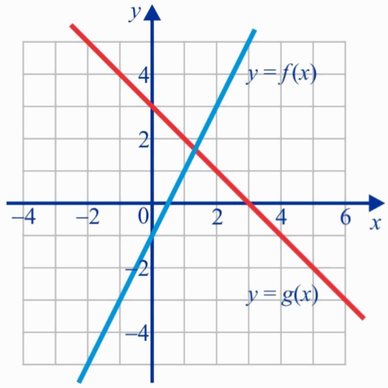


a) Defina a expressão analítica de $f(x)$.

b) Dada $g(x) = \sqrt{x}$, determine $g(f(6))$ e $f(g(9))$.

c) Sabendo que $h(x) = 1/(x+2)$, determine a expressão analítica de $h(f(x))$, bem como o domínio dessa função composta.

15) Os gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ são dados na figura abaixo.

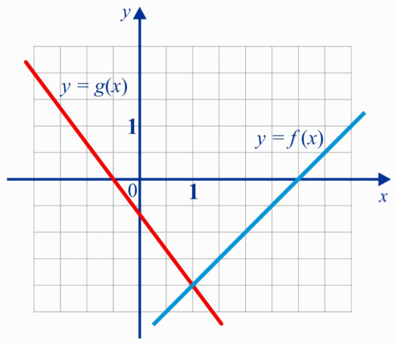


a) Determine as funções f e g.

b) Determine $w(x) = f(g(x))$

c) Esboce o gráfico de $h(x) = f(x)g(x)$ para $x \in [0,4]$

16) Os gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ são dados na figura abaixo.



a) Calcule $g(f(2{,}5))$

b) Determine as funções f e g.

c) Determine a expressão de $f(g(x))$.

d) Determine a expressão de $g(f(x))$.

17) Dadas as funções abaixo, determine f e g tais que $h(x) = f(g(x))$.

a) $h(x) = (3x-2)^2$

b) $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

c) $h(x) = |4 - x|$

d) $h(x) = \dfrac{1}{2x - 5}$

4.7 Manipulações de Funções

Esses exemplos de manipulações de funções mostram como criar novas funções a partir de funções já conhecidas.

Deslocamento Vertical

Se c é uma constante real positiva, então

1. Para mover c unidades para cima o gráfico de $y = f(x)$, usamos

$$y = f(x) + c$$

2. Para mover c unidades para baixo o gráfico de $y = f(x)$, usamos

$$y = f(x) - c$$

Deslocamento Horizontal

Se c é uma constante real positiva, então

1. O gráfico de $y = f(x)$ é movido c unidades para a direita se consideramos

$$y = f(x - c)$$

2. O gráfico de $y = f(x)$ é movido c unidades para a esquerda se consideramos

$$y = f(x + c)$$

Reflexão

1. O gráfico de $y = -f(x)$ é a reflexão de $y = f(x)$ em relação ao eixo-x.
2. O gráfico de $y = f(-x)$ é a reflexão de $y = f(x)$ em relação ao eixo-y.

Esticamento e encolhimento vertical

Se c é uma constante real positiva, então

1. se $c > 1$, o gráfico de $y = f(x)$ é esticado verticalmente por um fator c quando traçamos $y = cf(x)$;
2. e $0 < c < 1$, o gráfico de $y = f(x)$ é encolhido verticalmente por um fator c quando traçamos $y = cf(x)$.

Esticamento e encolhimento horizontal

Se c é uma constante real positiva, então

1. se $c > 1$, o gráfico de $y = f(x)$ é encolhido horizontalmente por um fator $1/c$ quando traçamos $y = f(cx)$;
2. se $0 < c < 1$, o gráfico de $y = f(x)$ é esticado horizontalmente por um fator $1/c$ quando traçamos $y = f(cx)$.

Exercícios Seção 4.7

Manipulação de Funções

1) Para cada função f abaixo, indique a função g que é obtida movendo f três unidades para baixo e a função h que é obtida movendo f cinco unidades para a direita.

2) Para cada função f abaixo, indique a função g que é obtida movendo f quatro unidades para cima e a função h que é obtida movendo f oito unidades para a esquerda.

3) Para cada função f abaixo, indique a função g que é obtida movendo f três unidades p ara baixo e a função h que é obtida movendo f cinco unidades para a direita.

a) $f(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = x^2 - x$

4) Para cada função f abaixo, indique a função g que é obtida movendo f quatro unidades para cima e a função h que é obtida movendo f oito unidades para a esquerda.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - |x| + \frac{1}{4}}$

b) $f(x) = x^3 - 5x$

5) Para cada função f abaixo, trace os gráficos de $y = f(x)$, $y = f(x) + 2$, $y = f(x) - 1$, $y = f(x + 2)$ e $y = f(x - 1)$.

a) $f(x) = |x|$

b) $f(x) = 3 - x^2$

c) $f(x) = x^4 - 4x^2$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & \text{se } x \le 0 \\ 2x, & \text{se } x > 0 \end{cases}$

6) A partir do gráfico de $f(x) = x + 2$, esboce o gráfico das funções abaixo.

a) $g(x) = x + 5$

b) $g(x) = 3x + 2$

c) $g(x) = 3(x + 2)$

d) $g(x) = -(x + 2)$

7) A partir do gráfico de $f(x) = |x|$, esboce o gráfico das funções abaixo.

a) $g(x) = |x+3|$

b) $g(x) = |3x|$

c) $g(x) = 3|x|$

d) $g(x) = -|x|$

e) $g(x) = |2x| - 1$

f) $g(x) = 1 - |x-1|$

8) A partir do gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x}$, esboce o gráfico das funções abaixo.

a) $g(x) = \sqrt[3]{x+3}$

b) $g(x) = \sqrt[3]{3x}$

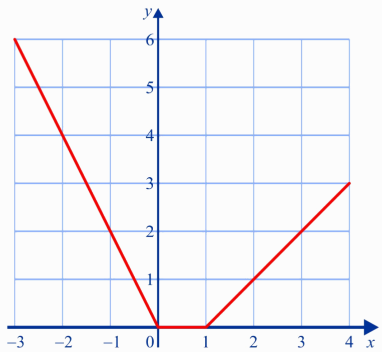
c) $g(x) = 3\sqrt[3]{x}$

d) $g(x) = -\sqrt[3]{x}$

e) $g(x) = \sqrt[3]{2x} - 1$

f) $g(x) = 1 - \sqrt[3]{x-1}$

9) A partir da função $f(x)$ cujo gráfico é dado abaixo, esboce o gráfico das funções abaixo.



a) $g(x) = f(x+3)$

b) $g(x) = f(3x)$

c) $g(x) = 3f(x)$

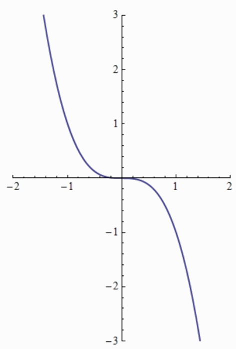
d) $g(x) = -f(x)$

e) $g(x) = f(2x) - 1$

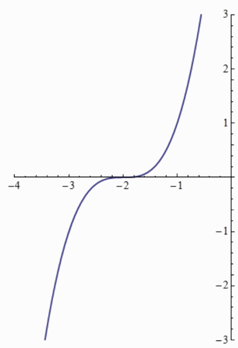
f) $g(x) = 1 - f(x-1)$

10) Identifique as funções cujos gráficos são mostrados abaixo, sabendo que elas foram obtidas através de deslocamentos horizontais e verticais do gráfico de $f(x) = x^3$.

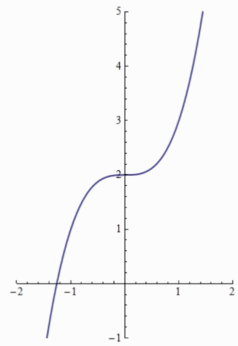
a)



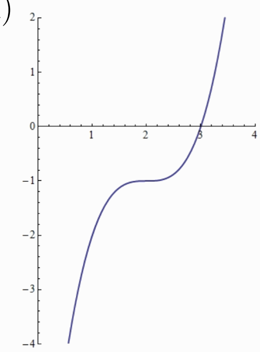
b)



c)

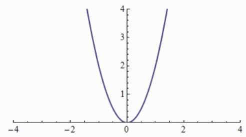


d)

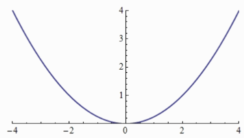


11) Identifique as funções cujos gráficos são mostrados abaixo, sabendo que elas foram obtidas através de um esticamento ou encolhimento vertical do gráfico de $f(x) = x^2$.

a)

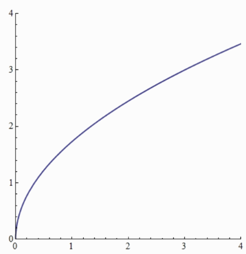


b)

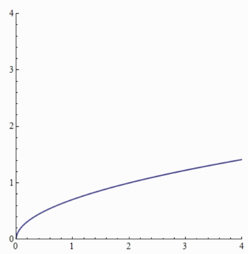


12) Identifique as funções cujos gráficos são mostrados abaixo, sabendo que elas foram obtidas através de um esticamento ou encolhimento horizontal do gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$.

a)



b)



13) Dada a função $f(x) = x^2$, defina a função g obtida movendo-se f cinco unidades para baixo e quatro unidades para a esquerda.

14) Dada a função $f(x) = x^3$, defina a função g obtida refletindo-se f em torno do eixo-y e movendo-a três unidades para cima.

15) Dada a função $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, defina a função g obtida refletindo-se f em torno do eico-x e movendo-a uma unidade para a direita.

16) Dada a função $f(x) = \sqrt{x}$, defina a função g obtida refletindo-se f em torno do eixo-y e movendo-a seis unidades para cima e duas unidades para a esquerda.

17) Dada a função $f(x) = \sqrt{x}$, defina a função g obtida refletindo-se f em torno do eico-x e do eixo-y e movendo-a duas unidades para baixo.

4.8 Função Composta e Função Inversa

Função composta

Dadas as funções f e g, cujos domínios são A e B, respectivamente, definimos a função composta $f \circ g$ por

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

O domínio de $f \circ g$ é o conjunto dos valores de $x \in A$ tais que $g(x) \in B$.

Função injetora

Uma função f, definida em um domínio D, é injetora quando, dados quaisquer valores reais $x_1, x_2 \in D$

$$\text{se } x_1 \neq x_2 \qquad \text{então} \qquad f(x_1) \neq f(x_2)$$

Teste da reta horizontal

Uma função é injetora em um domínio D se e somente se nenhuma reta horizontal intercepta seu gráfico mais de uma vez.

Funções Inversas

Seja f uma função injetora em um domínio A, com conjunto imagem B. A inversa de f, representada por f^{-1} , é a função com domínio B e conjunto imagem A definida por

$$f^{-1}(y) = x \qquad \text{se e somente se} \qquad y = f(x)$$

Cuidado para não confundir as notações

$$\operatorname{inv}\big(f\big)(x) = f^{-1}(x) \;\neq\; \big[f(x)\big]^{-1} = \frac{1}{f(x)}$$

Roteiro para a obtenção da inversa de uma função

Para encontrar a inversa de uma função f definida na forma

$$f(x) = \text{ expressão que depende de } x$$

1. Troque o termo "$f(x)$" por y, de forma que a equação se torne

$$y = \text{ expressão que depende de } x$$

2. Resolva essa equação com relação a x, ou seja, isole x de modo a obter

$$x = \text{ expressão que depende de } y$$

3. Escreva a nova função na forma

$$g(y) = \text{ expressão que depende de } y$$

g(y) = expressão que depende de y.

Propriedade da função inversa

Seja f uma função injetora em um domínio A, com conjunto imagem B. Nesse caso,

$$f\big(f^{-1}(y)\big) = y \qquad \text{para todo } y \text{ em } B$$

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x \qquad \text{para todo } x \text{ em } A$$

Exercícios Seção 4.8

Funções Compostas

1) Encontre a função $h = g \circ f$ e calcule os valores $a = h(-2)$, $b = h(0)$ e $c = h(2)$ para as funções

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \;\text{ e }\; g(x) = 3x^3 + 1$$

2) Encontre a função $h = g \circ f$ e calcule os valores $a = h(0)$, $b = h(2)$ e $c = h(4)$ para

$$f(x) = e^{x^2-1} \;\text{ e }\; g(x) = 3\ln(x) + 1$$

3) Para cada caso, determine as expressões das funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$

a) $f(x) = x^2 + x + 1$ $\quad g(x) = x^2$

b) $f(x) = \sqrt{x} + 1$ $\quad g(x) = x^2 - 1$

c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

d) $f(x) = \sqrt{x+1}$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{x-1}$

4) Para cada caso, calcule $h(2)$, sendo que $h = g \circ f$

a) $f(x) = x^2 + x + 1$ $\quad g(x) = x^2$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ $\quad g(x) = 3x^3 + 1$

c) $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ $\qquad g(x) = \sqrt{2}$

5) Para cada função h, encontre as funções f e g tais que $h = g \circ f$. Note que a solução não é única.

a) $h(x) = (2x^3 + x^2 + 1)^5$

b) $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

c) $h(x) = (2x - 3)^{3/2}$

d) $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

e) $h(x) = \dfrac{1}{(3x^2 + 2)^{3/2}}$

f) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}} + \sqrt{2x+1}$

6) Calcule $f(a+h) - f(a)$ para cada função e simplifique sua resposta

a) $f(x) = 3x + 4$ $\qquad$ b) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

7) Se $f(x) = x^2 + 1$, calcule e simplifique a expressão

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad h \neq 0$$

Funções Inversas

8) Determine se as funções são injetoras.

a) $f(x) = 6 - 5x$

b) $f(x) = \dfrac{x}{2} - 1$

c) $f(x) = \sqrt{x - 4}$

d) $f(x) = 1 - x^2$

e) $f(x) = \dfrac{x}{2}$

f) $f(x) = x^3 + x$

g) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

h) $f(x) = x^2 - 5$, para $x \geq 0$

9) Dadas as funções abaixo, determine a função inversa, bem como os domínios de f e de f^{-1}.

a) $f(x) = 3x - 2$

b) $f(x) = \sqrt{9 - x}$

c) $f(x) = \sqrt{x + 1}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x + 4}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, para $x > 0$

f) $f(x) = \dfrac{x - 5}{3}$

g) $f(x) = \dfrac{5}{x + 1}$

h) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2}$

i) $f(x) = 1 + x^2$, para $x \geq 0$

j) $f(x) = \sqrt{4 - 25x}$

k) $f(x) = \sqrt{16x - 49}$

l) $f(x) = \dfrac{4x + 7}{5x - 12}$

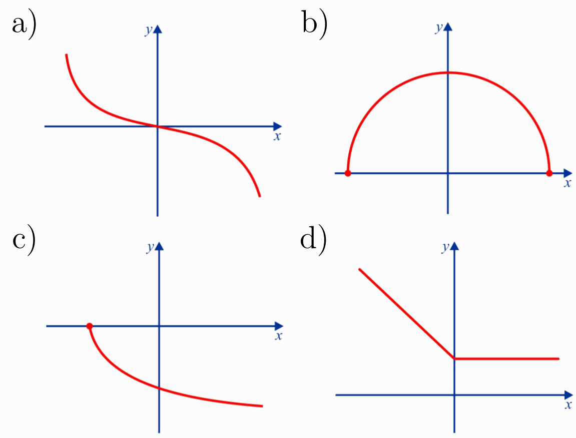
m) $f(x) = \dfrac{3x - 4}{6 - 2x}$

n) $f(x) = \dfrac{3 - 2x}{x + 4}$

o) $f(x) = \dfrac{400 - 25x}{80 - 2x}$

p) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{3x - 2}}$

10) Dados os gráficos abaixo, determine se as funções correspondentes possuem inversa.



11) Uma função f tem a forma $f(x) = -5x + b$, em que b é uma constante real. Sabendo que $f^{-1}(14) = -2$, determine o valor de b e a expressão da inversa.

12) Dada a tabela abaixo, esboce o gráfico da inversa de $f(x)$.

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-1	$1{,}5$	4	$6{,}5$	9	$11{,}5$

13) Para cada função abaixo, restrinja o domínio de modo que a função seja injetora. Determine, então, a inversa da função para o domínio escolhido.

a) $f(x) = (x-2)^2$ b) $f(x) = |x|$

14) Use a propriedade das funções inversas para mostrar que g é a inversa de f e vice-versa.

a) $f(x) = \dfrac{3x-1}{5}$ $g(y) = \dfrac{5y+1}{3}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $g(y) = y^3$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $g(y) = \dfrac{1}{y}$

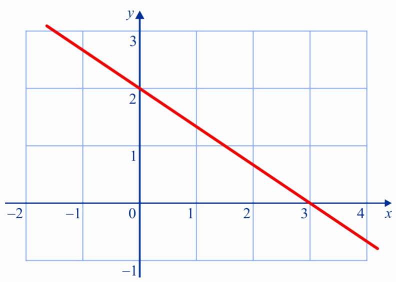
d) $f(x) = 2 - x^5$ $g(y) = \sqrt[5]{2-y}$

e) $f(x) = \dfrac{2x-5}{8-3x}$ $g(y) = \dfrac{8y+5}{3y+2}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ $g(y) = \sqrt{\dfrac{y}{1-y}}$

com $x \geq 0$ e $0 \leq y < 1$

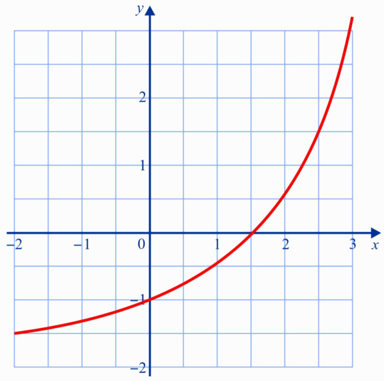
15) A figura abaixo mostra o gráfico de $y = f(x)$.



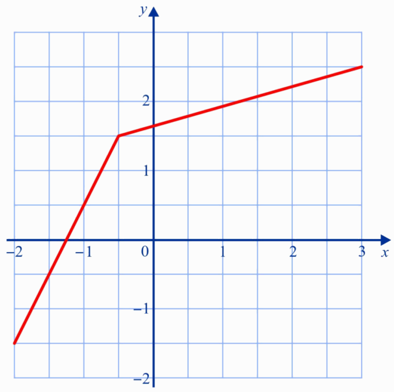
a) Determine a expressão de $f(x)$.

b) Determine a inversa de f.

16) A figura abaixo mostra o gráfico de f. Sobre o mesmo sistema de eixos Cartesianos, trace o gráfico de f^{-1}.



17) A figura abaixo mostra o gráfico de f. Sobre o mesmo sistema de eixos Cartesianos, trace o gráfico de f^{-1}.



18) Para cada função abaixo, trace o gráfico de f e de f^{-1} sobre o mesmo sistema de eixos Cartesianos e defina o domínio e o conjunto imagem de f^{-1}

a) $f(x) = \dfrac{x}{2} - 1$ c) $f(x) = \dfrac{x}{2}$

b) $f(x) = \sqrt{x+2}$ d) $f(x) = x^3 - 2$

4.9 Funções Exponenciais e Logarítmicas

Funções Exponenciais

A função exponencial com base a é definida por

$$f(x) = a^x$$

em que $a > 0$, $a \neq 1$ e x é qualquer número real.

Gráfico da função exponencial

As características comuns aos gráficos de funções exponenciais na forma $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, são

1. O gráfico é contínuo.
2. O domínio é $(-\infty, \infty)$ e o conjunto imagem é $(0, \infty)$.
3. O intercepto-y é 1 e não há intercepto-x.

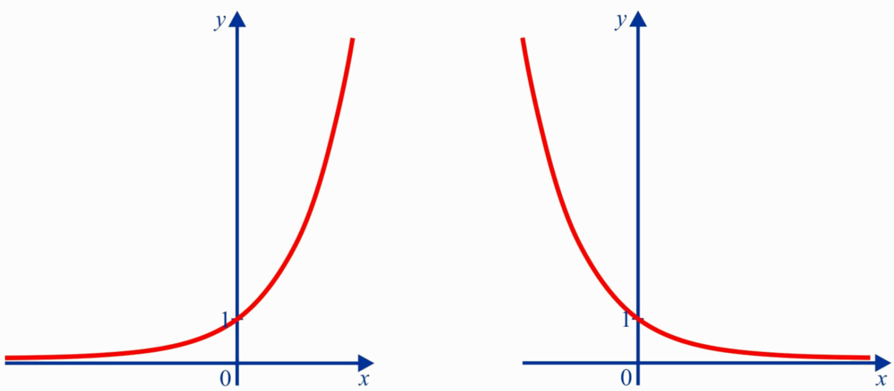
Além disso,

1. Se $a > 1$, o gráfico é crescente, isso é,

$$f(x) \to 0 \quad \text{quando} \quad x \to -\infty \qquad \text{e} \qquad f(x) \to \infty \quad \text{quando} \quad x \to \infty$$

2. Se $0 < a < 1$ o gráfico é decrescente isso é,

$$f(x) \to \infty \quad \text{quando} \quad x \to -\infty \qquad \text{e} \qquad f(x) \to 0 \quad \text{quando} \quad x \to \infty$$



Função Logarítmica

Seja a uma constante real tal que $a > 0$ e $a \neq 1$. Se $x > 0$, então dizemos que

$$y = \log_a(x) \qquad \text{se e somente se} \qquad a^y = x$$

A função definida por $f(x) = \log_a(x)$ é denominada função logarítmica na base a.

Propriedades da Função Logarítmica

Propriedades derivadas da definição de logaritmo

Propriedade	*Motivo*	*Exemplo*
$\log_a(1) = 0$	Sabemos que $a^0 = 1$	$\log_8(1) = 0$
$\log_a(a) = 1$	Sabemos que $a^1 = a$	$\log_3(3) = 1$
$\log_a(a^x) = x$	$\log_a(x)$ é a inversa de a^x	$\log_7(74) = 4$
$a^{\log_a(x)} = x$	a^x é a inversa de $\log_a(x)$	$10^{\log_{10}(13)} = 13$

Seja a uma constante real tal que $a > 0$ e $a \neq 1$, e seja c uma constante real qualquer.

Se $x > 0$ e $y > 0$, então,

1. Logaritmo do produto

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

2. Logaritmo do quociente

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

3. Logaritmo da potência

$$\log_a(x^c) = c\log_a(x)$$

Logaritmos Usuais

Os logaritmos mais comumente empregados possuem uma notação particular, para facilitar seu uso.

- O logaritmo na base 10, também chamado logaritmo comum ou decimal, que é apresentado sem a indicação da base.

  $$\log(x) = \log_{10}(x)$$

  A função logarítmica $f(x) = \log(x)$ tem como inversa a função exponencial $g(y) = 10^y$. Desse modo,

  $$y = \log(x) \qquad \text{se e somente se} \qquad 10^y = x$$

- O logaritmo na base e, também chamado logaritmo natural ou Neperiano, que é representado por ln.

  $$\ln(x) = \log_e(x)$$

  A inversa de $f(x) = \ln(x)$ é a função exponencial $g(y) = e^y$. Assim,

  $$y = \ln(x) \qquad \text{se e somente se} \qquad e^y = x$$

Mudança de Base

Sejam a, b e x números reais maiores que zero, e suponha que $a \neq 1$ e $b \neq 1$. Nesse caso,

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Gráfico de funções logarítmicas

Seja a uma constante real tal que $a > 0$ e $a \neq 1$. O gráfico de $f(x) = \log_a(x)$,

- é contínuo;
- tem domínio $(0, \infty)$ e conjunto imagem é $\mathbb{R}$;
- tem intercepto-x em $(1,0)$ e não tem intercepto-y.

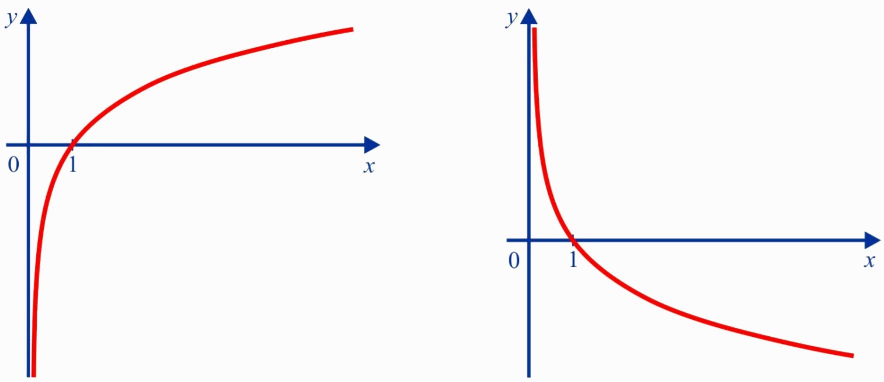
Além disso,

1. Se $a > 1$, o gráfico é crescente, isso é,

$$f(x) \to -\infty \quad \text{quando} \quad x \to 0^+ \qquad \text{e} \qquad f(x) \to \infty \quad \text{quando} \quad x \to \infty$$

2. Se $0 < a < 1$ o gráfico é decrescente isso é,

$$f(x) \to \infty \quad \text{quando} \quad x \to 0^+ \qquad \text{e} \qquad f(x) \to -\infty \quad \text{quando} \quad x \to \infty$$



Roteiro Para a Solução de Equações Exponenciais

Para resolver uma equação exponencial em relação à variável x,

1. Reescreva a equação de modo a obter

$$a^{\text{expressão com } x} = c$$

ou

$$a^{\text{expressão com } x} = c\, b^{\text{outra expressão com } x}$$

2. Aplique o logaritmo aos dois lados da equação.
3. Simplifique a equação usando as propriedades do logaritmo.
4. Resolva a equação resultante.

Exemplo 4.9.1: Encontre o valor de x tal que $4^x = 5$.

$$\begin{aligned} 4^x &= 5 \\ \log_4(4^x) &= \log_4(5) \\ x &= \log_4(5) \\ x &= \frac{\log(5)}{\log(4)} \\ x &= 1{,}16096 \end{aligned}$$

Exemplo 4.9.2: Encontre o valor de x tal que $6^{x-1} + 3 = 7$.

$$\begin{aligned} 6^{x-1} + 3 &= 7 \\ 6^{x-1} &= 4 \\ \log(6^{x-1}) &= \log(4) \\ (x-1)\log(6) &= \log(4) \\ x - 1 &= \frac{\log(4)}{\log(6)} \\ x &= 1 + \frac{\log(4)}{\log(6)} \\ x &= 1{,}77371 \end{aligned}$$

Roteiro para a solução de equações logarítmicas

Para resolver uma equação logarítmica na variável x, dada a constante c,

1. Reescreva a equação de modo a obter

$$\log_a(\text{expressão com } x) = c$$

ou

$$\log_a(\text{expressão com } x) = \log_a(\text{outra expressão com } x) + c$$

2. Aplique a função exponencial na base a em cada um dos dois lados.
3. Simplifique a equação usando as propriedades do logaritmo.
4. Resolva a equação resultante.
5. Confira se as soluções encontradas satisfazem a equação original.

Exemplo 4.9.3: Encontre os valores de x tais que $\log_2(x) = 3/2$.

$$\begin{aligned} \log_2(x) &= 3/2 \\ 2^{\log_2(x)} &= 2^{3/2} \\ x &= 2^{3/2} \\ x &= 2{,}82843 \end{aligned}$$

Exemplo 4.9.4: Encontre os valores de x tais que $\log(2x + 100) = 3$.

$$\begin{aligned} \log(2x+100) &= 3 \\ 10^{\log(2x+100)} &= 10^3 \\ 2x + 100 &= 1000 \\ 2x &= 900 \\ x &= 450 \end{aligned}$$

Exercícios Seção 4.9

Funções Exponenciais e Logarítmicas

1) Esboce o gráfico da função $f(x) = 10^x$ e determine as interseções do gráfico com os eixos x e y.

2) Esboce no mesmo plano cartesiano as gráficos das funções exponenciais dadas por

a) $y = 2^x$ b) $y = 2^{-x}$ c) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

3) Reescreva cada igualdade usando logaritmos

a) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3} = \dfrac{27}{8}$ b) $16^{-3/4} = 0{,}125$

4) Resolva cada uma das equações na variável x

a) $\log_4(2x + 1) = 2$

b) $\ln(x - 1) + \ln 4 = \ln(2x + 4) - \ln 2$

5) Dado que $\ln 2 = x$, $\ln 3 = y$ e $\ln 5 = z$, expresse os logaritmos em termos de x, y e z.

a) $\ln 30$ b) $\ln 3{,}6$

6) Esboce os gráficos das equações dadas nos mesmos eixos coordenados

a) $y = 2^x$ $y = \log_2 x$

b) $y = e^{3x}$ $y = \ln(3x)$

7) Determine se a afirmação é verdadeira ou falsa. Se verdadeira, explique porque; se falsa, dê um exemplo para mostrar que é falsa.

a) $(\ln x)^3 = 3 \ln x$ para todo $x \in (0,\infty)$

b) $\ln a - \ln b = \ln(a - b)$ para todos números reais positivos a e b

8) Dado que $2^x = e^{kx}$, encontre k

9) Mostre que se b é um número real não-negativo, então qualquer equação do tipo $y = b^x$ pode ser escrita na forma $y = e^{kx}$, para algum número real k.

10) Use a definição de logaritmo para provar as igualdades. Dica: *Sejam* $\log_b = p$ *e* $\log_b n = q$. *Então* $b^p = m$ *e* $b^q = n$.

a) $\log_b mn = \log_b m + \log_b n$

b) $\log_b \dfrac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$

c) $\log_b m^n = n \log_n m$

d) $\log_b 1 = 0$

e) $\log_b b = 1$

11) Esboce o gráfico das funções

a) $y = \log_2(x + 3)$

b) $f(x) = e^x + e^{-x}$

c) $g(x) = \big|\ \ln|x|\ \big|$

12) Esboce o gráfico da função $f(x) = \ln x$ e determine as interseções do gráfico com os eixos x e y.

13) Sem usar calculadora, determine o valor de cada função abaixo nos pontos indicados.

a) $f(x) = 4^x$, $f(0)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(0{,}5)$, $f(2)$

b) $f(x) = 3^{-x}$, $f(0)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(0{,}5)$, $f(2)$

c) $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$, $f(0)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(0{,}5)$, $f(2)$

d) $f(x) = \dfrac{1}{2} \times 2^x$, $f(0)$, $f(0{,}5)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$

e) $f(x) = 2^{x-1}$, $f(0)$, $f(0{,}5)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$

f) $f(x) = 2^{x-3} + \dfrac{1}{2}$, $f(0)$, $f(-1)$, $f(6)$

g) $f(x) = 5^{-x}$, $f(-2)$, $f(-0{,}5)$, $f(3)$

h) $f(x) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-x}$, $f(0)$, $f(-2)$, $f(0{,}5)$, $f(2)$

14) Você notou alguma semelhança nos valores encontrados nos itens (b) e (c) do exercício anterior? Explique o que ocorre. Faça o mesmo com os itens (d) e (e) do exercício.

15) Usando uma calculadora, determine o valor de cada função abaixo nos pontos indicados.

a) $f(x) = e^x$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(0{,}5)$, $f(2)$

b) $f(x) = e^{-3x}$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(0{,}5)$, $f(2)$

c) $f(x) = e^{x/2}$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(0{,}5)$, $f(2)$

d) $f(x) = \left(\dfrac{2}{5}\right)^x$, $f(-1{,}5)$, $f(0{,}5)$, $f(3{,}2)$

e) $f(x) = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{x-3}$, $f(-4{,}5)$, $f(2)$, $f(\pi)$

f) $f(x) = 2{,}4^{0{,}7x}$, $f(-1{,}2)$, $f(0{,}7)$, $f(2{,}4)$

16) Esboce o gráfico das funções

a) $f(x) = 4^x$

b) $f(x) = 3^{-x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{2}2^x$

17) Em um mesmo plano Cartesiano, esboce os gráficos das funções f e g dadas abaixo.

a) $f(x) = 1{,}5^x$ $\qquad g(x) = 1{,}5^{-x}$

b) $f(x) = 1{,}2^x$ $\qquad g(x) = 1{,}8^x$

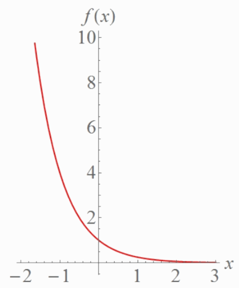
c) $f(x) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ $\qquad g(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

d) $f(x) = 2^{2x}$ $\qquad g(x) = 4^x$

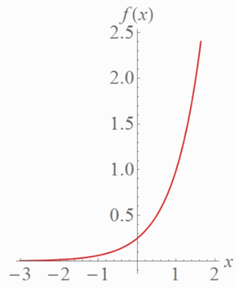
e) $f(x) = \left(\dfrac{3}{5}\right)^x$ $\qquad g(x) = \left(\dfrac{5}{3}\right)^x$

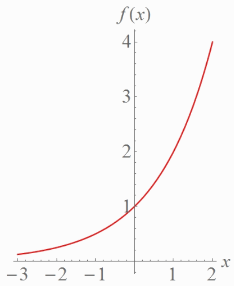
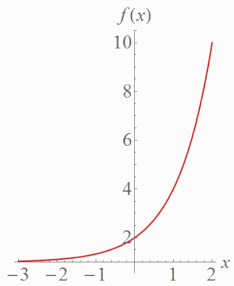
18) Relacione o gráfico à função.

a)



b)



c)  d) 

a) $f_1(x) = 3^x + 11$

b) $f_2(x) = 4^{x-1}$

c) $f_3(x) = 4^{-x}$

d) $f_4(x) = 2^x$

19) Sabemos que, se $\log_4(4096) = 6$, então $4^6 = 4096$. Usando essa ideia, reescreva as identidades abaixo na forma exponencial.

a) $\log_5(125) = 3$

b) $\log_8(32768) = 5$

c) $\log_9(81) = 2$

d) $\log_2(^1/_8) = -3$

e) $\log_2 56(4) = 14$

f) $\log_7(1) = 0$

g) $\log\left(\dfrac{1}{100}\right) = -2$

h) $\log_2 7(3) = {}^1/_3$

20) Sabemos que, se $3^4 = 81$, então $\log_3(81) = 4$. Usando essa ideia, reescreva as identidades abaixo na forma logarítmica.

a) $2^9 = 512$

b) $6^5 = 7776$

c) $10^{-3} = \dfrac{1}{1000}$

d) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^3 = \dfrac{1}{64}$

e) $135^0 = 1$

f) $729^{1/6} = 3$

g) $(\sqrt{2})^8 = 16$

h) $125^{1/3} = 5$

21) Usando uma calculadora, determine

a) $\log(2)$

b) $\log(20)$

c) $\log(200)$

d) $\log\left(\dfrac{1}{2}\right)$

e) $\log(0{,}2)$

f) $\log(0{,}02)$

g) $\log(\sqrt{3})$

h) $\log(5{,}7)$

i) $\log\left(1 + \dfrac{4}{7}\right)$

22) Usando uma calculadora, determine

a) $\ln(3)$

b) $\ln(30)$

c) $\ln(30^2)$

d) $\log\left(\dfrac{1}{3}\right)$

e) $\ln(0{,}03)$

f) $\ln(2{,}7183)$

23) Sem usar calculadora, determine

a) $\log(5) + \log(20)$

b) $\log_2(96) + \log_2(1/3)$

c) $\log_3(45) - \log_3(5)$

d) $\log_5(15) - \log_5(75)$

e) $\log_{1/6}(1/3) + \log_{1/6}(1/12)$

f) $\log_{\sqrt{3}}(18) - \log_{\sqrt{3}}(2)$

g) $\log_e(e^5) + \log_e(e^2)$

h) $\ln(e^5) \times \ln(e^2)$

i) $\log_2(8^5)$

j) $\log_2\left(\dfrac{1}{4^3}\right)$

k) $\log_3(81^{1/5})$

24) Sem usar calculadora, determine

a) $\log_2(1)$

b) $\log_{1/5}(1)$

c) $\log_5(5)$

d) $\log_{1/2}(1/2)$

e) $\log_5(5^3)$

f) $\log_4(4^{-1/3})$

g) $\log_2(32)$

h) $\log_3(81)$

i) $\log_2(1/8)$

j) $\log_2(0{,}25)$

k) $\log_3(\sqrt{3})$

l) $\log_3(\sqrt[4]{3})$

m) $\log_3(\sqrt[5]{3^3})$

n) $\log_4(2)$

o) $\log_8(2)$

p) $\log_{\sqrt{3}}(3)$

q) $2^{\log_2(5)}$

r) $10^{\log(7)}$

s) $e^{\ln(8)}$

t) $e^{\ln(1/3)}$

25) Usando uma calculadora científica e a regra de mudança de base, obtenha valores aproximados para

a) $\log_2(3)$

b) $\log_5(2)$

c) $\log_8(24)$

d) $\log_6\left(\dfrac{1}{12}\right)$

e) $\log_{1/3}(8)$

f) $\log_{2,5}(3{,}1)$

g) $\log_{1/3}(9)$

h) $\log_4(625)$

i) $\log_{0,1}(16)$

26) Usando uma calculadora científica e a regra de mudança de base, reescreva cada função exponencial abaixo na base indicada.

a) 2^x na base 10

b) 10^x na base 5

c) 5^{4x} na base 2

d) 4^x na base e

e) e^x na base 10

f) $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ na base 3

27) Mostre, com um exemplo, que

a) $\log(a+b) \neq \log(a) + \log(b)$

b) $\log(a-b) \neq \log(a) - \log(b)$

28) Supondo que $\log_x(2) = a$, $\log_x(3) = b$ e $\log_x(7) = c$, escreva $\log_x(756)$ em função de a, b e c.

29) Determine o domínio e trace o gráfico das funções abaixo.

a) $f(x) = 2\log(x-1)$

b) $f(x) = \log(x+2)$

c) $f(x) = -\log(x+1)$

d) $f(x) = \log(1-x)$

30) Determine o domínio das funções abaixo.

a) $f(x) = \log_2(2x-5)$

b) $f(x) = \log(15-4x^2)$

c) $f(x) = \ln(-x^2+2x+3)$

31) Trace, em um mesmo plano, os gráficos de $f(x) = 3^x$ e $g(x) = \log_3(x)$.

32) Em um mesmo plano, esboce os gráficos de $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = \ln(x-2)$ e $h(x) = \ln(1/x)$.

33) Usando as propriedades dos logaritmos, expanda as expressões abaixo. Suponha sempre que as variáveis pertençam ao domínio das expressões.

a) $\log(4x)$

b) $\log_2(16x^3)$

c) $\log_3(yx^3)$

d) $\log_2\left(2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$

e) $\log\left(x^{-2}(x-4)\right)$

f) $\ln\left(\frac{x}{e}\right)$

g) $\log_2\left(\frac{8}{x^2}\right)$

h) $\log\left(\frac{x+3}{x-2}\right)$

i) $\log_2\left(\frac{x}{w^5z^2}\right)$

j) $\log\left(\sqrt{x^3}\right)$

k) $\log_2\left(\sqrt{xy}\right)$

l) $\log_5\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

m) $\log_3\left(x\sqrt{x}\right)$

n) $\log_3\left(\sqrt[3]{x^2w}\right)$

o) $\ln\left(\sqrt[3]{y/w^4}\right)$

p) $\log\left(6/\sqrt[3]{x^2}\right)$

q) $\log_2\left(\sqrt{(x+1)}\right)$

r) $\log_5\left(x\sqrt{5/y}\right)$

34) Usando as propriedades dos logaritmos, escreva cada expressão abaixo como o logaritmo de um único termo. Suponha sempre que as variáveis pertençam ao domínio das expressões.

a) $\log_2(x) - \log_2(y)$

b) $3\log_2(x) + 2\log_2(5)$

c) $2\log(3x) + \log(x+1)$

d) $\frac{\log_2(x) - 3\log_2(z)}{2}$

e) $-2\log_4(x)$

f) $\frac{1}{3}\log_2(x)$

g) $\log_2(6-x) - \frac{1}{2}\log_2(x)$

h) $\log_2(x^2-1) - \log_2(x+1)$

i) $\log(x) - 2\log\left(\dfrac{1}{x}\right) + \log(5)$

j) $\dfrac{1}{2}\log(x) - \dfrac{1}{2}\log(2)$

k) $\dfrac{1}{2}\log_2(x) + 2\log_2(y) - \dfrac{1}{3}\log_2(z)$

l) $\dfrac{4}{3}\log_2(x-1) - \dfrac{1}{3}\log_2(x+1)$

m) $3\log_4(2x+3) - \log_2(x+2)$

n) $3\left[\ln(3) + \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]$

o) $2\left[\log(x) + \dfrac{1}{2}\log(y)\right] - 4\log(z)$

p) $2\left[\log(x+3) - \log\left(\dfrac{x}{2}\right)\right] - \dfrac{3}{2}\log(x)$

35) Usando alguma mudança de base, além das propriedades dos logaritmos, simplifique as expressões abaixo. Suponha sempre que as variáveis pertençam ao domínio das expressões.

a) $\dfrac{\log(3x) - \log(6)}{\log(2)}$

b) $\dfrac{\log_6(2x) + \log_6(5)}{\log_6(10)}$

c) $\dfrac{\log_5(81x)}{\log_5(3)}$

d) $\dfrac{\log_2(x)}{2\log_2(5)}$

e) $\dfrac{\log(x-4)}{\ln(x-4)}$

f) $\log_2(x) - \log_4(x)$

g) $\dfrac{1}{3}\log(x) + \log_{1000}(x)$

h) $\log_3(5x^2) + \log_{1/3}(x)$

i) $\ln(x)\log(e)$

j) $\log(x)\log_x(10)$

36) Resolva as equações.

a) $3^{-x} = \dfrac{1}{81}$

b) $e^{3x-1} = 100$

c) $4^{3x+2} = 5^{x-1}$

d) $3^{2x-1} = 4^{x+2}$

e) $\dfrac{100}{1+2^{3-x/2}} = 20$

f) $3^{3x+4} = 27^{2x-2}$

g) $\dfrac{50}{1+3\times 2^x} = 2$

h) $5^{2x+3} = 50$

i) $4^{2-x} = \dfrac{1}{3}$

j) $3(2^{x+4} - 5) = 12$

k) $3^x = 2^x + 2^{x+1}$

l) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1} = 64$

m) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x} = 27$

n) $5^{2x-7} = 125$

o) $3^{x+1} = 2^{2x-3}$

p) $\dfrac{20}{10+2^x} = 5$

q) $3^{2x-1} = 5^x$

r) $\dfrac{162}{3^{3x-7}} = 2$

s) $4^{2x-1} = 5^{x+1}$

t) $2^{4x-5} = 8^{1-2x}$

u) $3^{5x-2} = 9^4$

v) $2\times 3^{2x} = 6^{1-x}$

w) $4^{3x-1} = 64^{3-2x}$

x) $15^{3-7x} = 5^x$

y) $e^{x/3-1} = \dfrac{1}{e^x}$

4.10 Revisão

1) Determinar o domínio das seguintes funções

a) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1+5}$

b) $y = \dfrac{1}{x^2-4} + \dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$

c) $y = \dfrac{\sqrt{2x-3}}{x^2-5x+4}$

d) $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-5}$

2) Encontre o domínio de cada função

a) $f(x) = \sqrt{9-x}$

b) $f(x) = \dfrac{x+3}{2x^2-x-3}$

3) Seja $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$. Calcule os valores $f(-2)$, $f(a+2)$ e $f(2a)$.

4) Seja $y^2 = 2x + 1$.

a) Esboce o gráfico dessa equação

b) y é uma função de x? Por que?

c) x é uma função de y? Por que?

5) Esboce o gráfico da função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x < 1 \\ -x^2+4x-1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

6) Sejam $f(x) = 1/x$ e $g(x) = 2x + 3$. Calcule

a) $f(x)g(x)$

b) $f(x)/g(x)$

c) $f(g(x))$

d) $g(f(x))$

7) Em cada função $f(x)$ abaixo determine as raízes, caso existam; fatore, se possível; e esboce o gráfico de $y = f(x)$

a) $y = -x^2$

b) $y = 3x^2 + 8$

c) $y = -x^2 + 36$

d) $y = x^2 - 5x + 7$

e) $y = -2x^2 + 5x - 2$

f) $y = 4x^2 - 4x + 1$

g) $y = -x^2 + 4x - 4$

h) $y = 2x^2 - 4x + 3$

i) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

j) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 4x - 12$

8) Determine o máximo da função real $f(x) = -2x^2 + 4x + 12$.

9) Se a função $f : \mathbb{R} - -3 \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-3}$$

determine

a) $f(-3)$

b) o número real x tal que $f(x) = -1$.

c) Interseção com os eixos, se possível.

d) $f(x+1)$, para $x \neq 2$

e) $f(a-1)$, para $a \neq 4$

10) Construa o gráfico, no plano cartesiano, das seguintes funções

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

c) $f(x) = |x-4|$

d) $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$

e) $h(x) = \left|x^2 - 4x + 3\right|$

f) $f(x) = \left|-x^2 + 4\right|$

11) As funções f e g são dadas por $f(x) = 2x - 3$ e $g(x) = 3x + a$. Determine o valor de a sabendo que $f(2) + g(2) = 8$.

12) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que

a) $f(x) = x^2 + bx + c \qquad b,c \in \mathbb{R}$

b) $f(1) = 2$

c) $f(-1) = 12$

Nestas condições determine $f(2)$.

13) Seja $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

Se a é um número real não nulo, calcule o valor de $g(a) = f(a) - f(1/a)$ e esboce o gráfico de g.

14) Dada a função $f(x)$, que é uma função racional, a reescreva como sendo

$$f(x) = g(x) + \frac{p(x)}{q(x)}$$

onde $g(x)$, $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios e o grau de $p(x)$ é menor que o grau de $q(x)$.

a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 7x + 8}{x^2 + 1}$

b) $f(x) = \dfrac{4x^5 - x^3 + x - 4}{2x^2 + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$

15) A expressão

$$\frac{2^{3+x} - 2^{x-3}}{2^x + 2^{x-3}}$$

é igual a um número real a, determine o valor de a.

16) Seja a função $f(x) = a^x$. Quais dessas afirmações são verdadeiras

a) f é crescente se $x > 0$

b) f é crescente se $a > 0$

c) f é crescente se $a > 1$

d) f é decrescente se $a \neq 1$

e) f é decrescente se $0 < x < 1$

f) f é decrescente se $0 < a < 1$

17) Calcule o valor de x, que satisfaz a equação

$$2^{2x+1} - 3 \times 2^{x+2} = 32$$

18) Sejam as funções $f(x) = 4x + 1$ e $g(x) = 4x$, determine a solução da inequação $f(x) > g(2 - x)$

19) Supondo válidas as condições de existências dos logaritmos, quais propriedades a seguir são sempre válidas?

a) $\log(ab) = \log a \log b$

b) $\log(a + b) = \log a + \log b$

c) $\log(ab) = \log a + \log b$

d) $\log(ma) = m \log a$

e) $\log(a^m) = \log(ma)$

f) $\log(a^m) = m \log a$

g) $\log_a 3 \log_3 a = 1$

20) A expressão

$$\frac{\log_3(1) + \log_{10}(0{,}01)}{\log_2\left(\frac{1}{64}\right) \log_4\left(\sqrt{8}\right)}$$

é igual a um número real a, determine o valor de a.

21) Determine a solução da equação $(0{,}01)^x = 50$.

22) O crescimento de uma colônia de bactérias é descrito por $P(t) = \alpha 4^{\lambda t}$ onde $t \geq 0$ é o tempo, dado em horas, e $P(t)$ é a população de bactérias no instante t. Se, após 4 horas, a população inicial da colônia triplicou, determine o número de bactérias da colônia após 8 horas.

23) Se o resto da divisão do polinômio

$$p = x^4 - 4x^3 - kx - 75 \text{ por } (x - 5)$$

é 10, encontre o valor de k.

24) Esboce os gráficos de $f(x) = 5^x$ e $g(x) = 2 + x - x^2$ num mesmo plano cartesiano e determine o menor intervalo fechado que contém todas as raízes da equação $f(x) = g(x)$.

25) Seja f uma função real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 3x, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Determine o valor de $f(\sqrt{2}) + f(1/3) + f(\pi)$.

26) Uma função é par se $f(-x) = f(x)$, para todo x no domínio de e é ímpar se $f(-x) = -f(x)$, para todo x no domínio de f. Dadas as funções abaixo as classifique como par, ímpar ou nenhuma das alternativas

a) $f(x) = e^{-x^2}$

b) $f(x) = \ln x$

c) $f(x) = x^3 + x^2$

27) Dada a função real

$$f(x) = \frac{x^3 - 4}{2}$$

encontre o(s) elemento(s) do domínio de f que tem(têm) como imagem o valor 9.

28) Calcule o valor de $f(2)$ sabendo que

$$f(x+1) = \frac{3x^2 + 5}{2x^7 + 1}$$

29) Encontre os valores de A e B tais que

$$\frac{7x - 11}{x^2 - x - 6} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 2}$$

30) Deve-se construir um tanque de aço em forma de um cilindro circular reto de 3 m de altura com dois hemisférios nos extremos. O raio r ainda está por determinar. Expresse a área S da superfície do tanque em função de r.

31) Dadas as funções $f(x) = 2x + m$ e $g(x) = ax + 2$, encontre os valores de a e m tais que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ para todo número real.

32) Com base nas funções $f(x) = x^2 + 4$, $g(x) = |x|$ e $h(x) = \sqrt{x}$ determine quais das igualdades a seguir são verdadeiras.

a) $f(g(x)) = f(x)$

b) $h(g(x)) = h(x)$

c) $f(h(x)) = g(x) + 4$

d) $h(f(x)) = g(x) + 2$

33) Sejam as funções reais f e g definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3, & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x > 2 \\ 1 - x^2, & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$$

Obtenha as leis que definem $f \circ g$ e $g \circ f$.

34) O gráfico de uma função f é o segmento de reta que une os pontos $(-3,4)$ e $(3,0)$. Se f^{-1} é a função inversa de f, determine $f^{-1}(2)$.

35) Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq 1\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} \ / \ y \geq 2\}$ e a função f de A em B definida por $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Obtenha a função inversa de f.

36) Para cada função a seguir, construa num mesmo plano cartesiano os gráficos de f e f^{-1}.

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

37) Determine a expressão que representa a inversa da função $f(x) = \log_3(x + 1)$.

38) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = x^2$ e seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$g(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

com $h \neq 0$. Nessas condições, calcule $g(x)$.

39) Se $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^4$, verifique f e g são inversas uma da outra calculando $f \circ g$ e $g \circ f$.

40) Sejam $f(x) = \sqrt{x - 1}$ e $g(x) = 2x^2 - 5x + 3$. Determine os domínios das funções $f \circ g$ e $g \circ f$.

41) Considere as funções $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = ax + b$, determine o conjunto C dos pontos (a,b) tais que $f \circ g = g \circ f$.

42) Encontre a solução das inequações

a) $(x - 3)(-x^2 + 3x + 10) < 0$

b) $(x^2 - 2x + 8)(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 16) < 0$

c) $(3x - 5)(x^2 - 2x + 3) < 0$

5

Limites

5.1 Noção Intuitiva de Limite

Infinito, ∞, não é um número e não podemos fazer contas com ele. O Paradoxo do Hotel de Hilbert ilustra algumas propriedades do infinito
https://pt.wikipedia.org/wiki/Hotel_de_Hilbert

O termo limite é usado no sentido de convergência a um valor e não no de uma restrição, barreira ou fronteira.

Noção Intuitiva de Limite

Quando queremos indicar a o limite que a função $f(x)$ assume quanto x se aproxima arbitrariamente de a podemos usar duas notações equivalentes

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

ou

$$f(x) \to L \qquad \text{quando} \qquad x \to a$$

Uma função f tem limite L quando x se aproxima de a, se podemos fazer o valor de $f(x)$ tão próximo de L quanto quisermos tomando x suficientemente próximo (mas não igual) a a.

Nessa notação $x \to a$ indica que x tende a a, isso significa que x se aproxima indefinidamente de a mas nunca alcança a, em outras palavras,

$$x \to a \qquad \text{implica que} \qquad x \neq a$$

Considere a função $f(x) = \dfrac{4(x^2-4)}{x-2}$, note que ela não está definida para $x = 2$, entretanto, observe o que ocorre quando calculamos essa função para valores cada vez mais próximos de 2.

x	$f(x)$
1,5	14,000
1,9	15,600
1,99	15,960
1,999	15,996
2	$\nexists$
2,001	16,004
2,01	16,040
2,1	16,400
2,5	18,000

podemos observar que quanto mais perto x estiver de 2 mais perto o valor de $f(x)$ se aproxima de 16.

EXEMPLO 5.1.1: Descubra o limite da função no ponto indicado

a) $f(x) = x^3 \qquad x \to 2$

b) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \qquad x \to 0$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x} \qquad x \to 0 \qquad x \to -\infty \qquad x \to \infty$

Limites de algumas funções

Função constante

$$\lim_{x \to a} c = c$$

Função identidade

$$\lim_{x \to a} x = a$$

Função potência (para n número inteiro positivo)

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n$$

Função raiz (para n número inteiro positivo), se n for par precisamos impor $a > 0$

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

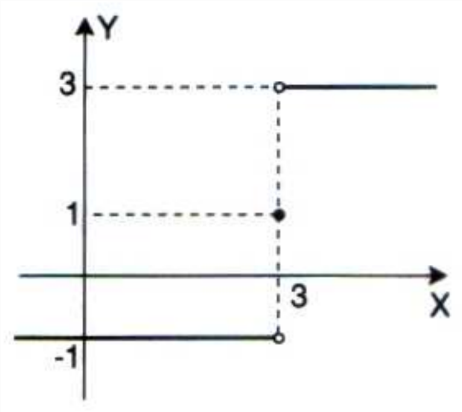
Função polinomial

$$\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$$

Exercícios Seção 5.1

Noção Intuitiva de Limite

1) Seja $f(x)$ a função definida pelo gráfico



Calcule os valores

a) $f(1)$

b) $f(2)$

c) $f(3)$

d) $f(4)$

e) $\lim_{x\to 1} f(x)$

f) $\lim_{x\to 2} f(x)$

g) $\lim_{x\to 3} f(x)$

h) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$

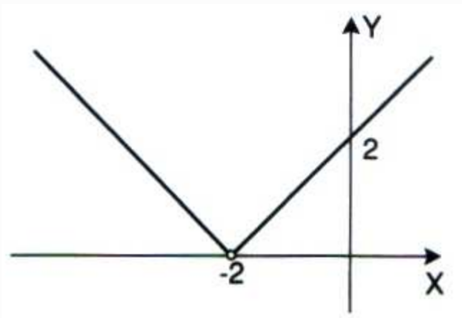
i) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$

j) $\lim_{x\to 4} f(x)$

k) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

l) $\lim_{x\to \infty} f(x)$

2) Seja $f(x)$ a função definida pelo gráfico



Calcule os valores

a) $f(0)$

b) $f(-1)$

c) $f(-2)$

d) $f(-3)$

e) $\lim_{x\to 0} f(x)$

f) $\lim_{x\to -2^+} f(x)$

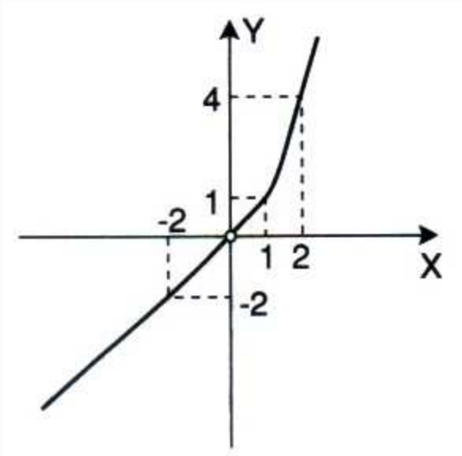
g) $\lim_{x\to -2^-} f(x)$

h) $\lim_{x\to -2} f(x)$

i) $\lim_{x\to \infty} f(x)$

j) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

3) Seja $f(x)$ a função definida pelo gráfico



Calcule os valores

a) $f(-2)$

b) $f(0)$

c) $f(1)$

d) $f(2)$

e) $\lim_{x\to 1} f(x)$

f) $\lim_{x\to 2} f(x)$

g) $\lim_{x\to 0} f(x)$

h) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

i) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

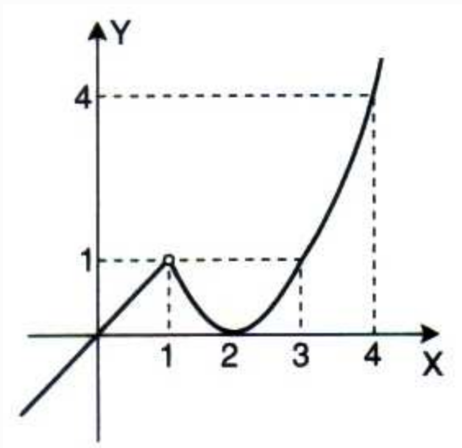
j) $\lim_{x\to 2} f(x)$

k) $\lim_{x\to -2} f(x)$

l) $\lim_{x\to \infty} f(x)$

m) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

4) Seja $f(x)$ a função definida pelo gráfico



Calcule os valores

a) $f(0)$

b) $f(1)$

c) $f(2)$

d) $f(3)$

e) $f(4)$

f) $\lim_{x\to 0} f(x)$

g) $\lim_{x\to 1} f(x)$

h) $\lim_{x\to 2} f(x)$

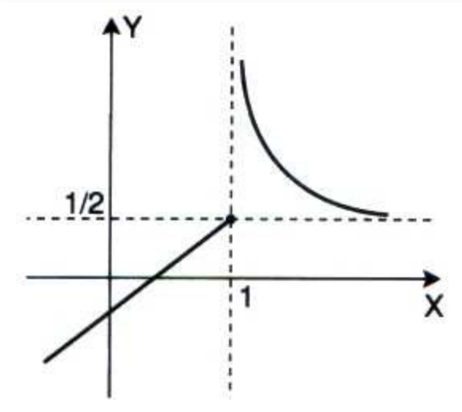
i) $\lim_{x\to 3} f(x)$

j) $\lim_{x\to 4} f(x)$

k) $\lim_{x\to \infty} f(x)$

l) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

5) Seja $f(x)$ a função definida pelo gráfico



Calcule os valores

a) $f(1)$

b) $\lim_{x\to 1} f(x)$

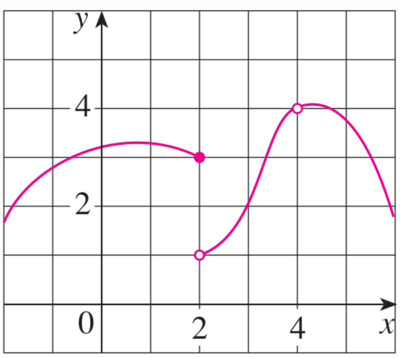
c) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

d) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

e) $\lim_{x\to \infty} f(x)$

f) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

6) Use o gráfico de f fornecido para determinar as quantidades solicitadas, caso existam. Se não existirem explique porque não existem.



a) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

b) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

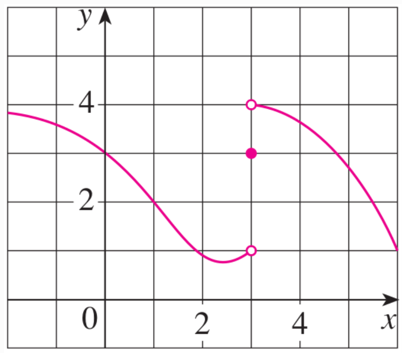
c) $\lim_{x\to 2} f(x)$

d) $f(2)$

e) $\lim_{x\to 4} f(x)$

f) $f(4)$

7) Use o gráfico de f fornecido para determinar as quantidades solicitadas, caso existam. Se não existirem explique porque não existem.



a) $\lim_{x\to 1} f(x)$

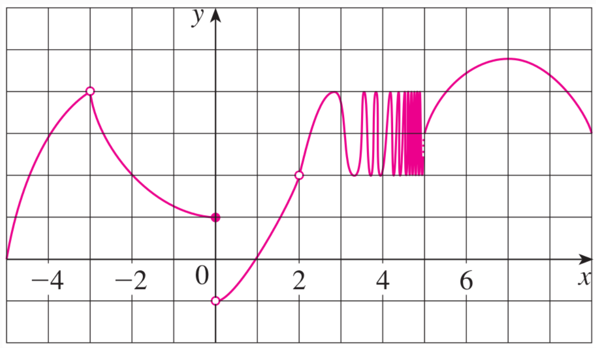
b) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$

c) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$

d) $\lim_{x\to 3} f(x)$

e) $f(3)$

8) Use o gráfico de h fornecido para determinar as quantidades solicitadas, caso existam. Se não existirem explique porque não existem.



a) $\lim_{x\to -3^-} h(x)$

b) $\lim_{x\to -3^+} h(x)$

c) $\lim_{x\to -3} h(x)$

d) $h(3)$

e) $\lim_{x\to 0^-} h(x)$

f) $\lim_{x\to 0^+} h(x)$

g) $\lim_{x\to 0} h(x)$

h) $h(0)$

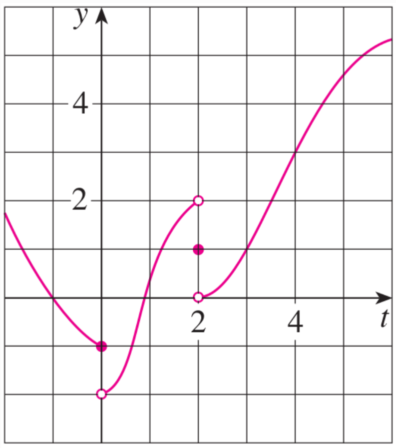
i) $\lim_{x\to 2} h(x)$

j) $h(2)$

k) $\lim_{x\to 5^-} h(x)$

l) $\lim_{x\to 5^+} h(x)$

9) Use o gráfico de g fornecido para determinar as quantidades solicitadas, caso existam. Se não existirem explique porque não existem.



a) $\lim\limits_{t\to 0^-} g(t)$

b) $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t)$

c) $\lim\limits_{t\to 0} g(t)$

d) $\lim\limits_{t\to 2^-} g(t)$

e) $\lim\limits_{t\to 2^+} g(t)$

f) $\lim\limits_{t\to 2} g(t)$

g) $g(2)$

h) $\lim\limits_{t\to 4} g(t)$

10) Descreva, analítica e graficamente, uma função $y = f(x)$ tal que $\lim_{x\to 3} f(x)$ não existe e $\lim_{x\to 6}$ existe.

11) Defina uma função $g(x)$ tal que $\lim_{x\to 2} g(x) = 4$, $g(x)$ não é definida em $x = 2$.

12) Defina e esboce o gráfico de uma função $h(x)$ tal que $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 1$ e $\lim_{x\to 0^-} h(x) = 2$.

13) Avaliando $f(x)$ nos pontos sugeridos estime o limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

a) $f(x) = x^2 + 1; \quad a = 2$

$x =$ 1,9 1,99 1,999 2,001 2,01 2,1

b) $f(x) = 2x^2 - 1; \quad a = 1$

$x =$ 0,9 0,99 0,999 1,001 1,01 1,1

c) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}; \quad a = 0$

$x =$ −0,1 −0,01 −0,001 0,001 0,01 0,1

d) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}; \quad a = 1$

$x =$ 0,9 0,09 0,009 1,001 1,01 1,1

e) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}; \quad a = 1$

$x =$ 0,9 0,09 0,009 1,001 1,01 1,1

f) $f(x) = \dfrac{x-1}{x-1}; \quad a = 1$

$x =$ 0,9 0,09 0,009 1,001 1,01 1,1

14) Esboce o gráfico da função f e calcule $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, se o limite existir, para os valores dados de a.

a) $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se } x \leq 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$

$a = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \\ -x + 2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

$a = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} -2x + 4, & \text{se } x < 1 \\ 4, & \text{se } x = 1 \\ x^2 + 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

$a = 1$

d) $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

$a = 0$

15) Esboce o gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 3 \\ 4, & \text{se } x = 3 \\ 3, & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Com base no gráfico avalie

a) $f(1)$

b) $f(2)$

c) $f(3)$

d) $f(4)$

e) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

f) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

g) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

h) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

i) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

j) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

k) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

l) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$

16) Esboce o gráfico da função e o use para determinar os valores de a para os quais $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{se } x < -1 \\ x^2, & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ 2 - x, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

17) Esboce o gráfico de uma função f que satisfaça as condições dadas.

a)
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$$
$$f(0) = 1$$

b)
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -2$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 2$$
$$f(0) = -1$$
$$f(3) = 1$$

c)
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 4$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$$
$$\lim_{x\to -2} f(x) = 2$$
$$f(3) = 3$$
$$f(-2) = 1$$

d)
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = 3$$
$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = 0$$
$$f(0) = 2$$
$$f(4) = 1$$

18) Estime o limite solicitado calculando a função nos valores indicados

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-x-2}$

$x =$ 2,5 2,1 2,05 2,01 2,005 2,001
1,5 1,9 1,95 1,99 1,995 1,999

b) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^2-2x}{x^2-x-2}$

$x =$ 0 $-0{,}5$ $-0{,}9$ $-0{,}95$ $-0{,}99$ $-0{,}999$
-2 -1.5 $-1{,}1$ $-1{,}05$ $-1{,}01$ $-1{,}001$

c) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{e^{5t}-1}{t}$

$x =$ $\pm 0{,}5$ $\pm 0{,}1$ $\pm 0{,}01$ $\pm 0{,}001$ $\pm 0{,}0001$

d) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^5-32}{h}$

$x =$ $\pm 0{,}5$ $\pm 0{,}1$ $\pm 0{,}01$ $\pm 0{,}001$ $\pm 0{,}0001$

19) Avalie a função $f(x) = x^2 - 2^x/1000$ para os valores

$x =$ 1 0,8 0,6 0,4 0,2 0,1 0,005

use esses valores para estimar o limite

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2 - \frac{2^x}{1000}\right)$$

Avalie agora $f(x)$ para os valores

$x =$ 0,04 0,02 0,01 0,005 0,003 0,001

Estime novamente o limite.

5.2 Limites Laterais

Definição de Limites Laterais: Limite lateral pela direita: é o limite da função $f(x)$ quando x tende para a apenas por valores maiores do que a, isso é, $x > a$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Limite lateral pela esquerda: é o limite da função $f(x)$ quando x tende para a apenas por valores menores do que a, isso é, $x < a$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

Nessa notação $x \to a^{\pm}$ indica que x tende a a por valores maiores ou menores do que a, em outras palavras,

$$x \to a^- \qquad \text{implica que} \qquad x < ax \to a^+ \qquad \text{implica que} \qquad x > a$$

Relação entre o limite e os limites laterais

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \text{se e somente se} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

Exercícios Seção 5.2

Limites Laterais

1) Seja $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \le 3 \\ 3x-7, & \text{se } x > 3 \end{cases}$

Calcule os limites baixo e esboce o gráfico de $f(x)$

a) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ d) $\lim_{x\to 5^-} f(x)$

b) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ e) $\lim_{x\to 5^+} f(x)$

c) $\lim_{x\to 3} f(x)$ f) $\lim_{x\to 5} f(x)$

2) Seja $h(x) = \begin{cases} x^2-2x+1, & \text{se } x \ne 3 \\ 7, & \text{se } x = 3 \end{cases}$

Calcule $\lim_{x\to 3^-} h(x)$, $\lim_{x\to 3^+} h(x)$ e $\lim_{x\to 3} h(x)$. Esboce o gráfico de $h(x)$.

3) Sendo $F(x) = |x-4|$, calcule os limites se existirem e esboce o gráfico de $F(x)$

a) $\lim_{x\to 4^-} F(x)$ c) $\lim_{x\to 4} F(x)$

b) $\lim_{x\to 4^+} F(x)$

4) Sendo $f(x) = 2 + |5x-1|$, calcule os limites se existirem e esboce o gráfico de $f(x)$

a) $\lim_{x\to 1/5^-} f(x)$ c) $\lim_{x\to 1/5} f(x)$

b) $\lim_{x\to 1/5^+} f(x)$

5) Sendo $g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3}, & \text{se } x \ne 3 \\ 0, & \text{se } x = 3 \end{cases}$

calcule os limites se existirem e esboce o gráfico de $f(x)$

a) $\lim_{x\to 3^-} g(x)$ b) $\lim_{x\to 3^+} g(x)$ c) $\lim_{x\to 3} g(x)$

6) Sendo $h(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & \text{se } x \ne 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

mostre que $f(x)$ não tem limite no ponto 0.

7) Verifique se $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}$ existe.

8) Sendo $f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{se } x < 0 \\ x^2, & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 2, & \text{se } x = 1 \\ 2-x, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

calcule os limites se existirem e esboce o gráfico de $f(x)$

a) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

f) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

g) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

h) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

9) Sendo $f(x) = \dfrac{x^2-25}{x-5}$ calcule os limites se existirem

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to -5^-} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to -5} f(x)$

10) Calcule os limites

a) $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{x^2-5x+6}{x-5}$

11) Calcule o limite unilateral indicado, quando existir.

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} (2x+4)$

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} (3x-4)$

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-3}{x+2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-1}{x^2+1}$

g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}$

h) $\lim\limits_{x\to 2^+} 2\sqrt{x-2}$

i) $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(2x+\sqrt{2+x}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1+x}{1-x}$

k) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1+x}{1-x}$

l) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

m) $\lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2+1}$

n) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-9}{x+3}$

12) Calcule os limites indicados para a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x < 0 \\ x^2, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

13) Calcule os limites indicados para a função

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3}, & \text{se } x \geq 1 \\ 2+\sqrt{x}, & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

14) Considerando que $\lfloor x \rfloor$ denota o maior número inteiro menor ou igual a x.

a) Esboce o gráfico de $\lfloor x \rfloor$

b) Calcule o limite de $\lfloor x \rfloor$ quando $x \to -2^-$, $x \to -2^+$, $x \to -2$, $x \to -2.4$, $x \to 0^-$, $x \to 0^+$, $x \to 0$, $x \to 2^-$, $x \to 2^+$, $x \to 2$.

c) Se n é um número inteiro calcule $\lim\limits_{x\to n^-} \lfloor x \rfloor$ e $\lim\limits_{x\to n^+} \lfloor x \rfloor$

d) Para quais valores de a o limite $\lim\limits_{x\to a} \lfloor x \rfloor$ existe.

15) Considerando que $\lceil x \rceil$ denota o menor número inteiro maior ou igual a x.

a) Esboce o gráfico de $\lceil x \rceil$

b) Calcule o limite de $\lceil x \rceil$ quando $x \to -2^-$, $x \to -2^+$, $x \to -2$, $x \to -2.4$, $x \to 0^-$, $x \to 0^+$, $x \to 0$, $x \to 2^-$, $x \to 2^+$, $x \to 2$.

c) Se n é um número inteiro calcule $\lim\limits_{x\to n^-} \lceil x \rceil$ e $\lim\limits_{x\to n^+} \lceil x \rceil$

d) Para quais valores de a o limite $\lim\limits_{x\to a} \lceil x \rceil$ existe.

16) Seja $f(x) = \lceil x \rceil + \lceil -x \rceil$, mostre que $\lim\limits_{x\to 2} fx$ existe mas não é igual a $f(2)$.

5.3 Limites no Infinito, Limites Inexistentes e Limites Infinitos

Chamamos de Limites no Infinito aqueles limites onde x tende para o infinito, $x \to \pm\infty$.

Quando formos calcular limites no infinito é útil saber que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \; \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \qquad \forall\, n > 0$$

Exemplo 5.3.1: Calcule os limites no infinito

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - x + 3}{2x^3 + 1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 + 2x + 4}$

Inexistência do Limite

O limite de $f(x)$ não existe para $x \to a$ quando

- $f(x) \to \pm\infty$
- $f(x)$ tende para valores diferentes de um lado e de outro
- $f(x)$ oscila entre valores diferentes

Lembre-se que $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ significa que $f(x)$ diverge para infinito. Isso acontece, por exemplo, quando $f(x) = a/b$ e a tende para um número real e b tende para zero.

Exemplo 5.3.2: Verifique a insistência dos limites

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{x^2-4}$

Limites Infinitos

Usamos o termo limite infinito quando temos um limite que diverge para o infinito positivo, $+\infty$, ou negativo, $-\infty$.

$$\lim_{a \to a} f(x) = \pm\infty$$

Aqui $x \to a$ pode significar que x tende a um número finito pelos dois lados, pela esquerda ou direita, ou que tende para o infinito.

Exercícios Seção 5.3

Limites Laterais no Infinito

1) Calcule os limites indicados

a) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{4 - x^2}{x - 2}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \sqrt{x}\, e^{-2x}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{4 - x^2}{x^2 + x - 2}$

d) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

e) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{1 - 2x^2}{x^3 + x^2 + 1}$

f) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1 + x - 2x^3}{3x^3 + x^2 - x + 1}$

2) Calcule os limites

a) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{2x - 5}{x + 8}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3 - 3x + 5}{4x^5 - 2}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{2x + 5}{\sqrt{2x^2 - 5}}$

d) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{2x + 5}{\sqrt{2x^2 - 5}}$

5.4 Calculando Limites

Propriedades dos Limites

Supunha que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = M \in \mathbb{R}$$

Então temos:

a) $\displaystyle\lim_{x \to a} [f(x)]^r = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^r = L^r$ desde que L^r exista

b) $\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x) = cL$ para c constante

c) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L \pm M$

d) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x) = LM$

e) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ desde que $M \neq 0$

Exemplo 5.4.1: Use as propriedades de limites para calcular o limite

$$\lim_{x\to 2} x^3$$

Exemplo 5.4.2: Use as propriedades de limites para calcular o limite

$$\lim_{x\to 1}(5x^4 - 2)$$

Exemplo 5.4.3: Use as propriedades de limites para calcular o limite

$$\lim_{x\to 3} 2x^3\sqrt{x^2+7}$$

Exemplo 5.4.4: Use as propriedades de limites para calcular o limite

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2+1}{x+1}$$

Formas Indeterminadas

São limites que não podem ser calculados diretamente, pois seu resultado é indeterminado

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 0\infty \qquad \infty - \infty \qquad 0^0 \qquad 1^\infty \qquad \infty^0$$

Essa notação deve ser entendida como uma abreviação de limites, não como um calculo entre valores

$$\frac{0}{0} \quad \text{significa} \quad \frac{a}{b} \quad \text{quando} \quad a \to 0 \text{ e } b \to 0$$

Temos que remover a indeterminação por manipulações algébricas, encontrando uma expressão equivalente

Exemplo 5.4.5: Manipule algebricamente a expressão para remover a indeterminação e poder calcular o limite

$$\lim_{x\to 2} \frac{4(x^2-4)}{x-2}$$

Exemplo 5.4.6: Manipule algebricamente a expressão para remover a indeterminação e poder calcular o limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$$

Propriedades dos Limites Infinitos – Soma e Subtração

Propriedades envolvendo a soma $h(x) = f(x) + g(x)$

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim h(x)$	
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty + \infty = +\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty - \infty = -\infty$
$+\infty$	k	$+\infty$	$+\infty + k = +\infty$
$-\infty$	k	$-\infty$	$-\infty + k = -\infty$

Propriedades envolvendo a subtração $h(x) = f(x) - g(x)$

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim h(x)$	
$+\infty$	$+\infty$	?	$(+\infty) - (+\infty)$ é uma indeterminação

Propriedades dos Limites Infinitos – Multiplicação

Propriedades envolvendo a multiplicação $h(x) = f(x)g(x)$

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim h(x)$		
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$	
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$	
$+\infty$	$k > 0$	$+\infty$	$+\infty \times k = +\infty$	$k > 0$
$+\infty$	$k < 0$	$-\infty$	$+\infty \times k = -\infty$	$k < 0$
$\pm\infty$	0	$?$	$+\infty \times 0$	é uma indeterminação

Propriedades dos Limites Infinitos – Divisão

Propriedades envolvendo a divisão $h(x) = f(x)/g(x)$

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim h(x)$		
k	$\pm\infty$	0	$k/(\pm\infty) = 0$	
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$?$	$(\pm\infty)/(\pm\infty)$	é uma indeterminação
$k > 0$	0^+	$+\infty$	$k/0^+ = (+\infty)$	
$+\infty$	0^+	$+\infty$	$(+\infty)/0^+$	
$k > 0$	0^-	$-\infty$	$k/0^+ = (-\infty)$	
$+\infty$	0^-	$-\infty$	$(+\infty)/0^+ = (-\infty)$	
0	0	$?$	$0/0$	é uma indeterminação

Exercícios Seção 5.4

Calculando Limites

1) [resp] Calcule os limites indicados.

a) $\lim\limits_{x\to 2} 3$

b) $\lim\limits_{x\to 2} -3$

c) $\lim\limits_{x\to 3} x$

d) $\lim\limits_{x\to 1}(1 - 2x^2)$

e) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^3 - 3x^2 + x + 2)$

f) $\lim\limits_{s\to 0}(2s^2 - 1)(2s + 4)$

g) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x+1}{x+2}$

h) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x+2}$

i) $\lim\limits_{x\to -2} \sqrt[3]{5x+2}$

j) $\lim\limits_{x\to -3} \sqrt{2x^4 + x^2}$

k) $\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x^2+8}}{2x+4}$

l) $\lim_{x \to 3} \frac{x\sqrt{x^2+7}}{2x-\sqrt{2x+3}}$

2) Calcule os limites indicados assumindo que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 3 \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 4$$

a) $\lim_{x \to a} \left[f(x)+g(x)\right]$

b) $\lim_{x \to a} 2f(x)$

c) $\lim_{x \to a} \left[2f(x)-3g(x)\right]$

d) $\lim_{x \to a} \sqrt{g(x)}$

e) $\lim_{x \to a} \sqrt[3]{5f(x)+3g(x)}$

f) $\lim_{x \to a} \frac{2f(x)-g(x)}{f(x)g(x)}$

3) [resp] Calcule os limites indicados, caso existam.

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

b) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{x+2}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2-3x}{x}$

d) $\lim_{x \to -5} \frac{x^2-25}{x+5}$

e) $\lim_{x \to 1} \frac{x}{x-1}$

f) $\lim_{s \to 2} \frac{z^3-8}{z-2}$

g) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^3+x^2-2x}$

4) [resp] Calcule o limite indicado.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

Dica: *Multiplique por* $(\sqrt{x}+1)/(\sqrt{x}+1)$

5) [resp] Calcule os limites indicados

a) $\lim_{x \to 0}(3-7x-5x^2)$

b) $\lim_{x \to 3}(3x^2-7x+2)$

c) $\lim_{x \to -1}(-x^5+6x^4+2)$

d) $\lim_{x \to 1/2}(2x+7)$

e) $\lim_{x \to 1}(x+4)^3(x+2)^{-1}$

f) $\lim_{x \to 0}(x-2)^4(x+4)$

g) $\lim_{x \to 2} \frac{x+4}{3x-1}$

h) $\lim_{t \to 2} \frac{t+3}{t+2}$

i) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

j) $\lim_{t \to 2} \frac{t^2+5t+6}{t+2}$

6) [resp] Calcule os limites indicados

a) $\lim_{t \to 2} \frac{t^2-5t+6}{t-2}$

b) $\lim_{s \to 1/2} \frac{s+4}{2s}$

c) $\lim_{x \to 4} \sqrt[3]{2x+3}$

d) $\lim_{x \to 7}(3x+2)^{2/3}$

e) $\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{2x^2-x}{3x}$

f) $\lim_{x \to 2} \frac{x\sqrt{x}-\sqrt{2}}{3x-4}$

g) $\lim_{x \to 4}(e^x+4x)$

h) $\lim_{x \to -1/3}(2x+3)^{1/4}$

7) [resp] Calcule os limites infinitos

a) $\lim_{x \to -3^+} \frac{x+2}{x+3}$

b) $\lim_{x \to -3^-} \frac{x+2}{x+3}$

c) $\lim_{x \to 1} \frac{2-x}{(x-1)^2}$

d) $\lim_{x \to 5^-} \frac{e^x}{(x-5)^3}$

e) $\lim\limits_{x\to 3^+} \ln(x^2-9)$

f) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

g) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-2x-8}{x^2-5x+6}$

8) [resp] Calcule os limites indicados

a) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{4+h}-4}{h}$

b) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$

c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-5x+6}{x-5}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-4x}{x^2-4}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-x^2+1}{x^3-1}$

f) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}$

g) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-4x}{x^2-4}$

h) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2x+2h)^2-2x^2}{h}$

i) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t}$

j) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{2x^2+7x+3}$

k) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{x-1}$

l) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x\sqrt{x^2+7}}{2x-\sqrt{2x+3}}$

m) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^3+x^2-2x}$

n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x}$

o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sqrt{x^2+7}}{2x-\sqrt{2x+4}}$

p) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x-1}$

9) Para cada uma das funções calcule $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

a) $f(x)=3x^2$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

c) $f(x)=\dfrac{2}{3x^2}$

d) $f(x)=3x^2+5x-1$

e) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

f) $f(x)=x^3$

10) Calcule os limites

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$

b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^3-1}$

11) Calcule os limites

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$

b) $\lim\limits_{t\to -2} \dfrac{t^3+4t^2+4t}{(t+2)(t-3)}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-x-2}$

d) $\lim\limits_{t\to 5/2} \dfrac{2t^2-3t-5}{2t-5}$

e) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2+(1-a)x-a}{x-a}$

f) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3x^2-17x+20}{4x^2-25x+36}$

g) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+6x+5}{x^2-3x-4}$

h) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

j) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2+h)^4}{h}$

l) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{(4+t)^2-16}{t}$

m) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{25+3t}-5}{t}$

n) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{a^2+bt}-a}{t}, a>0$

o) $\lim\limits_{h\to 1} \dfrac{\sqrt{h}-1}{h-1}$

p) $\lim\limits_{h\to -4} \dfrac{\sqrt{2(h^2-8)+h}}{h+4}$

q) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+h}-2}{h}$

r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{-x}$

s) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}$, $a,b>0$

t) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a}, a\neq 0$

u) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

v) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

w) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

x) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

12) Calcule os limites

a) $\lim\limits_{x\to 0} x^3+\sqrt{x}+\dfrac{1}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} 3x^5-4x^3+1$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x^2}$

f) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{5x+2}{|x+1|}$

g) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+3x+1}{x^2+x-6}$

h) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+3x+1}{x^2+x-6}$

i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x+1}{x^2+x-6}$

j) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3}{x+2}$

k) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5-x^3}{8x+2}$

l) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^4+3x^2+2x+1}{4-x^4}$

m) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3x-1}{x^3-2}$

13) Se $f(x)=\dfrac{3x+|x|}{7x-5|x|}$ calcule

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

14) Se $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}$ calcule

a) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

15) Calcule os limites

a) $\lim\limits_{x\to\infty} 3x^3+4x^2-1$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} 2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2}$

c) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t+1}{t^2+1}$

d) $\lim\limits_{t\to -\infty} \dfrac{t+1}{t^2+1}$

e) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t^2-2t+3}{2t^2+5t-3}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^5-3x^3+2}{-x^2+7}$

g) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^5-x^2+7}{2-x^2}$

h) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-5x^3+2}{7x^3+3}$

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3x+1}{x}$

j) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\sqrt{x}+3x-10}{x^3}$

k) $\lim_{t\to\infty} \frac{t^2-1}{t-4}$

16) Calcule os limites

a) $\lim_{v\to\infty} \frac{v\sqrt{v}-1}{3v-1}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

d) $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$

e) $\lim_{x\to\infty} \frac{10x^2-3x+4}{3x^2-1}$

f) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x+1}{x^2-1}$

g) $\lim_{s\to\infty} \frac{8-s}{\sqrt{s^2+7}}$

h) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2-7}}{x+3}$

i) $\lim_{s\to\infty} \sqrt[3]{\frac{3s^7-4s^5}{2s^7+1}}$

j) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2-7}}{x+3}$

k) $\lim_{y\to\infty} \frac{3-y}{\sqrt{5+4y^2}}$

l) $\lim_{y\to-\infty} \frac{3-y}{\sqrt{5+4y^2}}$

17) Calcule os limites

a) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$

b) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{2}\,x$

c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3-x^2+x-1}{x^4+x^3-x+1}$

d) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{16x^4+15x^3-2x+1}-2x$

18) Calcule os limites

a) $\lim_{x\to3^+} \frac{x}{x-3}$

b) $\lim_{x\to3^-} \frac{x}{x-3}$

c) $\lim_{x\to2^+} \frac{x}{x^2-4}$

d) $\lim_{x\to2^-} \frac{x}{x^2-4}$

e) $\lim_{y\to6^+} \frac{y+6}{y^2-36}$

f) $\lim_{y\to6^-} \frac{y+6}{y^2-36}$

g) $\lim_{x\to4^+} \frac{3-x}{x^2-2x-8}$

h) $\lim_{x\to4^-} \frac{3-x}{x^2-2x-8}$

i) $\lim_{x\to3^+} \frac{1}{|x-3|}$

j) $\lim_{x\to3^-} \frac{1}{|x-3|}$

5.5 Assíntotas Horizontais e Verticais

Assintota Horizontal

Reta horizontal para o qual o gráfico de $f(x)$ se aproxima quando $x\to\infty$.

Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

então o gráfico de f se aproxima da reta $y = L$ quando $x\to\infty$.

Se $\lim_{x \to -\infty} f(x) = M$
então o gráfico de f se aproxima da reta $y = M$ quando $x \to -\infty$.

Exemplo 5.5.1: Encontre as assintotas horizontais da função

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

Exemplo 5.5.2: Encontre as assintotas horizontais da função

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Exemplo 5.5.3: Encontre as assintotas horizontais da função

$$f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$$

Assintota Vertical

Reta vertical para o qual o gráfico de $f(x)$ se aproxima quando $x \to a$, isso é, se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

então o gráfico de f se aproxima da reta $x = a$ quando x se aproxima de a.

Exemplo 5.5.4: Encontre as assintotas verticais da função

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Exemplo 5.5.5: Encontre as assintotas verticais da função

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Exercícios Seção 5.5

Assíntotas Horizontais e Verticais

1) Encontre as assintotas verticais da função

$$y = \frac{x^2+1}{3x-2x^2}$$

2) Determine as assíntotas horizontais e verticais do gráfico de cada função.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

c) $f(x) = -\dfrac{2}{x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

e) $h(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$

f) $f(t) = \dfrac{t^2}{t^2-9}$

g) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-x-6}$

h) $g(t) = 2 + \dfrac{5}{(t-2)^2}$

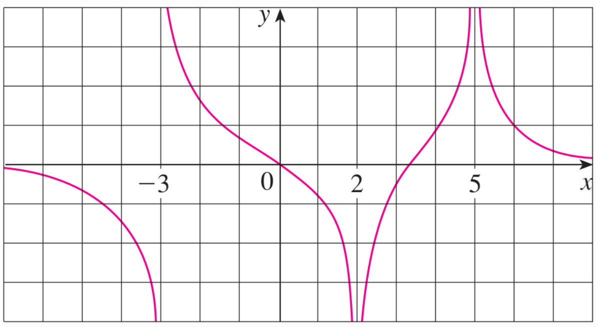
i) $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x-3}$

j) $h(x) = \dfrac{2-x^2}{x^2+x}$

k) $g(x) = \dfrac{x^3-x}{x(x+1)}$

l) $f(x) = \dfrac{x^4-x^2}{x(x-1)(x+2)}$

3) Use o gráfico de g fornecido para determinar as quantidades solicitadas, caso existam. Se não existirem explique porque não existem.



a) $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$

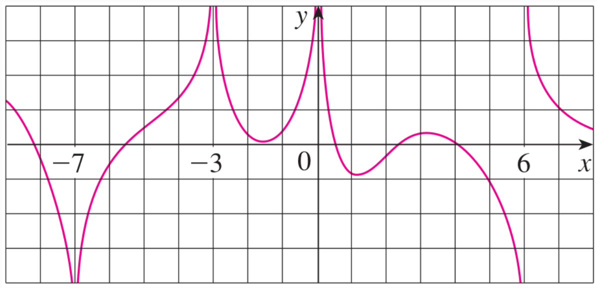
b) $\lim\limits_{x\to 5} g(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x)$

Escreva as equações das assintotas verticais de g.

4) Use o gráfico de f fornecido para determinar as quantidades solicitadas, caso existam. Se não existirem explique porque não existem.



a) $\lim\limits_{x\to -7} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 6^+} f(x)$

Escreva as equações das assintotas verticais de f.

5) Determine as assintotas horizontais e verticais do gráfico das funções

a) $f(x) = \dfrac{4}{x-4}$

b) $f(x) = \dfrac{-3}{x+2}$

c) $f(x) = \dfrac{4}{x^2-3x+2}$

d) $f(x) = \dfrac{-1}{(x-3)(x+4)}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$

f) $f(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{x-3}}$

g) $f(x) = \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2-16}}$

h) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x-12}}$

i) $f(x) = e^{1/x}$

j) $f(x) = e^x - 1$

k) $f(x) = \ln x$

6) Considerando cada função a seguir determine

i) seu domínio, imagem e o conjunto onde ela é contínua

ii) suas assíntotas horizontais

iii) suas assíntotas verticais

a) $f(x) = \dfrac{(2x+1)^2}{x+1}$

b) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x - 1}{2 - x}$

7) Calcule as assintotas horizontais e verticais da função

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 3x^2}$$

5.6 Continuidade

Definição de Continuidade

Uma função f é contínua em um ponto a se

1. $f(a)$ está definido
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Exemplo 5.6.1: Mostre que $f(x) = c$ é contínua em todos os pontos.

Exemplo 5.6.2: Mostre que $f(x) = x$ é contínua em todos os pontos.

Exemplo 5.6.3: Mostre que $f(x) = 1/x$ é descontínua em $x = 0$.

Propriedades da Continuidade

Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas em a, então as funções a seguir também são contínuas em a, desde que estejam definidas

1. $\left[f(x)\right]^n$ desde que $f(a)^n$ exista
2. $f(x) \pm g(x)$
3. $f(x)g(x)$
4. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ desde que $g(a) \neq 0$

Como consequência desses propriedades podemos afirmar que

1. Todo polinômio $p(x)$ é contínuo em todos os pontos.
2. Toda função racional $p(x)/q(x)$ é contínua em todos os pontos onde $q(x) \neq 0$.

Funções Contínuas

Dizemos que uma função é contínua se ela for contínua em todos os pontos do seu domínio.

Exercícios Seção 5.6

Continuidade

1) Determine os valores de x para os quais a função dada é contínua.

a) $f(x) = 2x^2 + x - 1$

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

c) $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1}$

d) $f(x) = \dfrac{2}{2x - 1}$

e) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

f) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x - 2}$

g) $f(x) = |x + 1|$

2) Determine os valores de x para os quais a função dada é contínua.

a) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x + 1, & \text{se } x \leq -1 \\ x + 1, & \text{se } x > -1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & \text{se } x < 0 \\ x^2 + 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{se } x \neq 1 \\ 2, & \text{se } x = 1 \end{cases}$

3) Determine os valores de x para os quais a função dada é contínua.

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x^2-3x+2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x}$

4) Investigue a continuidade de cada função no ponto indicado

a) $f(x) = x - |x|$ $\qquad x = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x^2-4}, & \text{se } x \neq 2 \\ 3, & \text{se } x = 2 \end{cases}$ $\qquad x = 2$

c) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & \text{se } x < 1 \\ 1-|x|, & \text{se } x > 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$ $\qquad x = 1$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{se } x \neq 2 \\ 0, & \text{se } x = 2 \end{cases}$ $\qquad x = 2$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \geq -1 \\ 1-|x|, & \text{se } x < -1 \end{cases}$ $\qquad x = -1$

f) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+7}{x^2+1}$ $\qquad x = 2$

g) $f(x) = \dfrac{2}{3x^2+x^3-x-3}$ $\qquad x = -3$

5) Determine, se existirem os valores de $x \in D_f$, nos quais a função $f(x)$ não é contínua

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2-1}, & \text{se } x^2 \neq 1 \\ 0, & \text{se } x = -1 \end{cases}$

b) $f(x) = \dfrac{x-|x|}{x}$

c)

$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+5x+6}, & \text{se } x < -3 \text{ e } -2 < x \\ -1, & \text{se } -3 \leq x \leq -2 \end{cases}$

d) $f(x) = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+4}{x-1}, & \text{se } x \neq 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} , & \text{se } x \\ 0, & \text{se } x \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} , & \text{se } x \\ 0, & \text{se } x \end{cases}$

6) Calcule p de modo que as funções abaixo sejam contínuas

a) $f(x) = \begin{cases} x^2+px+2, & \text{se } x \neq 3 \\ 3, & \text{se } x = 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x+2p, & \text{se } x \leq -1 \\ p^2, & \text{se } x > -1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & \text{se } x \neq 0 \\ p^3-7, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

7) Determine, se existirem, os pontos onde as seguintes funções não são contínuas

a) $f(x) = \dfrac{x}{(x-3)(x+7)}$

b) $f(x) = \sqrt{(3-x)(6-x)}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{x^2-6x+10}$

8) Escolha funções f, g e h que satisfaçam as condições

a) f não é contínua em 2 pontos do seu domínio

b) g é contínua em todos os pontos do seu domínio mas não é contínua em $\mathbb{R}$

c) $h \circ f$ é contínua em todos os pontos do domínio de f

Faça o gráfico das funções f, g, h e $h \circ f$

9) Para qual valor de c a função $f(x)$ é contínua

$$f(x) = \begin{cases} cx^2+2x, & x < 2 \\ x^3-cx, & x \geq 2 \end{cases}$$

10) Mostre que a função $f(x) = \left(1+e^{1/x}\right)^{-1}$ é descontínua em $x = 0$.

5.7 Teoremas

Teorema Valor Intermediário

Se f é uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e M é um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe pelo menos um número c em $[a, b]$ tal que $f(c) = M$.

Existência de Zeros de Uma Função Contínua

Se f é uma função contínua em um intervalo fechado $[a,b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais opostos, então existe pelo menos uma solução para a equação $f(x = 0)$ no intervalo (a,b).

Exemplo 5.7.1: Use o teorema da existência de zeros de uma função contínua para provar que $f(x) = x^3 + x + 1$ possui uma raiz entre -1 e 1.

Mostre que $f(x) = x^3 + x + 1$ é contínua para todos $x \in \mathbb{R}$. Calcule $f(-1)$ e $f(1)$, mostre existe pelo menos uma raiz de $f(x)$ no intervalo $[-1,1]$.

Teorema do Confronto

Se $g(x) \leq f(x) \leq h(x))$ para todo x em uma vizinhança de a e

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

então

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Exercícios Seção 5.7

Teorema do Valor Intermediário

1) Para cada função f, prove que:

i) a função f é contínua em todos os pontos do intervalo $[a, b]$;

ii) a função f deve possuir menos um zero no intervalo (a, b).
Dica: *Mostre que $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais opostos.*

a) $f(x) = x^2 - 6x + 8\,,\ a = 1,\ b = 3$

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 2\,,\ a = -1,\ b = 1$

c) $f(x) = 2x^{5/3} - 5x^{4/3}\,,\ a = 14,\ b = 16$

2) Determine se a afirmação é verdadeira ou falsa. Se verdadeira, explique por quê. Se falsa, justifique através de um exemplo.

a) Suponha que a função f esteja definida no intervalo $[a,b]$. Se $f(a)$ e $f(b)$ têm o mesmo sinal, então f não possui nenhum zero em $[a,b]$.

b) Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então $\lim_{x\to a^+} f(x) - \lim_{x\to a^-} f(x) \neq 0$.

c) Se $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$, então $f(a) = L$.

d) Se f é contínua em $[-2,3]$, $f(-2) = 3$ e $f(3) = 1$, então existe pelo menos um número c em $[-2, 3]$ tal que $f(c) = 2$.

3) Seja $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

a) Mostre que f é contínua para todos os valores de x no intervalo $[-1,1]$.

b) Mostre que f tem pelo menos um zero em $[-1,1]$.

c) Determine os zeros de f em $[-1,1]$ resolvendo a equação $f(x) = 0$.

Teorema do Confronto

4) Sabendo que, $4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$ para $x \geq 0$, calcule $\lim_{x\to 4} f(x)$.

5) Sabendo que, $2x \leq g(x) \leq x^4 - x^2 + 2$ para todo x, calcule $\lim_{x\to 1} g(x)$.

6) Avalie a função $f(x)$, e verifique se ela é contínua, nos pontos $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = \pi$ e $x = \sqrt{2}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \in \text{Irracionais} \\ 1 - x^3, & x \in \text{Racionais} \end{cases}$$

5.8 Revisão

Exercícios Seção 5.8

Revisão Limites

1) Calcule os limites indicados.

a) $\lim_{x\to 0}(5x - 3)$

b) $\lim_{x\to 1}(x^2 + 1)$

c) $\lim_{x\to -1}(3x^2 + 4)(2x - 1)$

d) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x - 3}{x + 4}$

e) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 5x + 6}$

f) $\lim_{x\to 3} \sqrt{2x^3 - 5}$

g) $\lim_{x\to 3} \dfrac{4x - 3}{\sqrt{x + 1}}$

h) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x - 1}{x(x - 1)}$

i) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

j) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2-1}$

k) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x}$

l) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x+1}$

2) Esboce o gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} 4-x, & \text{se } x \leq 2 \\ x+2, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

e calcule os limites

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) \qquad \lim_{x\to a} f(x)$$

no ponto $a = 2$, se os limites existirem.

3) Determine todos os valores de x para os quais cada função é descontínua

a) $g(x) = \begin{cases} x+3, & \text{se } x \neq 2 \\ 0, & \text{se } x = 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \dfrac{3x+4}{4x^2-2x-2}$

c) $f(x) = \dfrac{|2x|}{x}$

4) Calcule, caso existam, os limites abaixo, usando os limites básicos, as leis dos limites e/ou teorema do confronto, justificando seu cálculo (Não é permitido uso de Regra de l'Hôpital)

a) $\lim_{t\to 7^+} \dfrac{|7-t|}{t^3-7^3}$

b) $\lim_{x\to 27} \dfrac{3-\sqrt[3]{x}}{x-27}$

c) $\lim_{t\to -3^-} \dfrac{t^3+27}{|t+3|}$

d) $\lim_{x\to 4^-} \dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{|x^2-16|}$

e) $\lim_{t\to -3^-} \dfrac{|t+3|}{t^3+27}$

f) $\lim_{t\to 2} \dfrac{\sqrt{t+2}-2}{4-t^2}$

5) Determine o valor de a para que o limite

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}$$

exista e calcule o valor do limite.

6) Supondo que exista

$$\lim_{x\to 2} f(x)$$

encontre os possíveis valores deste limite, sabendo que

$$\lim_{x\to 2} \frac{\left(f(X)\right)^2-9}{x-2} = 5$$

7) Calcule, caso existam, os limites abaixo, usando apenas os limites básicos, as leis dos limites e/ou teorema do confronto. É dado que

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = \ln a \qquad \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1-x}{|x^2-1|}$

b) $\lim_{t\to -1} \dfrac{\sqrt{t+2}-1}{t^3+1}$

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{3^x-1}{9x}$

d) $\lim_{x\to 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}}$

8) Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-5}{x+2}, & \text{se } x \leq 1 \\ \ln(x^2-1), & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

encontre, quando possível, suas assíntotas.

9) Verifique onda a função é contínua e encontre $\lim_{x\to 0} h(x)$ e $\lim_{x\to 3} h(x)$

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & \text{se } x < 0 \\ 3-x, & \text{se } 0 \leq x < 3 \\ (x-3)^2, & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

10) Calcule os limites

a) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x^2-1}{x}$ b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{xe^x}{e^x-1}$

11) Se $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-8}{x-1} = 10$, determine $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

12) Se $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 5$, calcule os limites

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

13) Encontre um exemplo onde $\lim\limits_{x\to a} [f(x)+g(x)]$ existe e $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ nem $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existem.

14) Encontre um exemplo onde $\lim\limits_{x\to a} [f(x)g(x)]$ existe e $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ nem $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existem.

15) Verifique se existe um número a tal que o limite

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}$$

existe. Se existir, determine o valor de a e calcule o limite.

6

Derivadas

6.1 Definição e Interpretações da Derivada

Introdução

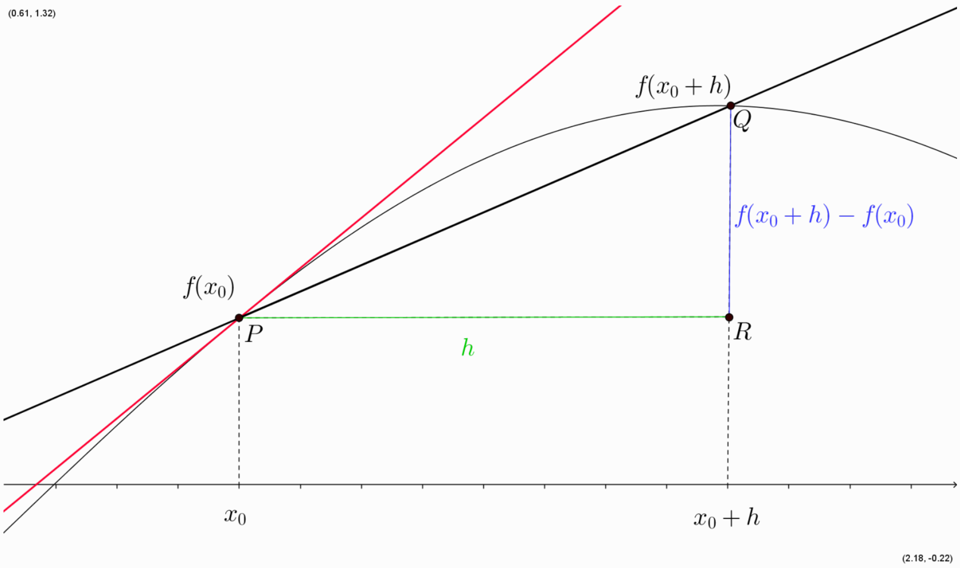
- Equação da reta

$$y = mx + c$$

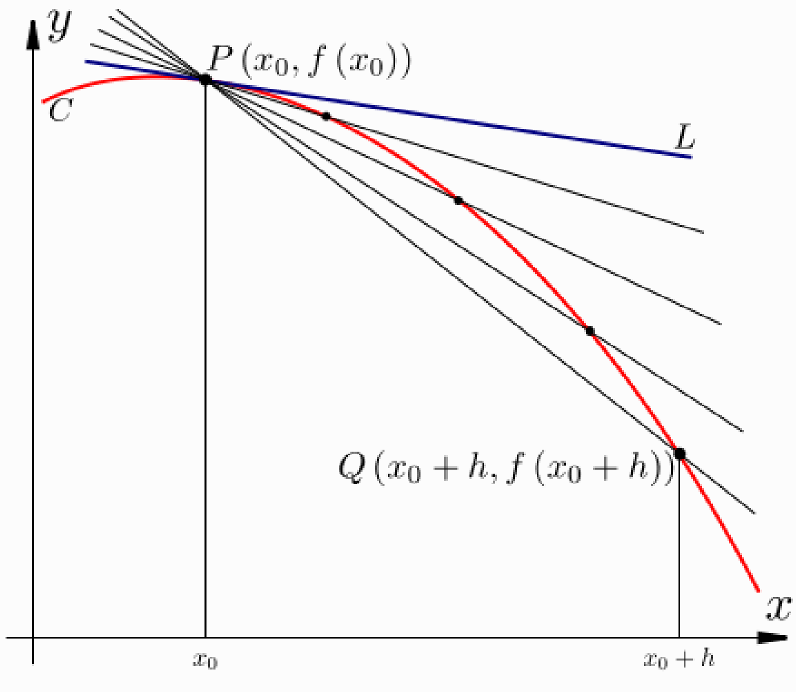
- Declividade de uma reta

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

◇ Reta secante é a reta que liga dois pontos do gráfico de uma função



◇ O limite da reta secante é a reta tangente



◇ A declividade da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto x

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

◇ Noção intuitiva: velocidade instantânea é o mesmo que a declividade da reta tangente

EXEMPLO 6.1.1: Considerando a função $f(x) = x^2$ podemos construir da reta secante ao seu gráfico nos pontos onde $x = 1$ e $x = 2$.

a) Calculando os pontos P e Q

$$P: \quad x = 1 \quad f(1) = 1^2 = 1$$

portanto $P(1{,}1)$

$$Q: \quad x = 2 \quad f(2) = 2^2 = 4$$

portanto $Q(2{,}4)$

b) a declividade da reta que liga os pontos P e Q

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-1}{2-1} = 3$$

c) equação da reta secante que liga os pontos P e Q

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - 1 &= 3(x-1) \\ y &= 3x - 2 \end{aligned}$$

EXEMPLO 6.1.2: Considerando a função $f(x) = x^2$ podemos calcular a declividade da reta secante ao seu gráfico nos pontos onde $x = a$ e $x = a + h$.

a) Calculando os pontos P e Q

$$P: \quad x = a \qquad f(a) = a^2$$

portanto $P(\, a,\, a^2\,)$

$$Q: \quad x = a + h \qquad f(a+h) = (a+h)^2$$

portanto $Q(\, a + h, (a+h)^2\,)$

b) a declividade da reta que liga os pontos P e Q

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(a+h)^2 - a^2}{(a+h) - a} \\
&= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\
&= \frac{+2ah + h^2}{h} \\
&= 2a + h
\end{aligned}
$$

Exemplo 6.1.3: Encontre a inclinação da reta tangente à curva $f(x) = x^2 - 2x + 1$ no ponto (x_1, y_1).

a) Primeiro avaliamos a função $f(x)$ nos pontos x_1 e em $x_1 + h$

$$y_1 = f(x_1) = x_1^2 - 2x_1 + 1$$

e

$$
\begin{aligned}
f(x_1 + h) &= (x_1 + h)^2 - 2(x_1 + h) + 1 \\
&= x_1^2 + 2x_1 h + h^2 - 2x_1 - 2h + 1
\end{aligned}
$$

b) Avaliamos agora a declividade, ou inclinação, da reta secante que depende do valor de h escolhido

$$
\begin{aligned}
m(h) &= \frac{f(x+h) - f(x_1)}{(x+h) - x} \\
&= \frac{x_1^2 + 2x_1 h + h^2 - 2x_1 - 2h + 1}{h} \\
&\quad - \frac{x_1^2 - 2x_1 + 1}{h} \\
&= \frac{2x_1 h + h^2 - 2h}{h} \\
&= 2x_1 + h - 2
\end{aligned}
$$

c) Calculamos a inclinação da reta tangente fazendo h tender a zero

$$a = \lim_{h \to 0} m(h) = \lim_{h \to 0} (2x_1 + h - 2) = 2x_1 - 2$$

Taxas de Variação

Taxa de variação média de f no intervalo $[x,x+h]$, ou declividade da reta secante entre os pontos $(x,f(x))$ e $(x+h,f(x+h))$

$$\bar{m} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Taxa de variação instantânea de f no ponto x, ou declividade da reta tangente ao gráfico de f no ponto x.

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Derivada

A derivada da função $f(x)$ no ponto x_1 é a função f' (lê-se f linha de x no ponto x_1) definida por

$$f'(x_1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$

ou de modo equivalente

$$f'(x_1) = \lim_{x_2\to x_1} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Se uma função possui derivada em um ponto $x=a$ dizemos que ela é derivável em $x=a$.

Exercícios Seção 6.1

Definição e Interpretações da Derivada

1) Uma curve é definida pela equação $y=f(x)$

a) Escreva uma expressão para a inclinação da reta secante pelos pontos $P(3,f(3))$ e $Q(x,f(x))$.

b) Escreva uma expressão para inclinação da reta tangente em P.

2) Encontre a inclinação da reta tangente à parábola $y=4x-x^2$ no ponto $(1,3)$.

3) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y=x-x^3$ no ponto $(1,0)$.

4) Encontre uma equação para a reta tangente à curva no ponto dado.

a) $y=4x-3x^2$ $(2,-4)$

b) $y=x^3-3x+1$ $(2,3)$

c) $y = \sqrt{x}$ (1,1)

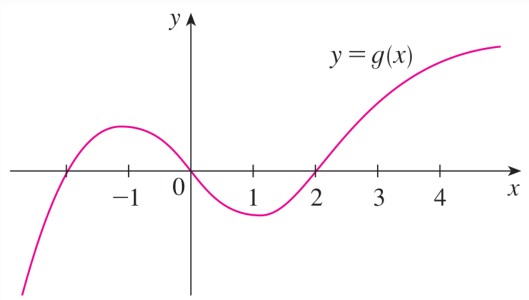
d) $y = \dfrac{2x+1}{x+2}$ (1,1)

5) Encontre a inclinação da tangente à curva $y = 3 + 4x^2 - 2x^3$ no ponto $x = a$. Mostre as equações das retas tangentes nos pontos (1,5) e (2,3).

6) Encontre a inclinação da tangente à curva $y = 1/\sqrt{x}$ no ponto $x = a$. Mostre as equações das retas tangentes nos pontos (1,1) e (4,½).

7) Para a função $g(x)$ cujo gráfico é dado, arrume os seguintes números em ordem crescente e explique seu raciocínio

$$0, \quad g'(-2), \quad g'(0), \quad g'(2), \quad g'(4)$$



8) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $y = g(x)$ em $x = 5$ se $g(x) = -3$ e $g'(x) = 4$.

9) Se uma equação para a reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto onde $x = 2$ é $y = 4x - 5$ encontre $f(2)$ e $f'(2)$.

10) Se a reta tangente de $f(x)$ em (4,3) passa pelo ponto (0,2), encontre $f(4)$ e $f'(4)$.

11) Esboce o gráfico de uma função f para a qual $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$ e $f'(2) = -1$.

12) Esboce o gráfico de uma função g para a qual

a) $g(0) = g(2) = g(4) = 0$

b) $g'(1) = g'(3) = 3$

c) $g'(0) = g'(4) = 1$

d) $g'(2) = -1$

e) $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$

f) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

13) Se $f(x) = 3x^2 - x^3$, encontre $f'(1)$ e use esse valor para encontrar a equação da reta tangente a curva $y = 3x^2 - x^3$ no ponto (1,2).

14) Se $g(x) = x^4 - 2$, encontre $g'(1)$ e use esse valor para encontrar a equação da reta tangente a curva $y = x^4 - 2$ no ponto $(1, -1)$.

15) Se $F(x) = 5x/(1 + x^2)$, encontre $F'(2)$ e use esse valor para encontrar a equação da reta tangente a curva $y = 5x/(1 + x^2)$ no ponto (2,2).

16) Se $G(x) = 4x^2 - x^3$, encontre $G'(a)$ e use esse valor para encontrar a equação da reta tangente a curva $y = 4x^2 - x^3$ nos pontos (2,8) e (3,9).

17) [resp] Encontre $f'(a)$ para cada uma das funções

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

b) $f(t) = 2t^3 + t$

c) $f(t) = \dfrac{2t+1}{t+3}$

d) $f(x) = x^{-2}$

e) $f(x) = \sqrt{1-2x}$

f) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{1-x}}$

18) Cada limite representa a derivada de uma função f em um ponto a, identifique f e a em cada caso.

a) $\displaystyle\lim_{h\to0} \frac{(1+h)^{10} - 1}{h}$

b) $\displaystyle\lim_{h\to0} \frac{\sqrt[4]{16+h} - 2}{h}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to5} \frac{2^x - 32}{x - 5}$

d) $\displaystyle\lim_{t\to1} \frac{t^4 + t - 2}{t - 1}$

19) Utilize a definição para calcular a derivada das funções

a) $f(x) = \sqrt{x}$ b) $f(x) = \sqrt{1-2x}$

20) Usando a definição, calcule a derivada de $f(x) = x^{3/2}$ e determine os domínios de f e f'.

21) Use a definição da derivada para determinar a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$ no ponto (−2,4)

22) Use a definição para calcular a derivada da função $f(x) = \sqrt{9-x}$ e determine os domínios da função e da derivada.

23) Use a definição da derivada para calcular a inclinação da reta tangente ao gráfico da função em um ponto qualquer.

a) $f(x) = 13$

b) $f(x) = -6$

c) $f(x) = 2x + 7$

d) $f(x) = 8 - 4x$

e) $f(x) = 3x^2$

f) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2$

g) $f(x) = -x^2 + 3x$

h) $f(x) = 2x^2 + 5x$

24) Determine a declividade da tangente ao gráfico de cada função no ponto dado e encontre uma equação para a reta tangente.

a) $f(x) = 2x + 7$ no ponto $(2, 11)$

b) $f(x) = -3x + 4$ no ponto $(-1{,}7)$

c) $f(x) = 3x^2$ no ponto $(1{,}3)$

d) $f(x) = 3x - x^2$ no ponto $(-2, -10)$

e) $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ no ponto $(3, -{}^1\!/_3)$

f) $f(x) = \dfrac{3}{2x}$ no ponto $(1, {}^3\!/_2)$

25) Determine a equação da reta tangente aos gráficos das funções nos pontos indicados. Esboce o gráfico de cada função com sua tangente.

a) $y = x^2 - 1 \quad x = 1,\ x = 0,\ x = a$

b) $y = x^2 = 3x + 6$
$x = -1,\ x = 2$

c) $y = (3x - 5)$
$x = {}^1\!/_2,\ x = a$

26) Encontrar e equação da reta tangente à curva $y = x^2 - 2x + 1$ no ponto $(-2{,}9)$.

27) Datas as funções $f(x) = 5 - 2x$ e $g(x) = 3x^2 - 1$, determine

a) $f'(1) + g'(1)$

b) $f(2) - f'(2)$

c) $2f'(0) - g'(-2)$

d) $\left[g'(0)\right]^2 + \dfrac{1}{2}g'(0) + g(0)$

28) Considerando a função
$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se } x \geq 0 \\ x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$
esboce o gráfico de f e determine se $f'(0)$ existe.

29) Considerando a função $f(x) = \dfrac{1}{2x-6}$ determine se $f'(3)$ existe.

30) Considerando a função $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$ determine os intervalos onde $f'(x) > 0$ e onde $f'(x) < 0$.

6.2 Derivada Como Função

Derivada como função

A derivada de uma função $y = f(x)$ é a função $f'(x)$, tal que, para qualquer $x \in D_f$, $f'(x)$ é o valor da inclinação de f no ponto x

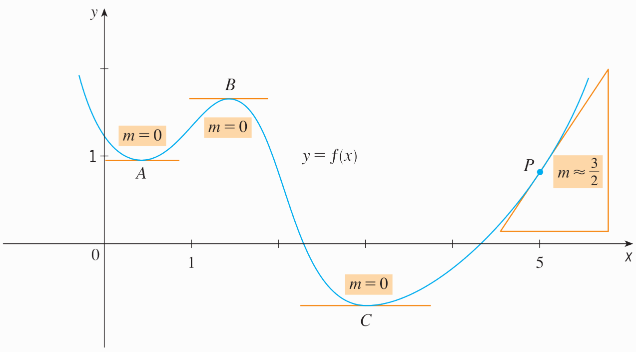
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

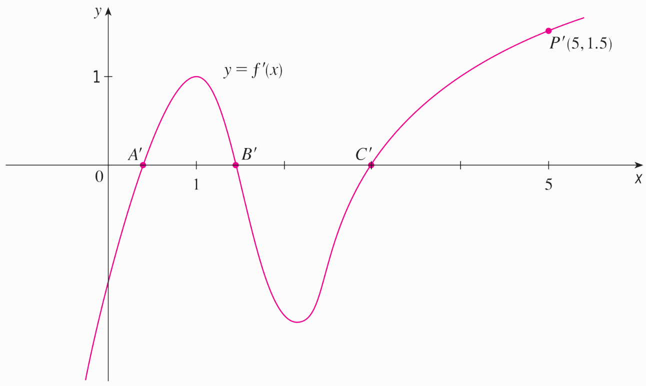
O domínio de f' é o conjunto dos pontos $x \in D_f$ para os quais o limite existe.

Notações para a função derivada

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = f_x(x) = D_x f(x) \neq \frac{\partial f}{\partial x}(x)$$

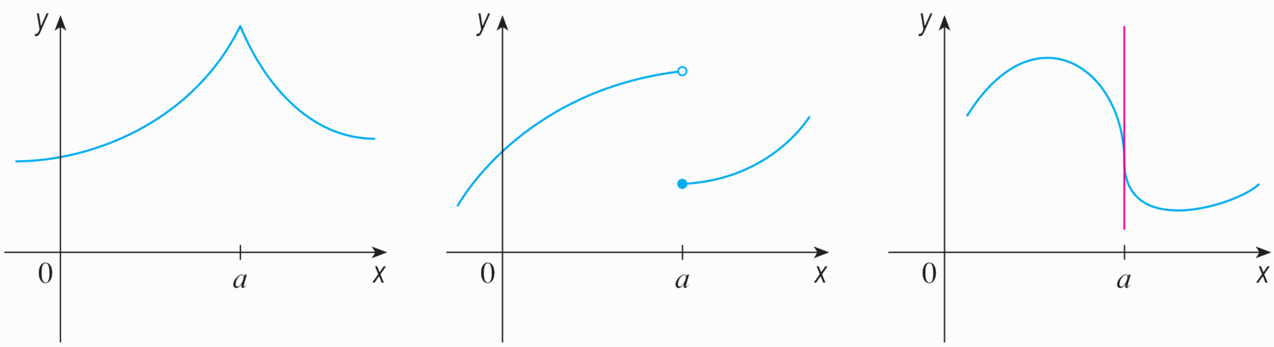
O Gráfico de Uma Função e de Sua Derivada





Formas Em Que Uma Função Deixa de Ser Diferenciável

Uma função deixa de ser diferenciável em um ponto se: seu gráfico possuir um bico nesse ponto; ela for descontínua no ponto ou a reta tangente nesse ponto for vertical.



Calcular a derivada pela definição

Para calcular a derivada pela definição calcule cada uma dessas expressões

1. $f(x+h)$
2. $f(x+h)-f(x)$
3. $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$
4. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Exemplo 6.2.1: Calcule a derivada da função $f(x)=5x^2+6x-1$ e encontre $f'(2)$.

$$\begin{aligned} f(x+h) &= 5(x+h)^2+6(x+h)-1 \\ &= 5(x^2+2xh+h^2)+6x+6h-1 \\ &= 5x^2+10xh+5h^2+6x+6h-1 \\ &= 5x^2+10xh+5h^2+6x+6h-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &= (5x^2+10xh+5h^2+6x+6h-1) \\ &\quad -(5x^2+6x-1) \\ &= 10xh+5h^2+6h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{10xh+5h^2+6h}{h} \\ &= 10x+5h+6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 10x+5h+6 \\ &= 10x+6 \end{aligned}$$

$$f'(2)=10\times 2+6=26$$

Continuidade de Funções Deriváveis

Toda função derivável em um ponto a é contínua nesse ponto.

Derivadas de Ordem Superior

Derivadas de Ordem Superior são a aplicação sucessivas da derivação.

Dizemos que a derivada de uma função f é sua derivada primeira

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d^1 f}{dx^1}$$

A derivada de segunda ordem é a derivada da derivada

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

A derivada de terceira ordem é a derivada da derivada segunda

$$f'''(x) = \frac{d^3 f}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)$$

Valendo o mesmo para todas as demais ordens

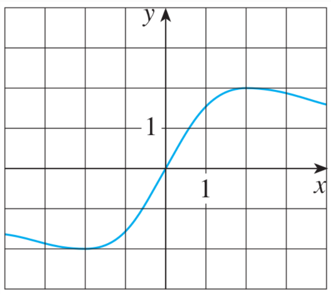
$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{(n-1)} f}{dx^{(n-1)}}\right)$$

Exercícios Seção 6.2

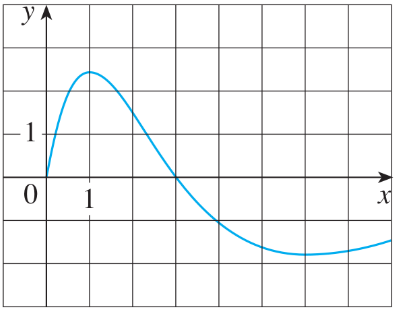
Derivada Como Função

1) Use o gráfico fornecido para estimar o valor de cada derivada. Depois esboce o gráfico da função derivada.

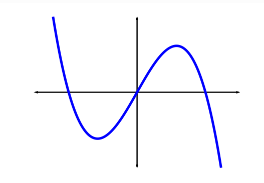
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$							

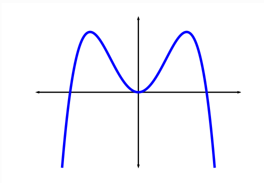


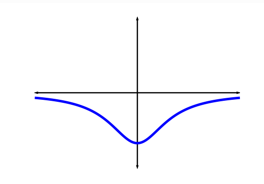
x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f'(x)$								

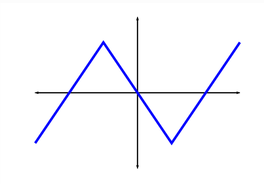


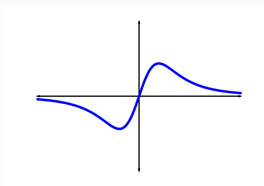
2) Associe o gráfico de cada função a-d com o gráfico de sua derivada 1-4. Explique cada associação

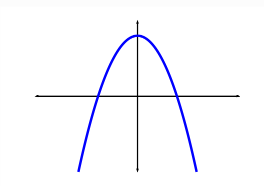
a)


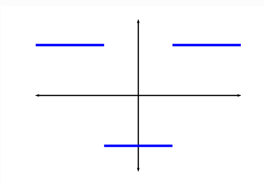
b)


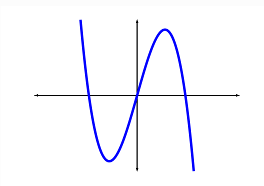
c)


d)


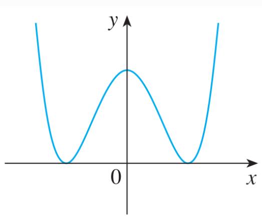
1)


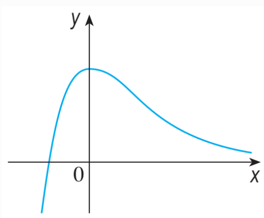
2)


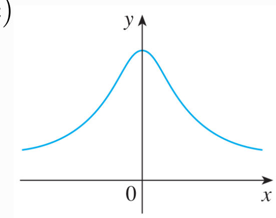
3)


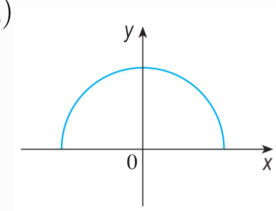
4)


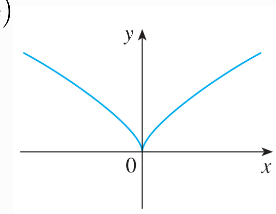
3) A partir do gráfico de $f(x)$ esboce o gráfico de $f'(x)$

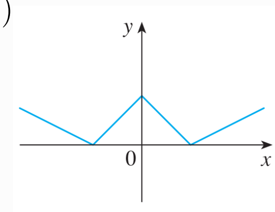
a)


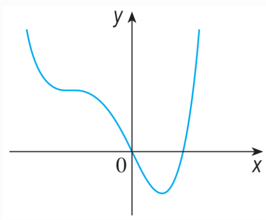
b)


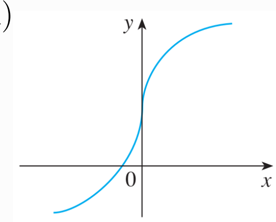
c)


d)


e)


f)


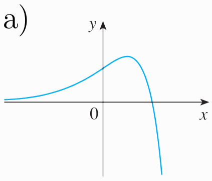
g)


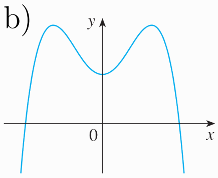
h)


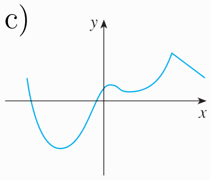
4) Esboce o gráfico das funções e baseado nesse gráfico esboce o gráfico das derivadas das funções.

a) $f(x) = e^x$ b) $f(x) = \ln x$

5) A partir do gráfico de $f(x)$ esboce o gráfico de $f'(x)$

a)


b)


c)


6) [resp] Encontre a derivada de cada função usando a definição de derivada. Determine o domínio da função e de sua derivada.

a) $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{3}$

b) $f(x) = mx + b$

c) $f(t) = 5t - 9t^2$

d) $f(x) = 1{,}5x^2 - x + 3{,}7$

e) $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

f) $f(x) = \sqrt{9 - x}$

g) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x - 3}$

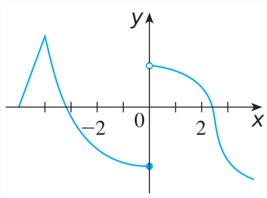
h) $f(t) = \dfrac{1 - 2t}{3 + t}$

i) $f(x) = x^{3/2}$

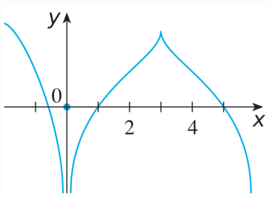
j) $f(x) = x^4$

7) Dado o gráfico de f, determine os números onde a função não é derivável, justifique sua resposta.

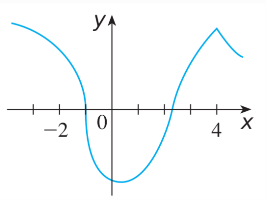
a)



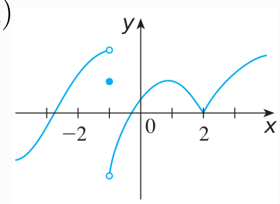
b)



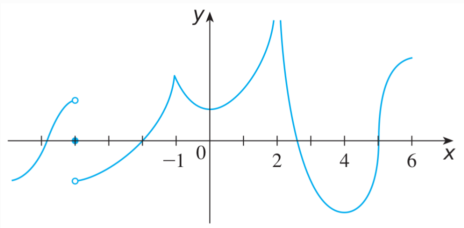
c)



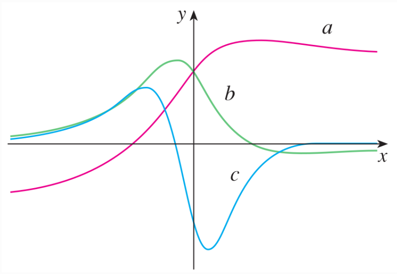
d)



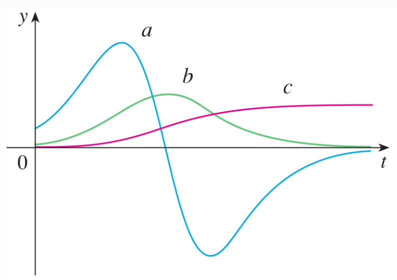
e)



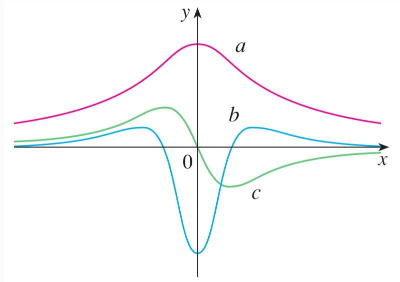
8) A figura mostra os gráficos de f, f' e f''. Identifique cada gráfico e justifique sua escolha.



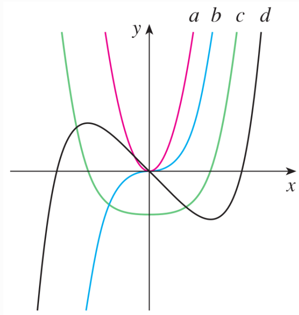
9) A figura mostra os gráficos de f, f' e f''. Identifique cada gráfico e justifique sua escolha.



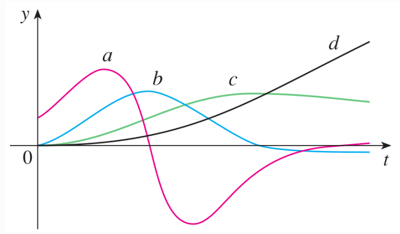
10) A figura mostra os gráficos de f, f' e f''. Identifique cada gráfico e justifique sua escolha.



11) A figura mostra os gráficos de f, f', f'' e f'''. Identifique cada gráfico e justifique sua escolha.



12) A figura mostra os gráficos de f, f', f'' e f'''. Identifique cada gráfico e justifique sua escolha.



13) Seja $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

a) Para $a \neq 0$, use a definição para calcular a derivada de f em a.

b) Mostre que $f'(0)$ não existe.

c) Como é a reta tangente ao gráfico de f em (0,0)?

14) Seja $g(x) = x^{2/3}$.

a) Mostre que $g'(0)$ não existe.

b) Calcular $g'(a)$ para $a \neq 0$.

c) Como é a reta tangente ao gráfico de g em (0,0)?

15) Seja $f(x) = 2x^2 + 1$.

a) Calcule a derivada f' de f.

b) Encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico no ponto (1,3).

c) Esboce o gráfico de f.

16) Seja $f(x) = x^2 + 6x$.

a) Calcule a derivada f' de f.

b) Determine o ponto gráfico de f onde a reta tangente ao gráfico é horizontal.
Dica: *Calcule o valor de x para o qual $f'(x) = 0$.*

c) Esboce o gráfico de f e a reta tangente ao gráfico no ponto encontrado na parte (b).

17) Seja $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

a) Calcule a derivada f' de f.

b) Determine o ponto gráfico de f onde a reta tangente ao gráfico é horizontal.

c) Esboce o gráfico de f e a reta tangente ao gráfico no ponto encontrado na parte (b).

d) Qual é a taxa de variação de f neste ponto?

18) Seja $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

a) Calcule a derivada f' de f.

b) Encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico no ponto $(-1, -1/2)$.

c) Esboce o gráfico de f.

19) Seja $y = f(x) = x^2 + x$

a) Calcule a taxa de variação média de y em relação a x nos intervalos de $x = 2$ a $x = 3$, de $x = 2$ a $x = 2{,}5$ e de $x = 2$ a $x = 2{,}1$.

b) Calcule a taxa de variação (instantânea) de y em $x = 2$.

c) Compare os resultados obtidos na parte (a) com os da parte (b).

20) Seja $y = f(x) = x^2 - 4x$

a) Calcule a taxa de variação média de y em relação a x nos intervalos de $x = 3$ a $x = 4$, de $x = 3$ a $x = 3{,}5$ e de $x = 3$ a $x = 3{,}1$.

b) Calcule a taxa de variação (instantânea) de y em $x = 3$.

c) Compare os resultados obtidos na parte (a) com os da parte (b).

21) Verifique se a afirmação é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, explique o por quê, se for falsa, justifique exibindo um contra exemplo.

a) Se f é contínua em $x = a$, então f é diferenciável em $x = a$.

b) Se f é contínua em $x = a$ e g e diferenciável em $x = a$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = f(a)g(a)$.

22) Esboce o gráfico de $f(x) = 1/(x-1)$ e mostre que a função não tem derivada em $x = 1$.

23) Seja $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ ax + b, & \text{se } x > 1 \end{cases}$
Determine os valores de a e b para os quais f é contínua e tem derivada em $x = 1$. Esboce o gráfico de f.

24) Esboce o gráfico da função $f(x) = x^{2/3}$. A função é contínua em $x = 0$? $f'(0)$ existe? Por quê?

25) Utilize a definição para calcular a derivada da função $f(x) = \dfrac{1-x}{2+x}$.

26) Use a definição da derivada para determinar a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^{-1}$ no ponto $(2, 1/2)$

27) [resp] Usando a definição, determine a derivada das seguintes funções.

a) $f(x) = 1 - 4x^2$

b) $f(x) = 2x^2 - x - 1$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

d) $f(x) = \dfrac{1-x}{x+3}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$

f) $f(x) = \sqrt[3]{x+3}$

6.3 Derivadas das Funções Elementares

Derivadas das Funções Elementares

Derivada da função contante

$$f(x) = c \qquad\qquad f'(x) = 0$$

Derivada da função potência

$$f(x) = x^n \qquad\qquad f'(x) = nx^{n-1}$$

Derivada da função exponencial, se $a > 0$ e $a \neq 1$ então

$$f(x) = a^x \qquad\qquad f'(x) = a^x \ln a$$

Um caso particular especialmente importante é quando $a = e$

$$f(x) = e^x \qquad\qquad f'(x) = e^x$$

Derivada da função logarítmica, se $a > 0$ e $a \neq 1$ então

$$f(x) = \log_a x \qquad\qquad f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$$

Um caso particular especialmente importante é quando $a = e$

$$f(x) = \ln x \qquad\qquad f'(x) = \frac{1}{x}$$

6.4 Regras de Derivação

Propriedades das Derivadas

Sejam f e g funções deriváveis e c uma constante, então temos

a) $\dfrac{d}{dx}\Big(cf(x)\Big) = c\,\dfrac{df}{dx}(x)$

b) $\dfrac{d}{dx}\Big(f(x) + g(x)\Big) = \dfrac{df}{dx}(x) + \dfrac{dg}{dx}(x)$

6.5 Regra do Produto

Sejam f e g funções deriváveis, então temos

$$\frac{d}{dx}\Big(f(x)g(x)\Big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Exercícios Seção 6.5

Regras do Produto e do Quociente

1) Calcule a derivada de $f(x) = (1+x^2)(x-x^2)$ de duas formas: usando a regra do produto e efetuando a multiplicação primeiro. Os resultados coincidem?

2) Calcule a derivada de

$$F(x) = \frac{x^4 - 5x^3 + \sqrt{x}}{x^2}$$

de duas formas: usando a regra do quociente e simplificando primeiro. Os resultados coincidem?

3) [resp] Ache a derivada da função.

a) $f(x) = e^x + x$

b) $f(x) = 2e^x - x^2$

c) $f(x) = x^2 \ln x$

d) $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$

e) $f(x) = \ln(x-2)^3$

f) $f(x) = e^x \ln x$

4) [resp] Derive as funções.

a) $f(x) = (x^3 + 2x)e^x$

b) $g(x) = \sqrt{x}e^x$

c) $y = \dfrac{x}{e^x}$

d) $y = \dfrac{e^x}{1-e^x}$

e) $g(x) = \dfrac{1+2x}{3-4x}$

f) $G(x) = \dfrac{x^2-2}{2x+1}$

g) $y = \dfrac{x^3}{1-x^2}$

h) $y = \dfrac{x+1}{x^3+x-2}$

i) $y = \dfrac{t^2+2}{t^4-3t^2+1}$

5) [resp] Ache a derivada da função.

a) $y = \dfrac{t}{(t-1)^2}$

b) $y = e^p(p + p\sqrt{p})$

c) $y = \dfrac{1}{s + ke^s}$

d) $y = \dfrac{v^3 - 2v\sqrt{v}}{v}$

e) $z = w^{3/2}(w + ce^w)$

f) $f(t) = \dfrac{2t}{2+\sqrt{t}}$

g) $g(t) = \dfrac{t - \sqrt{t}}{t^{1/3}}$

h) $f(x) = \dfrac{A}{B + Ce^x}$

i) $f(x) = \dfrac{1 - xe^x}{x + e^x}$

j) $f(x) = \dfrac{x}{x + c/x}$

k) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

6) [resp] Ache a derivada da função.

a) $f(x) = \dfrac{2e^x}{x}$

b) $f(w) = \dfrac{e^w + 1}{e^w}$

c) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

7) [resp] Derive as funções.

a) $H(u) = (u - \sqrt{u})(u + \sqrt{u})$

b) $J(v) = (v^3 - 2v)(v^{-4} + v^{-2})$

c) $F(y) = \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3}{y^4}\right)(y + 5y^3)$

d) $f(z) = (1 - e^z)(z + e^z)$

8) [resp] Derive as funções.

a) $f(x) = (2x + 1)(3x^2 + 6)$

b) $f(x) = (7x - 1)(x + 4)$

c) $f(x) = (3x^4 - 1)(2 - x^4)$

d) $f(x) = (x - 1)(x + 1)$

e) $f(u) = (4u^2 - a)(a - 2u)$

f) $f(x) = \dfrac{2x + 4}{3x - 1}$

g) $f(t) = \dfrac{t - 1}{t + 1}$

h) $f(t) = \dfrac{3t^2 + 5t - 1}{t - 1}$

i) $f(t) = \dfrac{2 - t^2}{t - 2}$

j) $f(x) = \dfrac{4 - x}{5 - x^2}$

k) $f(x) = \dfrac{5x + 7}{2x - 2}$

l) $f(t) = \dfrac{(t - a)^2}{t - b}$

m) $f(x) = \dfrac{3}{x^4} + \dfrac{5}{x^5}$

n) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{2}{x^6}$

9) [resp] Encontre a derivada de cada uma das funções.

a) $f(x) = \dfrac{2}{3}(5x - 3)^{-1}(5x + 3)$

b) $f(s) = (s^2 - 1)(3s - 1)(5s^3 + 2s)$

c) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x + 2}(3x^2 + 6x)$

10) [resp] Calcule a derivada das funçãos.

a) $p(x) = \left(x^3 + 3x^2 - 2x + 3\right)\ln(x)$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^3 + 2x - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 4}{x^2 + x - 1}$

11) [resp] Calcule f' e f''.

a) $f(x) = x^4 e^x$

b) $f(x) = x^{5/2} e^x$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + 2x}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

12) Encontre a equação da reta tangente de cada curva no ponto especificado

a) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1}$ $(1, 0)$

b) $y = \dfrac{e^x}{x}$ $(1, e)$

c) $y = 2xe^x$ $(0, 0)$

d) $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ $(1, 1)$

13) A curva $y = 1/(1 + x^2)$ é chamada de Curva de Agnesi (*Witch of Agnesi* em inglês). Encontre uma equação para a reta tangente dessa curva no ponto $(-1, {}^1\!/\!_2)$.

14) A curva $y = x/(1 + x^2)$ é chamada de Curva Serpentina. Encontre uma equação para a reta tangente dessa curva no ponto $(3; 0{,}3)$.

15) Se $f(x) = (x^3 - x)e^x$, encontre $f'(x)$.

16) Se $f(x) = \dfrac{e^x}{2x^2 + x + 1}$, encontre $f'(x)$.

17) Se $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, encontre $f'(x)$ e $f''(x)$.

18) Se $f(x) = (x^2 - 1)e^x$, encontre $f'(x)$ e $f''(x)$.

19) Se $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x}$, encontre $f''(1)$.

20) Se $g(x) = \dfrac{x}{e^x}$, encontre $g^{(n)}(x)$.

21) Suponha que $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$ e $g'(5) = 2$. Calcule:

a) $(fg)'(5)$ b) $(f/g)'(5)$ c) $(g/f)'(5)$

22) Suponha que $f(2) = -3$, $g(2) = 4$, $f'(2) = -2$ e $g'(2) = 7$. Encontre $h'(2)$.

a) $h(x) = 5f(x) - 4g(x)$

b) $h(x) = f(x)g(x)$

c) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

d) $h(x) = \dfrac{g(x)}{1 + f(x)}$

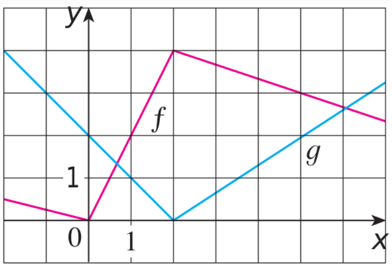
23) Se $f(x) = e^x g(x)$ sendo que $g(0) = 2$ e $g'(0) = 5$, encontre $f'(0)'$.

24) Se $h(2) = 4$ e $h'(2) - 3$, calcule
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)}{x}\right)\bigg|_{x=2}$$

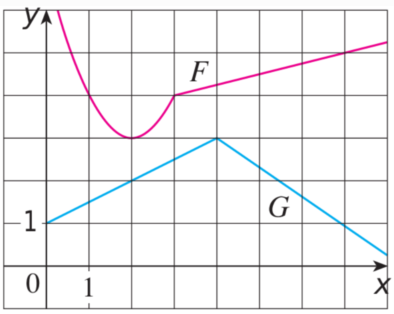
25) Se $g(x) = xf(x)$, sedo que $f(3) = 4$ e $f'(3) = -2$, encontre uma equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto onde $x = 3$.

26) Se $f(2) = 10$ e $f'(x) = x^2 f(x)$ para todo x, encontre $f''(2)$.

27) Se f e g são funções cujos gráficos estão dados, seja $u(x) = f(x)g(x)$ e $v(x) = f(x)/g(x)$. Calcule $u'(1)$ e $v'(5)$.



28) Seja $P(x) = F(x)G(x)$ e $Q(x) = F(x)/G(x)$ sendo que F e F são funções cujos gráficos estão dados. Calcule $P'(2)$ e $Q'(7)$.



29) Se g é uma função derivável, encontre uma expressão para a derivada de cada uma das funções.

a) $y = xg(x)$ b) $y = \dfrac{x}{g(x)}$ c) $y = \dfrac{g(x)}{x}$

30) Se f é uma função derivável, encontre uma expressão para a derivada de cada uma das funções.

a) $y = x^2 f(x)$

b) $y = \dfrac{f(x)}{x^2}$

c) $y = \dfrac{x^2}{f(x)}$

d) $y = \dfrac{1 + xf(x)}{\sqrt{x}}$

31) Encontre as equações para as retas tangentes da curva
$$y\frac{x-1}{x+1}$$
que são paralelas a reta $x - 2y = 2$.

32) Calcule $R'(0)$, sendo que
$$R(0) = \frac{x - 3x^3 + 5x^5}{1 + 3x^3 + 6x^6 + 9x^9}$$

Dica: *Não calcule $R'(x)$. Defina $f(x)$ como o numerador e $g(x)$ como o denominador e calcule $f(0)$, $f'(0)$, $g(0)$ e $g'(0)$.*

33) Encontre a equação da reta tangente à curva
$$y = \frac{2x + 1}{3x - 4}$$
no ponto de abscissa $x = -1$.

34) Encontre a equação da reta tangente à curva
$$y = (3x^2 - 4x)^2$$
no ponto de abscissa $x = 2$.

35) Encontre as equações das retas tangentes à curva
$$y = \frac{x-1}{x+1}$$
que sejam paralelas à reta $y = x$.

36) Esboce o gráfico de cada função e sua primeira e segunda derivadas

a) $f(x) = x(x+1)(x-1)$

b) $f(x) = x^3 - 3$

6.6 Regra do Quociente

Sejam f e g funções deriváveis, então temos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

Exercícios Seção 6.6

Regras de Derivação

1) [resp] Determine e derivada da função f usando as regras de derivação

a) $f(x) = -3$

b) $f(x) = 365$

c) $f(x) = x^5$

d) $f(x) = x^{2,1}$

e) $f(x) = 3x^2$

f) $f(x) = -2x^3$

g) $f(r) = \pi r^2$

h) $f(x) = 9x^{1/3}$

i) $f(x) = 3\sqrt{x}$

j) $f(u) = \dfrac{2}{\sqrt{u}}$

k) $f(x) = 7x^{-12}$

l) $f(x) = 0{,}3x^{-1{,}2}$

m) $f(x) = 5x^2 - 3x + 7$

n) $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 6$

2) [resp] Determine e derivada da função f usando as regras de derivação

a) $f(x) = 4x^4 - 3x^{5/2} + 2$

b) $f(x) = 3x^{-1} + 4x^{-2}$

c) $f(x) = -\dfrac{1}{3}(x^{-3} - x^6)$

d) $f(t) = \dfrac{4}{t^4} - \dfrac{3}{t^3} + \dfrac{2}{t}$

e) $f(x) = 2x - 5\sqrt{x}$

f) $f(x) = \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{x^{1/3}}$

g) $f(x) = 0{,}003x^2 - 0{,}4x + 10$

h) $f(x) = 0{,}2x^3 - 0{,}5x^2 + 0{,}1x - 20$

i) $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 3}{x}$

j) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x}$

3) [resp] Derive as funções:

a) $f(r) = \pi r^2$

b) $f(x) = 3x^2 + 6x - 10$

c) $f(w) = aw^2 + b$

d) $f(x) = 14 - \dfrac{1}{2x^3}$

e) $f(x) = 7\left(ax^2 + bx + c\right)$

4) [resp] Derive as funções:

a) $f(x) = x^{40}$

b) $f(x) = e^x$

c) $f(x) = e^5$

d) $f(t) = -\dfrac{2t}{5} + 2$

e) $f(x) = \dfrac{3x^8}{4}$

f) $f(x) = x^3 - 4x - 6$

g) $f(t) = 2t^5 - 5t^2 + 6$

h) $g(x) = x^2(-2x + 1)$

i) $h(x) = (x-2)(2x+3)$

j) $g(t) = \dfrac{2}{t^{\frac{3}{4}}}$

k) $B(y) = \dfrac{c}{y^6}$

l) $A(s) = \dfrac{-12}{s^5}$

m) $y(x) = x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$

n) $R(a) = (3a+1)^2$

o) $h(t) = \sqrt[4]{t} - 4e^t$

5) [resp] Encontre a derivada de cada uma das funções

a) $S(p) = \sqrt{p} - p$

b) $y(x) = \sqrt{x}\,(x-1)$

c) $S(R) = 4\pi R^2$

d) $h(u) = Au^3 + Bu^2 + Cu$

e) $y(x) = \dfrac{\sqrt{x}+x}{x^2}$

f) $y(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{\sqrt{x}}$

g) $g(u) = \sqrt{2}u + \sqrt{3u}$

h) $j(x) = x^{2,4} + e^{2,4}$

i) $k(r) = r^e + e^r$

j) $H(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2$

k) $y(v) = ae^v + \dfrac{b}{v} + \dfrac{c}{v^2}$

l) $u(t) = \sqrt[5]{t} + 4\sqrt{t^5}$

m) $v(x) = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$

n) $z(y) = \dfrac{A}{y^{10}} + Be^y$

o) $y(x) = e^{x+1} + 1$

6) Encontre a equação da reta tangente a curva no ponto indicado

a) $y = \sqrt[4]{x}$ $\quad(1,1)$

b) $y = x^4 + 2x^2 - x$ $\quad(1,2)$

c) $y = x^4 + 2e^x$ $\quad(0,2)$

d) $y = x^2 - x^4$ $\quad(1,0)$

e) $y = 3x^2 - x^3$ $\quad(1,2)$

f) $y = x - \sqrt{x}$ $\quad(1,0)$

7) Calcule a primeira e segunda derivadas das funções

a) $f(x) = 10x^{10} + 5x^5 - x$

b) $G(r) = \sqrt{r} + \sqrt[3]{r}$

8) Encontre os pontos do gráfico da função $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ onde a reta tangente é horizontal.

9) Para quais valores de x o gráfico de $f(x) = e^x - 2x$ possui uma tangente horizontal?

10) Mostre que a curva $y = 2e^x + 3x + 5x^3$ não possui retas tangentes com inclinação igual a 2.

11) Encontre a equação da reta tangente da curva $y = x\sqrt{x}$ que é paralela a reta $y = 1 + 3x$.

12) Encontre as equações das duas retas tangentes das curva $y = 1 + x^3$ que são paralelas a reta $12x - y = 1$.

13) Encontre a n-ésima derivada de cada uma das funções calculando as primeiras derivadas e observando o padrão gerado.

a) $f(x) = x^n$ $\qquad$ b) $f(x) = 1/x$

14) Encontre o polinômio de segundo grau, P, tal que, $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$ e $P''(2) = 2$.

15) Encontre uma função cubica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, cujo gráfico tem tangentes horizontais nos pontos (−2,6) e (2,0).

16) Encontre a parábola com equação $y = ax^2 + bx + c$, que possui inclinação 4 em $x = 1$, inclinação −8 em $x = -1$ e passa pelo ponto (2,15).

17) Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{se } x < 1 \\ x+1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

A função f é derivável em 1? Esboce o gráfico de f e de f'.

18) Para quais valores de x a função g é derivável?

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \leq 0 \\ 2x - x^2, & \text{se } 0 < x < 2 \\ 2 - x, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Escreva uma formula para g' e esboce os gráficos de g e g'.

19) Para quais valores de x a função $f(x) = |x^2 - 9|$ é derivável? Escreva uma formula para f' e esboce os gráficos de f e f'.

20) Para quais valores de x a função $h(x) = |x - 1| + |x + 2|$ é derivável? Escreva uma formula para h' e esboce os gráficos de h e h'.

21) Encontre a parábola com equação $y = ax^2 + bx$ cuja reta tangente no ponto (1,1) tem equação $y = 3x - 2$.

22) Suponha que a curva $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ tem uma reta tangente em $x = 0$ com equação $y = 2x + 1$ e uma reta tangente em $x = 1$ com equação $y = 2 - 3x$. Encontre os valores de a, b, c e d.

23) Para quais valores de a e b a reta $2x + y = b$ é tangente a parábola $y = ax^2$ quando $x = 2$?

24) Encontre o valor de c para o qual a reta $y = {}^3\!/_2 x + 6$ é tangente a curva $y = c\sqrt{x}$.

25) Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 2 \\ mx + b, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Encontre os valores de m e b que tornam a função f derivável em todos os pontos.

26) Avalie a declividade do gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto (4,2).

27) Sendo $f(x) = 2x^3 - 4x$, determine $f'(-2)$, $f'(0)$ e $f'(2)$.

28) Sendo $f(x) = 4x^{5/4} + 2x^{3/2}$, determine $f'(0)$ e $f'(16)$.

29) Determine a declividade e uma equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto especificado.

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ $\quad (2, 6)$

b) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1$ $\quad (1, 0)$

c) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad (4, {}^5\!/_2)$

30) Seja $f(x) = x^3$.

a) Determine o ponto do gráfico de f onde a reta tangente é horizontal.

b) Esboce o gráfico de f incluindo a reta tangente horizontal.

31) Seja $f(x) = x^3 + 1$.

a) Determine o(s) ponto(s) no gráfico de f onde a declividade da reta tangente é igual a 12.

b) Determine a(s) equação(ões) da(s) reta(s) tangente(s) encontrada no item (a).

c) Esboce o gráfico de f mostrando a(s) reta(s) tangente(s).

32) Seja $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 12x + 6$. Determine os valores de x para os quais:

a) $f'(x) = -12$

b) $f'(x) = 0$

c) $f'(x) = 12$

33) Seja $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$. Determine o(s) pontos(s) no gráfico de f onde a declividade da reta tangente assume os valores

a) $-2x$ $\quad$ b) 0 $\quad$ c) $10x$

34) A reta perpendicular à reta tangente a uma curva e que passa pelo ponto de tangência da reta tangente é denominada *normal* à curva. Determine a equação da reta tangente e da normal à curva $y = x^3 - 3x + 1$ que passam pelo ponto (2,3).

35) Avalie a declividade do gráfico da função $f(x) = \ln(x)$ no ponto $(e,1)$

36) Seja $p(x) = (x - a)(x - b)$, onde a e b são constantes tais que $a \neq b$, mostre que $p(a) = p(b) = 0$ e que $p'(a) \neq 0$ e $p'(b) \neq 0$.

37) Dadas as funções $f(x) = x^2 + A$ e $g(x) = Bx$, determine A e B tais que

$$\begin{cases} f'(x) + g'(x) = 1 + 2x \\ f(x) - g(x) = x^2 \end{cases}$$

38) Dada a função $f(t) = 3t^3 - 4t + 1$, calcule $f(0) - tf'(0)$.

39) Em que pontos do gráfico da função

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x$$

tem tangente horizontal?

40) Seja $y = ax^2 + bx$, encontre os valores de a e b, sabendo que a tangente à curva no ponto $(1{,}5)$ tem inclinação $m = 8$.

41) Determine a equação da reta tangente à cada curva, nos pontos indicados e esboce o gráfico correspondente.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x = 1/3$, $x = 3$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$ $\quad a \notin \{-2{,}4\}$, $x = -2$, $x = 4$

c) $f(x) = 2\sqrt{x}$, $x = 0$, $x = a$, $a > 0$

42) Encontre a equação da reta tangente à curva $y = x^3 - 1$, que seja perpendicular à reta $y = -x$.

43) Calcule as derivadas primeira e segunda da função $f(x) = 1 - x^3$ e esboce os gráficos de f, f' e f''.

44) Calcule as derivadas primeira e segunda da função $f(x) = e^x + e^{-x}$ e esboce os gráficos de f, f' e f''.

6.7 Derivada de Função Composta

Regra da Cadeia

Sejam f e g funções deriváveis, então temos

$$\frac{d}{dx} f\big(g(x)\big) = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$$

ou equivalentemente

$$\Big[f\big(g(x)\big)\Big]' = f'\big(g(x)\big)g(x)$$

Se $f(x) = x^n$ temos

$$\frac{d}{dx}\big(g(x)\big)^n = n\,[g'(x)]^{n-1}$$

Exercícios Seção 6.7

Derivada da Função Composta

1) Escreva a função composta na forma $f(g(x))$ explicitando as expressões de $f(x)$ e $g(x)$. Então calcule dy/dx.

a) $y = \sqrt[3]{1+4x}$

b) $y = (3x^3+5)^4$

c) $y = e^{\sqrt{x}}$

d) $y = \sqrt{2-e^x}$

2) Determine $\dfrac{dy}{du}$, $\dfrac{du}{dx}$ e $\dfrac{dy}{dx}$.

a) $y = u^{4/3}$ $\quad u = 3x^2-1$

b) $y = \sqrt{u}$ $\quad u = 7x-2x^2$

c) $y = u^{-2/3}$ $\quad u = 2x^3-x+1$

d) $y = \sqrt{u}+\dfrac{1}{\sqrt{u}}$ $\quad u = x^3-x$

e) $y = \dfrac{1}{u}$ $\quad u = \sqrt{u}+1$

3) [resp] Ache a derivada da função.

a) $f(x) = 5\ln x$

b) $f(x) = \ln(5x)$

c) $f(x) = \ln(x+1)$

d) $f(x) = 2\ln(x^5)$

e) $f(x) = \ln\sqrt{x}$

f) $f(x) = \ln\left(\sqrt{x}+1\right)$

g) $f(x) = \ln\dfrac{1}{x}$

h) $f(x) = \ln\left(4x^2-6x+3\right)$

i) $f(x) = \ln\dfrac{2x}{x+1}$

j) $f(x) = \ln\dfrac{x+1}{x-1}$

k) $f(x) = \sqrt{\ln x}$

l) $f(x) = (\ln x)^3$

m) $f(x) = 2(\ln x)^{3/2}$

n) $f(x) = \ln(x^3+1)$

o) $f(x) = \ln\sqrt{x^2-4}$

p) $f(x) = e^x\ln\sqrt{x+3}$

q) $f(x) = e^{2x}\ln(x+1)$

r) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

4) [resp] Ache a derivada da função.

a) $f(x) = e^{3x}$

b) $g(t) = e^{-t}$

c) $f(u) = ue^{-u}$

d) $f(x) = 3(e^x+e^{-x})$

e) $f(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

f) $f(t) = 4e^{3t+2}$

g) $h(x) = e^{-x^2}$

h) $f(x) = 3e^{-1/x}$

i) $f(x) = e^{1/2x}$

j) $f(x) = (e^x+1)^{25}$

k) $f(x) = (4-e^{-3x})^3$

l) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

m) $f(t) = -e^{-\sqrt{2t}}$

n) $f(s) = (s^2+1)e^{-s^2}$

o) $f(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

5) [resp] Calcule a derivada das funções

a) $g(x) = \left(x^2+\sqrt{x}\,\right)^7$

b) $f(x) = xe^{2x}$

c) $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^3}\,\right)$

d) $g(x) = \left(x^3+\ln x\,\right)^7$

e) $f(x) = (x^2+x)e^{2x+1}$

f) $f(x) = \ln\left(\sqrt{x}\,\ln x\right)$

6) [resp] Calcule a derivada de cada função

a) $f(x) = \dfrac{1}{3}(2x^5+6x^{-3})^5$

b) $f(x) = (3x^2 + 6x)^{10} - \dfrac{1}{x^2}$

c) $f(x) = (5x - 2)^6(3x - 1)^3$

d) $f(x) = (2x - 5)^4 + \dfrac{1}{x+1} - \sqrt{x}$

e) $f(t) = (4t^2 - 5t + 2)^{-1/3}$

f) $f(x) = \dfrac{7x^2}{2\sqrt[5]{3x+1}} + \sqrt{3x+1}$

g) $f(x) = 2e^{3x^2+6x+7}$

h) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

i) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\ln 2x}$

j) $f(t) = \dfrac{e^{-t^2} + 1}{t}$

k) $f(t) = \dfrac{\sqrt{e^t - 1}}{\sqrt{e^t + 1}}$

l) $f(x) = \dfrac{1}{a}(bx^2 + c) - \ln x$

m) $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(7x^2 - 4)$

n) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

o) $f(t) = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\sqrt{t}}$

p) $f(x) = \left(e^{x^2} + 4\right)^{\sqrt{x}}$

7) [resp] Calcule a derivada das funções.

a) $F(x) = (x^4 + 3x^2 - 2)^5$

b) $F(x) = (4x - x^2)^{100}$

c) $F(x) = \sqrt{1 - 2x}$

d) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 1}$

e) $y = xe^{-kx}$

f) $f(x) = (2x - 3)^4(x^2 + x + 1)^5$

g) $g(x) = (x^2 + 1)^3(x^2 + 2)^6$

h) $h(t) = (t + 1)^{2/3}(2t^2 - 1)^3$

i) $F(t) = (3t - 1)^4(2t + 1)^{-1}$

j) $y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^3$

k) $f(s) = \sqrt{\dfrac{s^2 + 1}{s^2 + 4}}$

l) $y = \sqrt{1 + 2e^{3x}}$

m) $y = e^{1-x^2}$

n) $y = 5^{-1/x}$

o) $G(y) = \dfrac{(y-1)^4}{(y^2 + 2y)^5}$

p) $y = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + 1}}$

q) $y = \dfrac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$

r) $F(v) = \left(\dfrac{v}{v^3 + 1}\right)^6$

s) $y = x^2 e^{-1/x}$

t) $y = \sqrt{1 + xe^{-2x}}$

u) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

v) $g(x) = (2re^{rx} + n)^p$

w) $y = 2^{3^{x^2}}$

8) Calcule a primeira e segunda derivadas das funções.

a) $y = e^{e^x}$ b) $y = xe^{-kx}$

9) Ache a segunda derivada de cada função.

a) $f(x) = e^{-4x} + 2e^{3x}$

b) $f(x) = 2xe^{3x}$

c) $f(t) = t^2e^{-2t}$

d) $f(x) = \ln(2x)$

e) $f(x) = \ln(x + 5)$

f) $f(x) = \ln(x^2 + 2)$

10) Ache a equação da reta tangente ao gráfico de $y = e^{2x-2}$ no ponto $(3/2, 1)$.

11) Encontre uma equação da reta tangente ao gráfico da função no ponto indicado.

a) $y = (1 + 2x)^{10}$ $(0,1)$

b) $y = \sqrt{1 + x^3}$ $(2,3)$

c) $y = \dfrac{2}{1 + e^{-x}}$ $(0,1)$

d) $y = \dfrac{|x|}{\sqrt{2-x^2}} \quad (1{,}1)$

12) Determine se a afirmação é verdadeira ou falsa.

a) Se $f(x) = \ln 5$, então $f'(x) = 1/5$.

b) Se $f(x) = \ln a^x$, então $f'(x) = \ln a$

13) Calcule $F'(5)$, sabendo que $F(x) = f(g(x))$ e que $f(-2) = 8$, $f'(-2) = 4$, $f'(5) = 3$, $g(5) = -2$ e $g'(5) = 6$.

14) Calcule $h'(1)$, sabendo que $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$ e que $f(1) = 7$ e $f'(1) = 4$.

15) Data a tabela de valores

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

Calcule as derivadas solicitadas

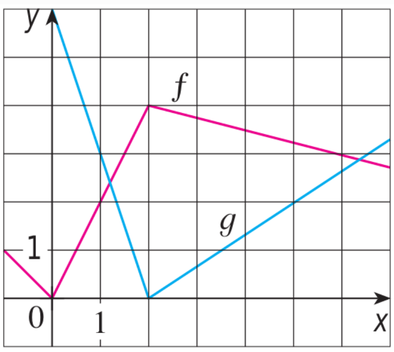
a) $h'(1)$ sendo que $h(x) = f(g(x))$

b) $H'(1)$ sendo que $H(x) = g(f(x))$

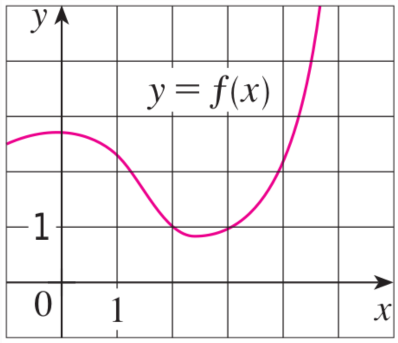
c) $F'(2)$ sendo que $F(x) = f(f(x))$

d) $G'(3)$ sendo que $G(x) = g(g(x))$

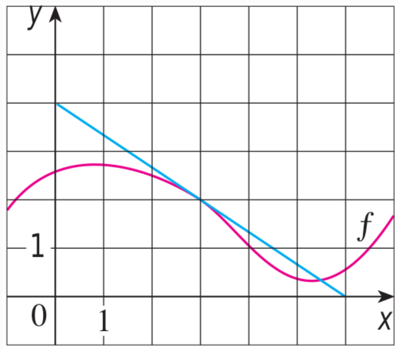
16) Seja f e g as funções exibidas no gráfico, enquanto, $u(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$ e $w(x) = g(g(x))$. Calcule $u'(1)$, $v'(1)$ e $w'(1)$ caso a derivada exista, se não existir justifique porque.



17) Seja f a função definida pelo gráfico, enquanto, $h(x) = f(f(x))$ e $g(x) = f(x^2)$. Estime $h'(2)$ e $g'(2)$.



18) Se $g(x) = \sqrt{f(x)}$ e f está definida pelo gráfico, calcule $g'(3)$.



19) Calcule $f'(0)$ se $f(x) = e^{-x}(x-1)$.

20) Calcule $f'(1)$ se $f(x) = \ln(1+x) + (x+1)^2$.

21) Dado $f(x) = e^{-x}$, calcule $f(0) + xf'(0)$.

22) Calcule a derivada da função

$$f(x) = \left(e^{\sqrt{\ln(3x)}}\right)^2$$

23) Calcule

a) $\dfrac{d}{dx}\left(x^2 + x^3\right)^4$ b) $\dfrac{d}{dx}\Big(\ln\left(x \ln x\right)\Big)$

24) Mostre que a função $y = xe^{-x}$ satisfaz a equação $xy' = (1-x)y$.

25) Mostre que a função $y = xe^{-x^2/2}$ satisfaz a equação $xy' = (1-x^2)y$.

26) Mostre que a função $y = (1 + x + \ln x)^{-1}$ satisfaz a equação $xy' = y(y \ln x - 1)$.

6.8 Derivada da Função Inversa

Derivada da Função Inversa

Seja $f(x)$ uma função derivável, se $f^{-1}(x)$ existe e é diferente de zero, então

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(x)}$$

6.9 Derivada de Função Implícita

Função Definida Implicitamente

Dizemos que uma função $y = f(x)$ é definida implicitamente por uma equação

$$F(y,x) = 0$$

se, ao substituirmos y por $f(x)$ nessa equação, ela se torna uma identidade.

Exemplo 6.9.1: A equação $x^2 + \dfrac{y}{2} = 1$ define implicitamente a função $y = 2(1 - x^2)$.

Exemplo 6.9.2: A equação $x^2 + y^2 = 4$ define implicitamente diversas funções, por exemplo

$$y = +\sqrt{4 - x^2} \qquad \text{e} \qquad y = -\sqrt{4 - x^2}$$

Derivada de Função Definida Implicitamente

Suponha que $F(y,x) = 0$ define implicitamente a função $y = f(x)$. Nesse caso podemos usar a regra da cadeia para calcular a derivada da função $y = f(x)$ sem que seja necessário determiná-la explicitamente. Para isso basta derivar a equação e usar corretamente a regra da cadeia como mostram os exemplos.

EXEMPLO 6.9.3: Sabendo que $y = f(x)$ é uma função derivável definida pela equação $x^2 + y^2 = 25$, determine y'.

Derivando por x os dois lado da equação $x^2 + y^2 = 25$ obtemos

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)' &= (25)' \\ (x^2)' + (y^2)' &= 0 \\ 2x + (y^2)' &= 0 \end{aligned}$$

usando agora a regra da cadeia para derivar $(y(x))^2$ temos

$$2x + 2y\,y' = 0$$

isolando y' temos a resposta que desejamos

$$y' = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Note que para calcularmos y' precisamos saber o valor de x e também o valor de $y = f(x)$.

EXEMPLO 6.9.4: Sabendo que $y = f(x)$ é definida pela equação $xy^2 + 2y^3 = x - 2y$, determine y'.

Derivando por x os dois lado da equação $xy^2 + 2y^3 = x - 2y$ obtemos

$$\begin{aligned} (xy^2 + 2y^3)' &= (x - 2y)' \\ (xy^2)' + 2(y^3)' &= (x)' - 2(y)' \\ (x)'y^2 + x(y^2)' + 2(y^3)' &= (x)' - 2(y)' \\ y^2 + x(y^2)' + 2(y^3)' &= 1 - 2y' \\ x(y^2)' + 2(y^3)' + 2y' &= 1 - y^2 \end{aligned}$$

usando agora a regra da cadeia para derivar $(y(x))^n$ temos

$$x(2y\,y') + 2(3y^2\,y') + 2y' = 1 - y^2$$

isolando y' temos a resposta que desejamos

$$(2xy + 6y^2 + 2)y' = 1 - y^2$$

$$y' = \frac{1 - y^2}{2xy + 6y^2 + 2}$$

EXEMPLO 6.9.5: Considerando a circunferência de centro na origem e raio 5. Determine a equação da reta tangente a essa circunferência pelo ponto (3,4).

A equação que define essa circunferência é $x^2 + y^2 = 25$. Usando os cálculos do exemplo 6.9 sabemos que

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Avaliando y' no ponto desejado temos a inclinação da reta tangente

$$m = y'\Big|_{\substack{x=3\\y=4}} = -\frac{3}{4}$$

Basta construirmos a equação da reta

$$\begin{aligned}
y - y_0 &= m(x - x_0)\\
y - 4 &= -\frac{3}{4}(x - 3)\\
y &= -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}3 + 4\\
y &= -\frac{3}{4}x + \frac{9 + 16}{4}\\
y &= -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}
\end{aligned}$$

ou de modo equivalente

$$3x + 4y - 25 = 0$$

Exercícios Seção 6.9

Derivada de Função Implícita

1) Para cada equação implícita, determine a derivada $\dfrac{dy}{dx}$.

i) Resolvendo explicitamente para y em termos de x e derivando o resultado.

ii) Aplicando a derivação implícita.

iii) Verifique que os resultados são equivalentes.

a) $x + 2y = 5$

b) $xy = 1$

c) $xy - y - 1 = 0$

d) $x^3 - x^2 - xy = 4$

e) $x^2y - x^2 + y - 1 = 0$

f) $\dfrac{x}{y} - x^2 = 1$

2) Determine $\dfrac{dy}{dx}$ por derivação implícita.

a) $x^2 + y^2 = 16$

b) $x^2 - 2y^2 = 16$

c) $x^3 + y^3 + y - 4 = 0$

d) $x^2 - 2xy = 6$

e) $x^2 + 5xy + y^2 = 10$

f) $x^2y^2 - xy = 8$

g) $x^{1/2} + y^{1/2} = 1$

h) $\sqrt{x+y} = x$

i) $(2x + 3y)^{1/3} = x^2$

j) $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 1$

k) $\sqrt{xy} = x + y$

l) $\dfrac{x+y}{x-y} = 3x$

m) $\dfrac{x-y}{2x+3y} = 2x$

n) $xy^{3/2} = x^2 + y^2$

o) $x^2y^{1/2} = x + 2y^3$

p) $(x + y)^3 + x^3 + y^3 = 0$

q) $(x + y^2)^{10} = x^2 + 25$

3) Para cada função:

i) Calcule y' usando a derivação implícita

ii) Resolva a equação explicitamente para y e calcule y'

iii) Verifique que as soluções são equivalentes substituindo a solução para y na expressão encontrada no item (i).

a) $9x^2 - y^2 = 1$

b) $2x^2 + x + xy = 1$

c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$

4) Calcula dy/dx por derivação implícita.

a) $x^3 + y^3 = 1$

b) $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$

c) $x^2 + xy - y^2 = 4$

d) $2x^3 + x^2y - xy^3 = 2$

e) $x^4(x + y) = y^2(3x - y)$

f) $xe^y = x - y$

g) $e^{x/y} = x - y$

h) $\sqrt{x+y} = 1 + x^2y^2$

5) Se $f(x) + x^2[f(x)]^3 = 10$ e $f(1) = 2$, calcule $f'(1)$.

6) Considerando y como a variável independente e x como a variável dependente, use a derivação implícita para calcular dx/dy.

a) $x^4y^2 - x^3y + 2xy^3 = 0$

b) $\sqrt{x+y} = 1 + x^2y^2$

7) Use a derivação implícita para encontrar uma equação da reta tangente a curva no ponto indicado.

a) $x^2 + xy + y^2 = 3$, $(1, 1)$, (Elipse)

b) $x^2 + 2xy - y^2 + x = 2$, $(1, 2)$, (Hipérbole)

c) $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$, $(0, 1/2)$, (Cardioide)

d) $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$, $(-3\sqrt{3}, 1)$, (Astroide)

e) $2(x^2+y^2)^2 = 25(x^2-y^2)$, $(3,1)$, (Lemniscata)

f) $y^2(y^2-4) = x^2(x^2-5)$, $(0,-2)$, (Curva do Diabo)

8) Calcule y'' usando derivação implícita.

a) $9x^2+y^2=9$

b) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$

c) $x^3+y^3=1$

d) $x^4+y^4=a^4$

9) Se $xy+e^y=e$, encontre o valor de y'' no ponto onde $x=0$.

10) Se $x^2+xy+y^3=1$, encontre o valor de y''' no ponto onde $x=1$.

11) Calcule $y'=dy/dx$ das funções definidas implicitamente pelas equações

a) $x^3+y^3=a^3$

b) $x^3+x^2y+y^2=0$

c) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$

d) $y^3=\dfrac{x-y}{x+y}$

e) $e^y=x+y$

12) Determine as retas tangentes à circunferência de centro (2,0) e raio 2, nos pontos de abscissa $x=1$.

13) Mostre que a reta tangente à elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

no ponto (r,s) tem equação

$$\frac{r}{a^2}x+\frac{s}{b^2}y=1$$

14) Calcule a derivada de $y(x)$ sabendo que $\sqrt{x+y}=x$ pela regra da derivação implícita.

15) Use derivação implícita para calcular as derivadas solicitadas

a) $\dfrac{dy}{dx}$, sabendo que $x^2y^2=e^{xy}$

b) $\dfrac{df^{-1}}{dx}$, sabendo que $f(x)=\sqrt{x}$

16) Avalie a declividade do gráfico da função $y(x)$ no ponto (1,0) sabendo que y satisfaz a equação $e^y=x-y$.

17) Calcule a derivada de $y(x)$ sabendo que $\sqrt{x+y}=1+y^2$

18) Avalie a declividade do gráfico da função $y(x)$ no ponto (1,2) sabendo que y satisfaz a equação $x^2+2xy-y^2+x=2$.

6.10 Revisão

1) Use da definição para calcular $f'(1)$, sendo que $f(x)=\sqrt{3x+1}$. Encontre a equação da reta tangente à curva $\sqrt{3x+1}$ no ponto (1,2).

2) Determine a derivada das funções abaixo (não é necessário fazer simplificações)

a) $f(x)=\dfrac{2e^x+5x^4-6x+7}{6}$

b) $f(x)=\dfrac{10}{x^8+3x+e}$

c) $f(t)=5e^t(t^3+3t+x^4)$

d) $g(x)=\dfrac{(6x^3+3)e^x}{x^4+1}$

e) $g(x)=\dfrac{x^3+6x^2-4}{e^x+11}$

f) $f(s)=\dfrac{(s^3-1)e^s}{s^4+2}$

3) Calcule, usando a definição, a derivada da função $f(x)=\sqrt{19-x}$. Encontre a equação da reta tangente à curva $y=\sqrt{19-x}$ no ponto (3,4).

4) Dada a função

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2 - x}$$

encontre suas raízes, intercepto com o eixo y, assíntotas e o(s) intervalo(s) onde $f'(x) \geq 0$ e $f''(x) \geq 0$.

5) Dada a função

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{4 - x^2}$$

encontre suas raízes, intercepto com o eixo y, assíntotas e o(s) intervalo(s) onde $f'(x) \geq 0$.

6) Calcule, usando a definição e também usando as regras para conferir, a derivada da função

$$f(x) = \frac{3}{2 - x}$$

Encontre a equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ on ponto $(-1{,}1)$.

7) Encontre a reta tangente à curva $y = x^2$ que passe pelo ponto $(5{,}16)$. Note que este ponto está fora da curva.

8) Calcule as derivadas sucessivas até a ordem n indicada.

a) $f(x) = 3x^4 - 2x$ $\quad n = 5$

b) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\quad n = 3$

c) $f(x) = 3 - 2x^2 + 4x^5$ $\quad n = 10$

d) $f(x) = \sqrt{3 - x^2}$ $\quad n = 2$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ $\quad n = 4$

f) $f(x) = e^{2x+1}$ $\quad n = 3$

g) $f(x) = \dfrac{1}{e^x}$ $\quad n = 4$

h) $f(x) = \ln(2x)$ $\quad n = 2$

9) Calcule a derivada de cada função

a) $f(x) = 10(3x^2 + 7x - 3)^{10}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{a}(bx^2 + ax)^3$

c) $f(t) = (7t + 6t)^7(3t - 1)^4$

d) $f(t) = \left(\dfrac{7t + 1}{2t^2 + 3}\right)^3$

e) $f(x) = \sqrt[3]{(3x^2 + 6x - 2)^2}$

f) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{3x - 1}}$

g) $f(t) = \sqrt{\dfrac{2t + 1}{t - 1}}$

h) $f(x) = \dfrac{1}{3}e^{3-x}$

i) $f(x) = e^{3x^2+6x}$

j) $f(s) = (7s^2 + 6s - 1)^3 + 2e^{-3s}$

k) $f(t) = e^{t/2}(t^2 + 5t)$

l) $f(x) = \ln(2x + 4)$

m) $f(s) = \ln\sqrt{s + 1}$

n) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)$

o) $f(x) = \dfrac{a^{3x}}{b^{3x^2-6x}}$

p) $f(t) = (2t + 1)^{t^2-1}$

q) $f(s) = \dfrac{1}{2}(a + bs)^{\ln(a+bs)}$

10) Calcule as primeira e segunda derivadas das funções

a) $p(x) = x^5 + x^3 + x^2 + 1$

b) $f(x) = e^{x^2}$

c) $p(x) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$

d) $f(x) = \ln\left(x^2\right)$

11) Calcule $f'(x)$ para cada função

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \leq 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \ln|3 - 4x|$

c) $f(x) = e^{|2x-1|}$

12) Determine a derivada das funções abaixo e faça todas as simplificações possíveis

$$f(x) = \left(\frac{x^3 + e}{x^6 + e^2}\right)^7$$

13) Determine a derivada das funções abaixo (não é necessário fazer simplificações)

a) $g(x) = \dfrac{x\ln(5x) + 6x^2 - 4}{e^{-x} + 11}$

b) $f(x) = \dfrac{7x^6 e^{x^4+3}}{5}$

c) $h(x) = \dfrac{7\ln(x^3 - 1)e^{x^4+2x}}{x^4 + 2}$

14) Calcule, usando a definição, a derivada da função $f(x) = \sqrt{1-x}$. Encontre a equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(-8{,}3)$.

15) A **derivada pela esquerda** e **derivada pela direita** são definidas pelos limites

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a-h) - f(a)}{h}$$

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a-h) - f(a)}{h}$$

se eles existirem. Assim, $f'(a)$ existe se, e somente se, ambas as derivadas laterais existirem e forem iguais.

a) Encontre $f'_-(4)$ e $f'_+(4)$ da função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ 5 - x, & \text{se } 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5-x}, & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

b) Esboce o gráfico de $f(x)$.

c) Onde f é descontínua?

d) Onde f não é diferenciável?

16) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = 9 - 2x^2$ no ponto $(2{,}1)$. Esiba a equação dessa reta.

17) Encontre as equações das retas tangentes à curva $y = \dfrac{2}{1-3x}$ nos pontos com abscissas $x = 0$ e $x = -1$.

18) Encontre a função f e o número a que satisfazem

$$\lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^6 - 64}{h} = f'(a)$$

19) Se $f(x) = \sqrt{3 - 5x}$.

a) Use a definição de derivada para calcular $f'(x)$.

b) Encontre os domínios de f e f'.

20) Use as regras de derivação para calcular a derivada solicitada

a) $\dfrac{d}{dx}\left(x^3 - \sqrt{x} + e^x\right)$

b) $\dfrac{d}{dx}\sqrt{x^2 + 4}$

c) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\ln x}{x^2 + 2}\right)$

d) $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(xe^x\right)$

e) $\dfrac{d}{dx}\left(x^{-3} - \sqrt{-x} + e^{-x}\right)$

f) $\dfrac{d}{dx}\sqrt{e^{2x} + 4}$

g) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right)$

h) $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt{x}e^x\right)$

21) Suponha que f é derivável em $\mathbb{R}$ e α é um número real. Sejam $F(x) = f(x^\alpha)$ e $G(x) = [f(x)]^\alpha$. Encontre expressões para $F'(x)$ e $G'(x)$.

22) Suponha que f é derivável em $\mathbb{R}$. Sejam $F(x) = f(e^x)$ e $G(x) = e^{f(x)}$. Encontre expressões para $F'(x)$ e $G'(x)$.

23) Sejam $g(x) = e^{cx} + f(x)$ e $h(x) = e^{kx}f(x)$ e sabendo que $f(0) = 3$, $f'(0) = 5$ e $f''(0) = -2$.

a) Calcule $g'(0)$ e $g''(0)$ em termos de c.

b) Encontre, em termos de k, a equação da reta tangente ao gráfico de h no ponto $x = 0$.

24) Seja $r(x) = f(g(h(x)))$, com $h(1) = 2$, $g(2) = 3$, $h'(1) = 4$, $g'(2) = 5$, $f'(3) = 6$, calcule $r'(1)$.

25) Se g é uma função duas vezes diferenciável e $f(x) = xg(x^2)$, encontre f'' em termos de g, g' e g''.

26) Se $F(x) = f(3f(4f(x)))$, onde $f(0) = 0$ e $f'(0) = 2$, calcule $F'(0)$.

27) Se $F(x) = f(xf(xf(x)))$, com $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f'(1) = 4$, $f'(2) = 5$ e $f'(3) = 6$, calcule $F'(1)$.

28) Encontre a 1000ª derivada de $f(x) = xe^{-x}$.

29) Escreva $|x| = \sqrt{x^2}$ e use a regra da cadeia para mostrar que $\dfrac{d}{dx}|x| = \dfrac{x}{|x|}$

7

Aplicações

7.1 Diferenciais e Aproximação Linear

Acréscimos

Considerando a função $y = f(x)$, o acréscimo de x é definido por

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

A variação em y correspondente a variação representada por Δx é definida por

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

ou de modo equivalente

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

Diferencial

Se $y = f(x)$ é uma função derivável e Δx um acréscimo de x, podemos definir

a) o diferencial da variável independente x, denotado por dx, como

$$dx = \Delta x$$

b) o diferencial da variável dependente y, denotado por dy, como

$$dx = f'(x)\,\Delta x$$

Segundo essa definição podemos escrever

$$dy = f'(x)dx \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Aproximação Linear

Quando Δx é pequeno, o mesmo ocorre com a diferença $\Delta y - dy$. Podemos assim, nesses casos aproximar Δy por dy

$$\Delta y \approx dy$$

EXEMPLO 7.1.1: Se $y = 2x^2 - 6x + 5$, calcule o acréscimo Δy para $x = 3$ e $\Delta x = 0{,}01$.

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)\\ &= f(3 + 0{,}01) - f(3)\\ &= f(3{,}01) - f(3)\\ &= \left[2(3{,}01)^2 - 6(3{,}01) + 5\right] - \left[2(3)^2 - 6(3) + 5\right]\\ &= 5{,}0602 - 5 = 0{,}0602\end{aligned}$$

EXEMPLO 7.1.2: Se $y = 6x^2 - 4$, calcule Δy e dy para $x = 2$ e $\Delta x = 0{,}001$.

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_1+\Delta x) - f(x_1)\\ &= f(2+0{,}001) - f(2)\\ &= \left[6(2{,}001)^2 - 4\right] - \left[6(2)^2 - 4\right]\\ &= 20{,}024006 - 20 = 0{,}024006\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dy &= f'(x_1)\,\Delta x\\ &= 12x\Delta x\\ &= 12\times 2\times 0{,}001 = 0{,}024\end{aligned}$$

Diferença $\Delta y - dy = 0{,}000006$

Exemplo 7.1.3: Calcule um valor aproximado para $y = \sqrt[3]{65{,}5}$ usando diferenciais.

Usando a definição de acréscimo da variável dependente temos

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_1+\Delta x) - f(x_1)$$

$$y_1 + \Delta y = y_2 = f(x_1+\Delta x)$$

Por outro lado, derivando a função $y(x)$, temos que

$$dy = \frac{1}{3x^{2/3}}\,dx$$

Fazendo $x_1 = 64$, pois é o cubo perfeito mais próximo de 65,5, temos $\Delta x = 1{,}5$. Consequentemente

$$dy = \frac{1}{3(64)^{2/3}}\,1{,}5 = \frac{1{,}5}{3\times 16} = 0{,}03125$$

Como

$$\sqrt[3]{65{,}5} = \sqrt[3]{64+1{,}5} = \sqrt[3]{x_1+\Delta x} = y_1 + \Delta y$$

usando a aproximação $\Delta y \approx dy$ concluímos que

$$\sqrt[3]{65{,}5} \approx y_1 + dy = 4 + 0{,}03125 = 4{,}03125$$

Exercícios Seção 7.1

Diferenciais e Aproximação Linear

7.2 Análise Marginal

Análise Marginal

A interpretação da derivada como uma taxa de variação é amplamente utilizada em Economia, englobando os conceitos de custo marginal, receita marginal, elasticidade, entre outros.

A denominação *marginal* indica uma variação *na margem*, significando que é considerada como um limite.

Custo Marginal

Supondo que o Custo Total para produzir q unidades de um produto é dado pela função

$$C = C(q)$$

Se aumentarmos a produção de q para $q + \Delta q$, o acréscimo correspondente no custo total é

$$\Delta C = C(q + \Delta q) - C(q)$$

A taxa média de acréscimo no custo, por unidade acrescida, é

$$\frac{\Delta C}{\Delta q} = \frac{C(q + \Delta q) - C(q)}{\Delta q}$$

O Custo Marginal é definido pelo limite

$$C_M(q) = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta q} = C'(q)$$

e representa a taxa de variação instantânea do custo total, por unidade de variação de quantidade produzida, quando a produção é de q.

Receita Marginal

De modo análogo ao Custo Marginal é possível definir a Receita Marginal. Se $R(q)$ é a Receita Total obtida com a comercialização de q unidades de um produto, temos que

$$\Delta R = R(q + \Delta q) - R(q)$$

é o acréscimo na receita quando a demanda aumenta de q para $q + \Delta q$.

A Receita Marginal é a taxa de variação instantânea da receita total por unidade de variação de demanda, quando a demanda é q

$$R_M(q) = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta q} = R'(q)$$

Elasticidade

Dada uma função $y = f(x)$, a Elasticidade de y em relação a x é definida por

$$E(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta y}{y}}{\dfrac{\Delta x}{x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{x}{y} = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y}$$

e representa a taxa de variação percentual de y com relação a variação percentual de x.

7.3 Taxas de Variação e Taxas Relacionadas

Taxas de Variação

Se y é uma grandeza que pode ser escrita em função de outra grandeza x, $y = f(x)$, podemos interpretar a derivada de y por x como a taxa de variação de y com relação a x.

Taxa Média de variação de y por x sobre o intervalo $[a,b]$ é

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Taxa Instantânea de variação de y por x no ponto a é

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Exemplo 7.3.1:

Suponha que $C(x)$ seja o custo total que uma empresa incorre o produção de x unidade de um certo produto. A função C é denominada função de custo. Se o número de itens produzidos aumenta de x_1 para x_2, o custo adicional será $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$, e a taxa média de variação do custo será

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

O limite dessa grandeza quando $\Delta x \to 0$, ou seja, a taxa de variação instantânea da variação de custo em relação ao número de itens produzidos, é denominado custo marginal

$$C_M(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$$

Problemas de Taxas Relacionadas

Em um problema de taxas relacionadas, a ideia é calcular a taxa de variação de uma grandeza em termos da taxa de variação de outra (que pode ser medida mais facilmente).

O procedimento é achar uma equação que relacionar as duas grandezas e então usar a Derivação Implícita para encontrar a relação entre as derivadas.

Estratégia para Resolver Problemas de Taxas Relacionadas

1. Leia cuidadosamente o problema.
2. Se possível faça um diagrama.
3. Introduza uma notação. Atribua símbolos para todas as grandezas que são funções do tempo.
4. Expresse a informação dada e a taxa pedida em termos das derivadas.
5. Escreva uma equação que relacione as várias grandezas do problema.
6. Use a Derivação Implícita (Regra da Cadeia) para obter relações entre as taxas.
7. Substitua a informação dada na equação resultante e resolva-a para determinar a taxa solicitada.

Exemplo 7.3.2: Ar está sendo bombeado para um balão esférico de modo que seu volume aumente a uma taxa de $100\,\text{cm}^3/\text{s}$. Quão rápido o raio do balão está aumentando quando o diâmetro for $50\,\text{cm}$?

Primeiro precisamos identificar a informação dada

- a taxa de crescimento do volume é $100\,\text{cm}^3/\text{s}$

e o que foi perguntado

- a taxa de crescimento do raio quando o diâmetro é $50\,\text{cm}$

Definimos uma notação matemática apropriada

- V é o volume do balão
- r é o raio do balão
- Ambos variam com o tempo t

Assim as taxas de variação do volume e do raio em relação ao tempo são

$$\frac{dV}{dt} \qquad \text{e} \qquad \frac{dr}{dt}$$

Foi dado que a taxa de variação do volume é $100\,\text{cm}^3/\text{s}$, ou seja

$$\frac{dV}{dt} = 100$$

Foi perguntado qual é a taxa de variação do raio quando o diâmetro for 50 cm, ou seja

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=25} = ?$$

Para relacionarmos as taxas de variação do volume e do raio precisamos primeiro relacionar o volume com o raio

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Derivando os dois lados por t, temos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Isolando a incógnita temos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}$$

Substituindo os valores dados, podemos calcular o valor desejado

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=25} = \frac{1}{4\pi 25^2}100 = \frac{1}{25\pi}$$

Exercícios Seção 7.3

Taxas de Variação

1) Considerando a variação da da área de um círculo em relação a se raio r

i) Encontre a taxa de variação média quando r varia de

a) 2 a 3 b) 2 a 2,5 c) 2 a 2,1

ii) Encontre a taxa de variação instantânea quando $r = 2$.

iii) Mostre que a taxa de variação da área de um circulo em relação a seu raio (para qualquer r) é igual à circunferência do círculo.

2) A queda de uma pedra em um lago gera uma onda circular que cresce a uma velocidade de 60 cm/s. Encontre a taxa em que a área do círculo está aumentando após

a) 1 s b) 3 s c) 5 s

3) Um balão esférico começa a ser inflado. Encontre a taxa de crescimento da área da superfície ($S = 4\pi r^2$) em relação ao raio r quando r é

a) 20 cm b) 40 cm c) 60 cm

4) O volume de uma célula esférica de tamanho crescente é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, onde o raio r é medido em micrômetros (1 µm $= 10^{-6}$m).

i) Encontre a taxa de variação média de V em relação ao raio quando r varia de

a) 5 a 8 µm b) 5 a 6 µm c) 5 a 5,1 µm

ii) Encontre a taxa instantânea de variação de V em relação ao raio quando $r = 5\,\mu\text{m}$.

5) O custo, em dólares, da produção de x metros de certo tecido é

$$C(x) = 1\,200 + 12x - 0{,}1x^2 + 0{,}0005x^3$$

a) Encontre a função de custo marginal.

b) Encontre $C'(200)$ e explique seu significado.

c) Compare $C'(200)$ com o custo de manufaturação do 201º metro de tecido.

6) A função custo para um certo produto é

$$C(x) = 339 + 25x - 0{,}09x^2 + 0{,}0004x^3$$

a) Encontre e interprete $C'(100)$.

b) Compare $C'(100)$ com o custo de produzir o 101º item.

7) Se $p(x)$ é o valor total da produção quando há x trabalhadores em uma fábrica, então a *produtividade média* da força de trabalho da fábrica é

$$A(x) = \frac{p(x)}{x}$$

a) Encontre $A'(x)$.

b) Porque a companhia precisa empregar mais trabalhadores se $A'(x) > 0$?

Taxas Relacionadas

8)

9) Cada lado de um quadrado está crescendo a uma taxa de $6\,\text{cm/s}$. A que taxa a área do quadrado estará variando quando ela for igual a $16\,\text{cm}^2$?

10) O volume de um cubo está variando com relação ao tempo. Em um dado instante as arestas do cubo medem $5\,\text{cm}$ e estão aumentando a uma razão de $0{,}1\,\text{cm/s}$. Com que rapidez o volume do cubo está aumentando nesse instante de tempo.

11) Dois carros partem do mesmo ponto ao mesmo tempo. O primeiro segue na direção sul a velocidade de $60\,\text{km/h}$, enquanto o segundo segue na direção oeste a $25\,\text{km/h}$. A que taxa a distância entre eles estará variando duas horas depois?

12) O raio de uma esfera está crescendo a uma taxa de $4\,\text{mm/s}$. Quão rápido o volume vai crescer quando o raio for igual a $40\,\text{mm}$?

13) Calcule a taxa na qual o volume de um cilindro circular reto está variando se sua a altura está diminuindo à razão de $2\,\text{m/s}$ e o seu raio da base aumentando $2{,}5\,\text{m/s}$, quando a altura mede $8\,\text{m}$ e o raio da base $7\,\text{m}$. Neste momento o volume aumenta ou diminui?

14) Sabe-se que num paralelepípedo (caixa retangular) de base quadrada, a aresta da base cresce a taxa de $3\,\text{m/s}$ e a altura diminui a taxa de $6\,\text{m/s}$. Quando a aresta da base mede $5\,\text{m}$ e a altura $6\,\text{m}$, o volume desse paralelepípedo cresce ou decresce? A que taxa?

15) Sabe-se que a potência P (em Watts W) dissipada em um circuito elétrico está relacionada à resistência R (em Ohms Ω) e à corrente I (em Amperes A) por $P = RI^2$. Se P é igual a $80\,\text{W}$, constante, e a taxa à qual R está aumentando é $2\,\Omega/\text{s}$, encontre a taxa de variação da corrente I no instante em que a corrente é igual à $6\,\text{A}$. Neste instante I está aumentando ou diminuindo?

16) Um triângulo retângulo tem seus catetos variando, um cresce a uma taxa de $2\,\text{m/min}$ e outro decresce a taxa de $1\,\text{m/min}$. Encontre a taxa em que a área deste triângulo está variando quando os dois catetos medem $3\,\text{m}$. Neste instante a área aumenta ou diminui?

17) Água está entrando em um reservatório de concreto cônico a uma taxa de $9\,\text{m}^3/\text{min}$. Tal reservatório tem vértice para baixo, com diâmetro da "base" (tampa) de $20\,\text{m}$ e altura de $3\,\text{m}$. Encontre a taxa em que o nível de água está variando quando a profundidade de água no reservatório é de $2\,\text{m}$.

18) Ana está correndo a velocidade constante de $0{,}6\,\text{m/s}$ e passa embaixo de uma lâmpada em um poste situada a $6\,\text{m}$ do solo. Sabendo que Ana tem $1{,}5\,\text{m}$ de altura, encontre a taxa com que o comprimento de sua sombra está aumentando, em relação ao tempo, quando ela está a uma distância de 5 m depois do poste e se afastando do mesmo.

19) Uma mineradora deposita rejeitos de mineração em montes que tem a forma de cones circulares retos. A máquina utilizada deposita tais rejeitos a uma taxa de $3\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$. Neste processo, o raio do cone é mantido igual à sua altura. Com que velocidade a altura do cone aumenta, quando ela medir 3 m? Dica: *O volume do cone circular reto cuja base tem raio r e altura h é* $V = r^2 h\pi/3$.

20) A lei de Boyle para a dilatação de um gás ideal a temperatura constante é $PV = C$, onde P é a pressão do gás, V o seu volume e C é uma constante. Num certo instante, a pressão é de $3000\,\mathrm{N/m^2}$ e o volume é $5\,\mathrm{m}^3$ e o volume está aumentando a uma taxa de $3\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$. Encontre a taxa de variação da pressão neste momento.

21) Um atleta corre em uma pista retilínea a uma velocidade constante de 7 m/s. Seu treinador está em pé, parado, a 60 m da pista. A que taxa está variando a distância entre o atleta e o treinador quando a distância entre ambos for 100 m e o atleta estiver se aproximando do seu treinador?

22) Os mecânicos da automotiva Lincoln estão torneando um cilindro (forma de cilindro circular reto) de 6 cm de profundidade ("altura do cilindro") para receber um novo pistão. A máquina usada aumenta o raio do cilindro em 0,1 cm/s. A que taxa o volume aumentará quando o diâmetro for de 4 cm?

23) Uma esteira transportadora está descarregando cascalho a uma taxa de $3\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$, construindo uma pilha na forma de um cone cujo diâmetro da base é sempre igual a sua altura. Quão rápido a altura da pilha cresce quando a pilha tiver 3 m de altura.

24) De um tanque cônico invertido está vazando água a uma taxa de $10\,000\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{min}$. Ao mesmo tempo água está sendo bombeada para o tanque a uma taxa constante. O tanque tem 6 m e altura e o diâmetro no topo é de 4 m. Se o nível da água estiver subindo a uma taxa de 20 cm/min quando a altura da água for de 2 m, encontre a taxa segundo a qual a água está sendo bombeada para dentro do tanque.

Taxas Relacionadas – Exemplos em Administração e Economia

25) Suponha que o preço por atacado p de uma certa marca de ovos (preço da caixa em Reais) está relacionado com a oferta semanal x (milhares de caixas) pela equação

$$625p^2 - x^2 = 100$$

Se no início de uma semana 25.000 caixas de ovos são oferecidas e se o preço está caindo a uma razão de 2 centavos por caixa por semana, com que razão a oferta está variando?

26) Suponha que a quantidade x de pneus colocados à venda por semana está relacionada com o preço de venda unitário pela equação

$$\frac{x^2}{2} + 2p^2 + xp = 100$$

onde x é medido em milhares de unidades e p em reais. Com que rapidez a oferta semanal de pneus colocados a venda no mercado varia quando estão sendo oferecidos cem mil pneus ao preço de R\$ 200,00 e sabemos que o preço está caindo a uma razão de R\$ 1,00 por semana?

7.4 A Regra de l'Hôpital

A Regra de l'Hôpital ou l'Hospital

A regra de l'Hôpital é uma técnica para simplificar o calculo de limites que apresentam indeterminações dos tipos $0/0$ ou ∞/∞.

Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo aberto I, exceto, possivelmente, em $a \in I$. Se $g'(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$ em I, temos que, se

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

ou

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

e

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Outras indeterminações precisam ser transformadas algebricamente em $0/0$ ou ∞/∞ para que seja possível aplicar a Regra de l'Hôpital.

Exemplo 7.4.1: Calcule o limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x}{e^x - 1}$.

Quando $x \to 0$ o quociente se torna uma indeterminação do tipo $0/0$. Podemos aplicar a Regra de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{(2x)'}{(e^x - 1)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{e^0} = 2$$

Exemplo 7.4.2: Calcule o limite $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$.

Quando $x \to 2$ o quociente se torna uma indeterminação do tipo $0/0$. Podemos aplicar a Regra de l'Hôpital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2} &= \lim_{x\to 2} \frac{(x^2+x-6)'}{(x^2-3x+2)'}\\ &= \lim_{x\to 2} \frac{2x+1}{2x-3}\\ &= \frac{2\times 2+1}{2\times 2-3}\\ &= 5\end{aligned}$$

Exemplo 7.4.3: Calcule o limite $\lim_{x\to \infty} \frac{e^x-1}{x^3+4x}$.

Quando $x \to \infty$ o quociente se torna uma indeterminação do tipo ∞/∞. Podemos aplicar a Regra de l'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x-1}{x^3+4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(e^x-1)'}{(x^3+4x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{3x^2+4}$$

Novamente, quando $x \to \infty$ o quociente se torna uma indeterminação do tipo ∞/∞. Portanto, aplicamos novamente a Regra de l'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x-1}{x^3+4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(e^x)'}{(3x^2+4)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{6x}$$

Aplicando novamente a Regra de l'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x-1}{x^3+4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(e^x)'}{(6x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{6} = \infty$$

Exercícios Seção 7.4

A Regra de l'Hôpital

1) Calcule os limites usando a Regra de l'Hôpital

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+4x+3}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2+6x}{x^3+7x^2+5x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1/2} \frac{2x^2+x-1}{4x^2-4x+1}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{6-2x+3x^2-x^3}{x^4-3x^3-x+3}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x^2-6x+7}{x^3+7x-1}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{5-5x^3}{2-2x^3}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{7x^5-6}{4x^2-2x+4}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{5-x+x^2}{2-x-2x^2}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^2}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x^{99}}{e^x}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x^2\left(e^{1/x}-1\right)$

m) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{2^x}{2^x-1}$

2) Encontre os limites. Use a Regra de l'Hôpital quando for apropriado. Se houver um método mais elementar, considere usá-lo. Se a Regra de l'Hôpital não for aplicável explique o por quê.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x+1}{x^3-1}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1/2} \frac{6x^2+5x-4}{4x^2+16x-9}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x+x^2}{1-2x^2}$

3) Encontre os limites.

a) $\displaystyle\lim_{x\to o^+} \frac{\ln x}{x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\ln\sqrt{x}}{x^2}$

c) $\displaystyle\lim_{t\to 1} \frac{t^8-1}{t^5-1}$

d) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{8^t-5^t}{t}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-4x}}{x}$

f) $\displaystyle\lim_{u\to \infty} \frac{e^{u/10}}{u^3}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x3^x}{3^x-1}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^a-ax+a-1}{(x-1)^2}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}-2x}{x^2}$

4) Verifique se a regra de L'Hôpital pode ser usada nos limites a seguir e calcule-os.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-4x}}{x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^2}$

7.5 Crescimento e Decrescimento de Funções

Funções Crescentes e Decrescentes

Dizemos que uma função f é crescente, em um intervalo I, se para quaisquer pontos x_1, $x_2 \in I$ tais que $x_1 < x_2$ temos que $f(x_1) < f(x_2)$.

Dizemos que uma função f é decrescente, em um intervalo I, se para quaisquer pontos x_1, $x_2 \in I$ tais que $x_1 < x_2$ temos que $f(x_1) > f(x_2)$.

Se uma função é crescente ou decrescente em um intervalo dizemos que ela é monótona nesse intervalo.

Crescimento e a Derivada

Se f é uma função contínua em um intervalo fechado $[a,b]$ e derivável no intervalo aberto (a,b), então

- Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$ então f é crescente em $[a,b]$
- Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$ então f é decrescente em $[a,b]$

Exercícios Seção 7.5

Crescimento, Decrescimento, Máximos e Mínimos de Funções

1) [resp] Encontre os máximos e mínimos relativos, se houver, para cada função.

a) $g(x) = x^2 + 3x + 8$

b) $f(x) = x^2 - 4x$

c) $h(t) = -t^2 + 6t + 6$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$

e) $f(x) = x^{2/3} + 2$

f) $g(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

g) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$

h) $g(x) = x^4 - 4x^3 + 8$

i) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 4$

j) $h(x) = \dfrac{x}{x+1}$

k) $g(x) = \dfrac{x+1}{x}$

l) $g(x) = 2x^2 + \dfrac{4000}{x} + 10$

m) $f(x) = x + \dfrac{9}{x} + 2$

n) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

o) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$

p) $g(x) = x\sqrt{x-4}$

q) $f(x) = (x-1)^{2/3}$

2) [resp] Determine se a afirmação é verdadeira ou falsa. Se verdadeira, explique por quê. Se falsa, dê um exemplo mostrando porque é falsa.

a) Se f é decrescente em (a, b), então $f(x) < 0$ para cada x em (a, b).

b) Se f e g são ambas crescentes em (a, b), então $f + g$ é crescente em (a, b).

c) Se f e g são ambas decrescentes em (a, b), então $f - g$ é decrescente em (a, b).

d) Se $f(x)$ e $g(x)$ são positivas em (a, b) e tanto f como g são decrescentes em (a, b), então fg é crescente em (a, b).

e) Se $f'(c) = 0$, então f tem um máximo relativo ou um mínimo relativo em $x = c$.

f) Se f tem um mínimo relativo em $x = c$, então $f'(c) = 0$.

3) [resp] Seja

$$f(x) = \begin{cases} -3x, & \text{se } x < 0 \\ 2x+4, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Calcule $f'(x)$ e mostre que ela muda de sinal de negativo para positivo quando passamos por $x = 0$.

b) Mostre que f não tem um mínimo relativo em $x = 0$. Isto contradiz o teste da primeira derivada? Explique sua resposta.

4) Seja

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+3, & \text{se } x \neq 0 \\ 2, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

a) Calcule $f'(x)$ e mostre que a função muda de sinal de positivo para negativo quando passamos por $x = 0$.

b) Mostre que f não tem um máximo relativo em $x = 0$. Isto contradiz o teste da primeira derivada? Explique sua resposta.

5) Mostre que a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

tem um extremo relativo quando $x = -b/2a$ e que o extremo relativo é um máximo relativo se $a < 0$ e um mínimo relativo se $a > 0$.

6) Mostre que a função cúbica

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (a \neq 0)$$

não tem um extremo relativo se, e somente se, $b^2 - 3ac \leq 0$.

7) Com relação à função $f(x) = x^{2/3}$:

a) Mostre que f é crescente no intervalo $(0, 1)$.

b) Mostre que $f(0) = -1$ e $f(1) = 1$ e use o resultado do item (a) junto com o teorema do valor intermediário para concluir que existe exatamente uma raiz de $f(x) = 0$ em $(0, 1)$.

8) Mostre que a função

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

não tem um extremos relativo se $-bc \neq 0$. O que você pode dizer sobre f se $ad - bc = 0$?

9) [resp] Determine os valores máximo e mínimos absolutos, se existirem, da função dada.

a) $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$

b) $g(x) = -x^2 + 4x + 3$

c) $h(x) = x^{1/3}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

e) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ em $[-2, 3]$

f) $f(x) = -x^2 + 4x + 6$ em $[0, 5]$

g) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ em $[-3, 2]$

h) $g(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ em $[-3, 1]$

i) $g(x) = 3x^4 + 4x^3$ em $[-2, 1]$

j) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 3$ em $[-2, 3]$

k) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ em $[2, 4]$

l) $f(x) = 4x + \dfrac{1}{x}$ em $[1,3]$

m) $f(x) = 9x - \dfrac{1}{x}$ em $[1,3]$

n) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2\sqrt{x}$ em $[0,3]$

o) $g(x) = \dfrac{1}{8}x^2 - 4\sqrt{x}$ em $[0,9]$

p) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ em $(0,\infty)$

q) $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ em $(0,\infty)$

r) $f(x) = 3x^{2/3} - 2x$ em $[0,3]$

s) $g(x) = x^2 + 2x^{2/3}$ em $[-2,2]$

t) $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 4)$ em $[-1,2]$

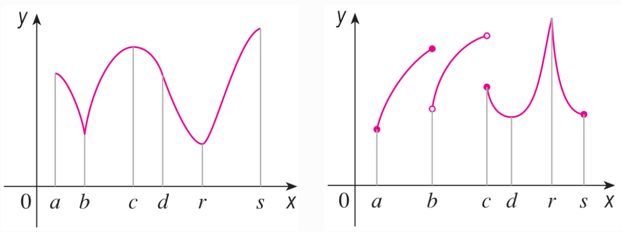
u) $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 4)$ em $[-1,3]$

v) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$ em $[-1,2]$

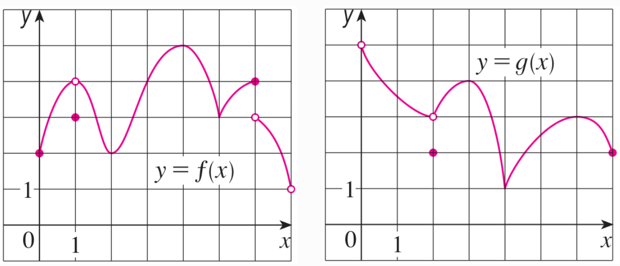
w) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ em $[-1,1]$

x) $g(x) = x\sqrt{4-x^2}$ em $[0,2]$

10) Para cada valor a, b, c, d, r e s determine se a função, cujo gráfico é dado, possui um máximo ou mínimo, local ou global.



11) Use o gráfico de cada função para determinar os máximos e mínimos locais e globais.



12) Esboce o gráfico de uma função contínua no intervalo [1,5] que tenha as seguintes propriedades.

a) Um mínimo absoluto em 2, um máximo absoluto em 3 e um mínimo local em 4.

b) Um mínimo absoluto em 1, um máximo absoluto em 5, um máximo local em 2 e um mínimo local em 4.

c) Um máximo absoluto em 5, um mínimo absoluto em 2, um máximo local em 3 e um mínimo local em 2 e 4.

d) A função não possui nenhum mínimo ou máximo locais, mas 2 e 4 são pontos críticos.

13) Esboce o gráfico das seguintes funções.

a) f possui um máximo local em 2 e é derivável em 2.

b) f possui um máximo local em 2 e é contínua mas não derivável em 2.

c) f possui um máximo local em 2 e é descontínua em 2.

14) Esboce o gráfico de uma função no intervalo [−1,2] que possui máximo local mas não possui máximo global.

15) Esboce o gráfico de uma função no intervalo [−1,2] que possui máximo global mas não possui mínimo global.

16) Esboce o gráfico de uma função descontínua no intervalo [−1,2] que possui máximo e mínimo globais.

17) Esboce o gráfico de uma função com dois máximos locais, um mínimo local e nenhum mínimo global.

18) Esboce o gráfico de uma função com três mínimo locais, dois máximos locais e sete pontos críticos.

19) Encontre os pontos críticos das funções.

a) $f(x) = 4 + \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^2}{2}$

b) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$

c) $f(x) = 2x^3 - 3^2 - 36x$

d) $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x$

e) $g(t) = t^4 + t^3 + t^2 + 1$

f) $g(t) = |3t - 4|$

g) $g(y) = \dfrac{y-1}{y^2-y+1}$

h) $h(p) = \dfrac{p-1}{p^2+4}$

i) $h(t) = t^{3/4} - 2t^{1/4}$

j) $g(x) = x^{1/3} - x^{-2/3}$

k) $F(x) = x^{4/5}(x-4)^2$

l) $f(x) = x^2 e^{-3x}$

m) $f(x) = x^{-2}\ln x$

20) Dada a formula da derivada de uma função f, calcule os pontos críticos de f.

a) $f'(x) = e^x(x-1)(x+1)$

b) $f'(x) = (x^2-x-2)\ln x$

21) Encontre o máximo e o mínimo absolutos de f no intervalo dado.

a) $f(x) = 12 + 4x - x^2$ $[0,5]$

b) $f(x) = 5 + 54x - 2x^3$ $[0,4]$

c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ $[-2,3]$

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$ $[-3,5]$

e) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1$ $[-2,3]$

f) $f(x) = (x^2-1)^3$ $[-1,2]$

g) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ $[1/5,4]$

h) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-x+1}$ $[0,3]$

i) $f(t) = t\sqrt{4-t^2}$ $[-1,2]$

j) $f(t) = \sqrt[3]{t}(8-t$ $[-1,2]$

k) $f(x) = xe^{-x^2/8}$ $[-1,4]$

l) $f(x) = x - \ln x$ $[1/2,2]$

m) $f(x) = \ln(x^2+x+1)$ $[-1,1]$

22) Mostre que 5 é um ponto crítico da função $g(x) = 2 + (x-5)^3$, mas g não possui um extremo local em 5.

23) Se a função $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ possui um mínimo local de $-2\sqrt{3}/9$ em $x = 1/\sqrt{3}$, quais os valores de a e b?

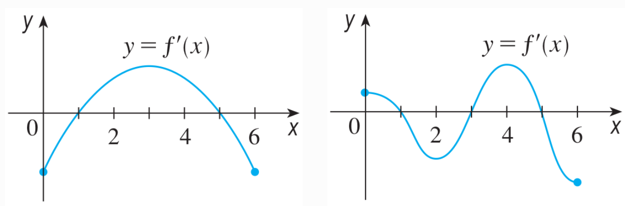
24) Dado o gráfico da derivada f' de uma função f, determine:

a) Os intervalos abertos onde f é crescente.

b) Os intervalos abertos onde f é decrescente.

c) Os valores de x onde f possui máximos locais.

d) Os valores de x onde f possui mínimos locais.



7.6 Máximos e Mínimos de Funções

Extremos de Funções

Chamamos de extremos os pontos onde uma função assume seu valor máximo ou mínimo.

Uma função f tem um máximo global (ou absoluto) em $c \in D_f$, se $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in D_f$.

Uma função f tem um mínimo global (ou absoluto) em $c \in D_f$, se $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in D_f$.

Esses pontos não precisam ser únicos.

Extremos Locais

Uma função f tem um máximo local (ou relativo) em c, se existe um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I \cap D_f$.

Uma função f tem um mínimo local (ou relativo) em c, se existe um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I \cap D_f$.

Extremos Locais e a Derivada

Se f possui um extremo local em x e $f'(x)$ existe, então $f'(x) = 0$

Pontos Críticos

Pontos críticos são candidatos a extremos locais.

Um ponto x no domínio de f é um ponto crítico de f se

$$f'(x) = 0 \qquad \text{ou} \qquad f'(x) \quad \text{não existe}$$

Nem todo ponto crítico é um extremo da função.

Classificação dos Extremos de uma Função – Teste da Primeira Derivada

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e derivável no intervalo aberto (a,b), exceto possivelmente no ponto c.

1. Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f tem um máximo local em c.
2. Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f tem um mínimo local em c.

Extremos e Continuidade

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $[a,b]$, então f assume um máximo e um mínimo globais no intervalo $[a,b]$.

Para encontrarmos os extremos globais de uma função, f, contínua em um intervalo fechado $[a,b]$, devemos:

1. Encontrar os pontos críticos de f em (a,b).
2. Calcular o valor de f nos pontos críticos encontrados.
3. Calcular o valor de f em a e em b.
4. Selecionar o maior e o menor valor de f entre os calculados.

Exercícios Seção 7.6

Problemas de Otimização

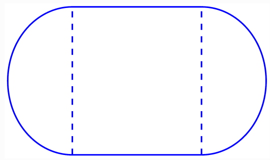
1) Qual a distância vertical mínima entre as parábolas $y = x^2 + 1$ e $y = x - x^2$.

2) Encontre o ponto da curva $y = 2x + 3$ mais próximo da origem. Dica: faça as contas usando o quadrado da distância.

3) Encontre o ponto da curva $y = \sqrt{x}$ mais próximo do ponto $(3,0)$. Dica: faça as contas usando o quadrado da distância.

4) Considere dois cones de tamanhos diferentes, ambos em forma de cone circular reto. O cone maior tem raio da base 6 m e altura 12 m. O cone menor está inscrito no maior de "cabeça para baixo", de tal forma que as bases dos cones são paralelas e o vértice do cone menor coincide com o centro da base do maior. Encontre as dimensões do cone inscrito de maior volume.

5) Deve-se construir um tanque para armazenamento de gás propano em forma de cilindro circular reto com dois hemisférios (metade da esfera), perfeitamente encaixado nas extremidades, abaixo figura com corte de tal tanque. O custo de metro quadrado dos hemisférios é o dobro do custo da parte cilíndrica. Se a capacidade do tanque deve ser de $18\pi \mathrm{m}^3$, determine a dimensão do raio da esfera que minimizará o custo da construção de tal tanque.



6) Um triângulo isósceles tem um de seus vértices na origem e sua base é paralela ao eixo x, estando os vértices da base acima do eixo x e sobre a curva $y = 27 - x^2$. Determine a maior área que tal triângulo pode assumir.

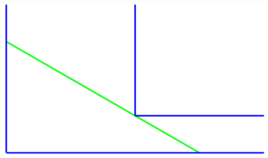
7) Encontre os pontos da curva $y = 4/x^2$ que estão mais próximos da origem.

8) Encontre as dimensões de um canteiro retangular, que exigirão a menor quantidade de material para construção de uma cerca. Sabe-se que este canteiro será cercado com uma cerca ao seu redor e dividido ao meio com uma cerca paralela a um dos lados. A área total do canteiro deve ser de $24\,\mathrm{m}^2$.

9) Um retângulo tem sua base no eixo x, um lado sobre o eixo y e o vértice superior direito, no primeiro quadrante, sobre a curva $y = e^{-x^2}$. Determine a maior área que esse retângulo pode ter.

10) Encontre as dimensões do triângulo isósceles, de maior área, que pode ser inscrito em uma circunferência de raio r.

11) Quer-se transportar uma escada passando de um corredor que tem 1 m de largura para outro que tem 4 m de largura, conforme figura. Qual o comprimento da maior escada que se consegue transportar horizontalmente de um corredor para o outro?



12) Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito na elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

13) Uma caixa sem tampa deve ser construída a partir de uma folha de papelão quadrada de 3 m de largura. Um quadrado deve ser removido de cada canto da folha e cada lado deve ser dobrando para cima formando a caixa. Utilizando as ferramentas do cálculo determine quais são as dimensões da caixa com maior volume que pode ser construída dessa forma?

14) Uma caixa com base quadrada e com tampa aberta precisa ter o volume de $32\,\text{cm}^3$. Encontre as dimensões da caixa que minimizam a quantidade de material necessária para sua construção.

15) Uma janela normanda tem a forma de um retângulo tendo em cima um semicírculo. O diâmetro do semicírculo é igual a largura do retângulo. Se o perímetro da janela for 10 m, encontre as dimensões da janela que deixam passar a maior quantidade possível de luz.

16) Encontre a equação da reta que passa pelo ponto $(3{,}5)$ que delimita a região de menor área no primeiro quadrante.

17) Uma partícula se move ao longo da hipérbole $xy = 8$. Quando ela passa pelo ponto $(4{,}2)$ a coordenada y está diminuindo a uma taxa de $3\,\text{cm/s}$. Com que velocidade a coordenada x está variando nesse momento?

7.7 Concavidade dos Gráficos das Funções

Concavidade

Dizemos que uma função tem concavidade para cima em um ponto c quando seu gráfico fica acima da reta tangente no ponto $(c, f(c))$.

Dizemos que uma função tem concavidade para baixo em um ponto c quando seu gráfico fica abaixo da reta tangente no ponto $(c, f(c))$.

Concavidade e a Derivada

Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e derivável até segunda ordem no intervalo (a,b).

- ◇ Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, f é côncava para cima em (a,b).
- ◇ Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$, f é côncava para baixo em (a,b).

Ponto de Inflexão

Um ponto $(c,f(c))$ do gráfico de uma função contínua f é chamado de Ponto de Inflexão, se f muda de concavidade em c.

Critério da Segunda Derivada para Classificação de Extremos

Seja f uma função derivável no intervalo aberto (a,b) e $f'(c) = 0$ com $a < c < b$. Se $f''(c)$ existe, temos que

- ◇ Se $f''(c) < 0$, f tem um máximo local em c.
- ◇ Se $f''(x) > 0$, f tem um mínimo local em c.

Exercícios Seção 7.7

Concavidade dos Gráficos das Funções

1) Use os gráficos de f fornecidos para determinar:

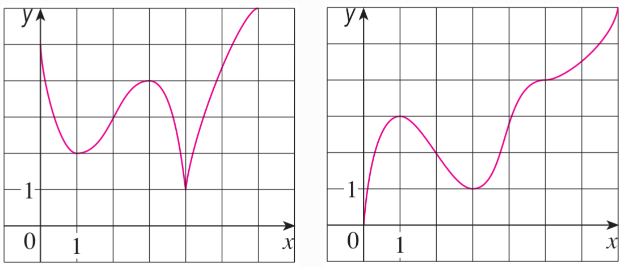
a) Os intervalos abertos onde f é crescente.

b) Os intervalos abertos onde f é decrescente.

c) Os intervalos abertos onde f é côncava para cima.

d) Os intervalos abertos onde f é côncava para baixo.

e) As coordenadas dos pontos de inflexão.

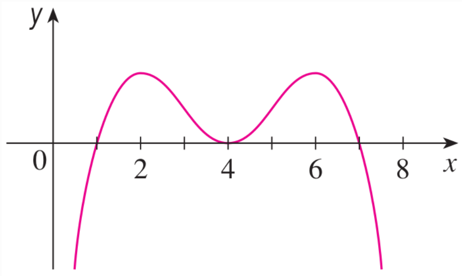


2) Em cada caso determine os valores da coordenada x dos pontos de inflexão da função f. Justifique suas respostas.

a) A curva é o gráfico de f.

b) A curva é o gráfico de f'.

c) A curva é o gráfico de f''.



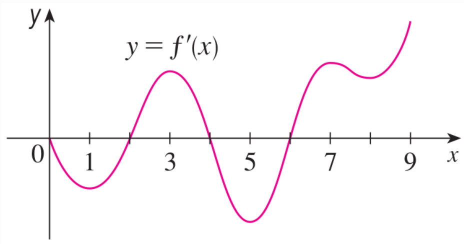
3) Dado o gráfico da derivada f' de uma função f.

a) Em quais intervalos f é crescente.

b) Quais são valores de x onde f tem máximo ou mínimo locais.

c) Em quais intervalos f tem concavidade para cima e para baixo.

d) Quais são valores de x onde f tem pontos de inflexão.



4) Para cada função encontre:

i) Os intervalos onde f é crescente e decrescente.

ii) Os mínimos e máximos locais de f.

iii) Os intervalos onde a concavidade é para cima e para baixo.

iv) Os pontos de inflexão de f.

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$

b) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

c) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

e) $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

f) $f(x) = x^2 \ln x$

g) $f(x) = x^2 - x - \ln x$

h) $f(x) = x^4 e^{-x}$

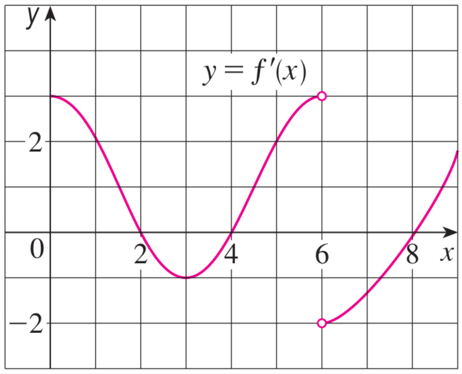
5) Encontre os máximos e mínimos locais de f usando o teste da primeira e da segunda derivada. Qual você prefere?

a) $f(x) = 1 + 3x^2 - 2x^3$

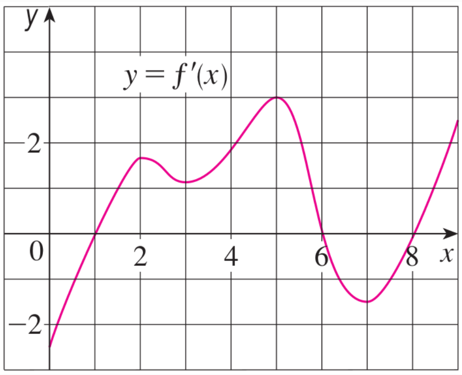
b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

c) $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[4]{x}$

6) a)



7) a)



8) Encontre os valores de a e b para os quais o ponto (1,3) é um ponto de inflexão do gráfico da função $y = ax^3 + bx^2$.

7.8 Traçando o Gráficos de Funções

Construção de Gráficos

Ao construirmos o gráfico de uma função estamos fazendo uma análise geral do comportamento dessa função.

Para esboçarmos o gráfico de uma função seguimos os passos

1. Encontrar o domínio de f.
2. Encontrar os pontos de intersecção com os eixos (se possível).
3. Encontrar os limites nas fronteiras do domínio.
4. Encontrar as assintotas verticais e horizontais.
5. Encontrar os pontos críticos.
6. Encontrar os intervalos de crescimento e decrescimento.
7. Encontrar os máximos e mínimos locais.
8. Encontrar a concavidade da função.
9. Encontrar os pontos de inflexão.
10. Esboçar o gráfico.

Exercícios Seção 7.8

Traçado de Gráficos de Funções

1) Considerando as funções a seguir
i) Determine e classifique seus pontos críticos
ii) Determine seu domínio e os intervalos onde ela é crescente e decrescente
iii) Determine onde ela tem concavidade para cima ou para baixo
iv) Esboce o seu gráfico

a) $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$ b) $y = (2-x^2)^{3/2}$

2) Considerando as funções a seguir
i) Calcule sua primeira e segunda derivadas
ii) Determine e classifique seus pontos críticos
iii) Determine seu domínio, intervalos de crescimento e concavidades
iv) Determine suas assíntotas
v) Esboce seu gráfico

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+3}$

3) [resp] Esboce o gráfico de cada função.

a) $f(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2}$

d) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$

e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$

g) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 9}$

h) $f(x) = x\,(x-4)^3$

i) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 8$

4) Determine o domínio e esboce o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$

5) Esboce o gráfico da função

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 3}$$

usando as assíntotas e os testes crescente/decrescente, primeira e segunda derivadas e concavidade. Determine, se houver, pontos críticos, máximos, mínimos e pontos de inflexão.

6) Dadas as funções $f(x)$ abaixo esboce o gráfico de $y = f(x)$, estudando seu crescimento e sua concavidade. Indique os pontos críticos e de inflexão, estude o comportamento no infinito e encontre todas as assíntotas. Além disso, classifique os pontos críticos, se são máximo local ou mínimo local, ou, analisando o gráfico, se são também máximo absoluto ou mínimo absoluto.

a) $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^x}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2 - x}$

d) $f(x) = xe^{(1/x)}$

e) $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 3)$

f) $f(x) = x^2 + \ln(x^2)$

g) $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{x}$

h) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4 - x^2}, & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{-x^2}{4 + x^2}, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

i) $f(x) = x^{2/3}\left(\dfrac{5}{2} - x\right)$

j) $f(x) = 1 + \dfrac{x^2 + 5x + 7}{x + 2}$

k) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(1 + x^2)}$

7) Esboce o gráfico da função

$$f(x) = \frac{1}{\ln(5 - x^2)}$$

encontrando os intervalos onde essa função é crescente e onde é decrescente; localize os pontos críticos de f; encontre todas as assíntotas de f e estude seu comportamento no infinito, quando possível; classifique os pontos críticos, se são máximo local ou mínimo local, ou, analisando o gráfico, se são também máximo absoluto ou mínimo absoluto. É dado que no intervalo $(-2{,}2)$ o gráfico da função é côncavo para cima, nos demais pontos é côncavo para baixo.

8) Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}, & \text{se } x < -2 \text{ ou } x > 2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}} - 2, & \text{se } -2 < x < 2 \end{cases}$$

a) encontre os intervalos onde essa função é crescente e onde é decrescente;

b) encontre todas as assíntotas de f e estude seu comportamento no infinito, quando possível;

c) esboce o gráfico de $y = f(x)$

É dado que o gráfico de $y = f(x)$ é sempre côncavo para cima, portanto a função não tem ponto de inflexão.

A

Referências e Recursos Online

A.1 Recursos Online

Existem muitos recursos *online* que servem como apoio ao estudo de Matemática. Utilizar esses recursos é altamente recomendável, porém lembre-se que apenas assistir vídeos passivamente não é suficiente para aprender Matemática, da mesma forma que, assistir atletas olímpicos não nos torna atletas também.

Alguns recursos *online* que podem ser uteis:

- www.wolframalpha.com
  WolframAlpha é um mecanismo de conhecimento computacional que é capaz de fazer muitos cálculos.
- pt.khanacademy.org
  A Khan Academy é uma ONG educacional criada e sustentada por Sal Khan. Com a missão de fornecer educação de alta qualidade para qualquer um, em qualquer lugar, oferece uma coleção grátis de vídeos de matemática, medicina e saúde, economia e finanças, física, química, biologia, ciência da computação, entre outras matérias.
- www.mathway.com/pt
  A Mathway fornece aos alunos ferramentas para compreender e resolver problemas matemáticos. As resoluções são apresentadas passo a passo.

◇ onlinemschool.com/math/assistance/equation/gaus
Calculadora online que utiliza o método de Gauss para resolver um sistema linear mostrando os cálculos passo a passo.

Nas seções deste capítulo indicamos alguns vídeos e atividades relacionados com os conteúdos de cada capítulo da apostila. Esses conteúdos podem ser muito úteis como auxilio no estudo de cada tópico. Notem, porém, que a organização ou ordem dos tópicos varia de curso para curso. Algumas vezes notações também variam e em casos extremos definições distintas podem ser empregadas.

Respostas

Capítulo 1

Seção 1.2

1) a) Falso b) Falso c) Falso

11) a) $x \in (3/2, \infty)$
b) $x \in [-5/8, \infty)$
c) $x \in (-\infty, 9]$
d) $a \in (-\infty, 14)$
e) $z \in (1/4, \infty)$
f) $x \in [-2, \infty)$
g) $x \in [-6, \infty)$
h) $x \in [-1/3, \infty)$
i) $w \in (-\infty, -32)$
j) $y \in (-2, \infty)$

12) a) $x \in (1/2, \infty)$
b) $x \in (-\infty, -3]$
c) $v \in (-\infty, 3]$
d) $z \in (-\infty, -7/4)$
e) $x \in (-\infty, 9/7)$
f) $x \in (-3/5, \infty)$
g) $x \in (-\infty, 1/3]$
h) $x \in (-\infty, 2]$
i) $x \in (0, \infty)$
j) $x \in (-\infty, 3/7)$
k) $x \in [5/11, \infty)$
l) $x \in (-\infty, -1/2)$
m) $x \in (-\infty, -1/3]$
n) $x \in (2/3, \infty)$
o) $x \in (-\infty, 9)$
p) $x \in (8/9, \infty)$
q) $x \in (10/3, \infty)$
r) $x \in (-3/5, \infty)$
s) $x \in [-1/8, \infty)$
t) $x \in (-\infty, -1]$

13) a) $x \in (1/2, 3/2)$
b) $x \in [-3/4, 2]$
c) $x \in [-3, 3]$
d) $x \in [1, 4]$
e) $x \in [1, 4]$
f) $x \in [6, 12)$
g) $x \in (-2, 4]$
h) $x \in [3/4, 5/2]$
i) $x \in (15/2, 21/2)$
j) $x \in [-2, 0]$
k) $x \in [-4, 2]$
l) $s \in [-1/2, 1]$
m) $x \in [1/4, 4]$
n) $x \in [1/4, 5]$
o) $x \in [1/4, 11/4]$

14) a) $x \in (-\infty, 2] \cup [4, \infty)$
b) $x \in [-1, 3]$
c) $x \in (-\infty, 0] \cup [1/2, \infty)$
d) $x \in [0, 1/4]$
e) $x \in (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$
f) $x \in [-3, 3/5]$
g) $x \in [-5/2, 1/2]$
h) $x \in (-\infty, 6) \cup (6, \infty)$

15) a) $x \in (-\infty, 0] \cup [3, \infty)$
b) $x \in [0, 5/3]$
c) $x \in \left[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right]$
d) $x \in [-6, 0]$
e) $x \in (-\infty, 0] \cup [\sqrt{5}/3, \infty)$
f) $x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$
g) $x \in [-3/7, 3/7]$
h) $x \in \left(-\infty, -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}, \infty\right)$

i) $x \in [-3/2, 2]$

j) $x \in \emptyset$

k) $x \in \{-1\}$

l) $x \in (-\infty, -5] \cup [2, \infty)$

m) $x \in [-6, -3]$

n) $x \in (-\infty, \infty)$

o) $x \in (-\infty, 1/3] \cup [5, \infty)$

p) $x \in \emptyset$

q) $x \in (-\infty, \infty)$

r) $x \in [-1, 5/3]$

s) $x \in (-\infty, -2] \cup [6, \infty)$

t) $x \in [2, 18]$

u) $x \in (-\infty, -1/2] \cup [3, \infty)$

v) $x \in (-\infty, 4] \cup [8, \infty)$

16) a) $x \in [-4, -3] \cup [1, 2]$

b) $x \in \left[-2, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, 2\right]$

c) $x \in [-1, 1] \cup [3, 5]$

d) $x \in [-1, -1/2]$

e) $x \in [3, 4] \cup [8, 9]$

f) $x \in [-4, 0] \cup [1, 5]$

17) a) $x \in (-3, 2]$

b) $x \in (-\infty, -4] \cup (2, \infty)$

c) $x \in (1, 3/2]$

d) $x \in (-\infty, -2) \cup [-5/4, \infty)$

e) $x \in (-3, 3]$

f) $x \in (1/2, 4/5]$

g) $x \in [-3, -2)$

h) $x \in [2/3, 5/2)$

i) $x \in (4, 8]$

j) $x \in [-1, 2)$

k) $x \in (-\infty, 5/9] \cup (5/2, \infty)$

l) $x \in (-\infty, 1/6) \cup [2/5, \infty)$

m) $x \in (4, 5]$

18) a) $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1] \cup [2, \infty)$

b) $x \in (-\infty, -8] \cup (-4, -3)$

c) $x \in [-5/2, -2) \cup (2, 5/2]$

d) $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

e) $x \in [-2, -1) \cup (0, 1]$

f) $x \in (-\infty, -8/3] \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$

g) $x \in [-1, 4/3]$

h) $x \in (-\infty, 5/2)$

i) $x \in (-2, 1] \cup [3, \infty)$

j) $x \in (-4, 1/2] \cup [5/2, 5)$

k) $x \in \left[-\sqrt{5}, -1\right) \cup \left[\sqrt{5}, 3\right)$

l) $x \in (-\infty, -15) \cup [-4, 3]$

m) $x \in (-\infty, -7] \cup (-2, -1] \cup (5, \infty)$

19) a) $x \in [0, 64]$

b) $x \in [9, \infty)$

c) $x \in [0, \infty)$

d) $x \in (-\infty, -2]$

e) $x \in [3/2, 14]$

f) $x \in [-4, \infty)$

g) $x \in [-2, 7]$

h) $x \in [3, 10/3]$

i) $x \in [2, \infty)$

j) $x \in [5/12, \infty)$

k) $x \in \left[-\sqrt{2}, 1/5\right] \cup \left[1, \sqrt{2}\right]$

l) $x \in [6, \infty)$

m) $x \in (-\infty, 2]$

n) $x \in \{-2\} \cup [5/2, 7]$

23) a) 8 d) $\pi - 3$ g) $2/5$

b) 8 e) $\pi - 3$ h) 2

c) -8 f) $4 - \sqrt{8}$

24) a) 4 d) $1/4$ f) $\pi + 1$

b) 8 e) $5\sqrt{3}$ g) $1 - \sqrt{3}$

c) 2

28) a) $-|x| = \begin{cases} -x, & \text{se } x \geq 0 \\ x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

b) $|x| - 5 = \begin{cases} x - 5, & \text{se } x \geq 0 \\ -x - 5, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

c) $5 - |x| = \begin{cases} 5 - x, & \text{se } x \geq 0 \\ 5 + x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

d) $|x - 5| = \begin{cases} x - 5, & \text{se } x \geq 5 \\ 5 - x, & \text{se } x < 5 \end{cases}$

e) $|5 - x| = \begin{cases} x - 5, & \text{se } x \geq 5 \\ 5 - x, & \text{se } x < 5 \end{cases}$

f) $|5x + 1| = \begin{cases} 5x + 1, & \text{se } x \geq -1/5 \\ -5x - 1, & \text{se } x < -1/5 \end{cases}$

g) $|4-3x| = \begin{cases} 4-3x, & \text{se } x \leq 4/3 \\ 3x-4, & \text{se } x > 4/3 \end{cases}$

h) $|x^2+7| = x^2+7$

i) $|x^2-9| = \begin{cases} x^2-9, & \text{se } x \leq -3 \text{ ou } x \geq 3 \\ 9-x^2, & \text{se } -3 < x3 \end{cases}$

29) a) $|5 \times (-3)| = 15$

b) $-3|-5| = -15$

c) $\left|\dfrac{-3}{-6}\right| = 1/2$

d) $\left|\dfrac{5-17}{15-6}\right| = 3/4$

e) $|-2| + 6|-5| = 32$

f) $\big|-2+|-5|\big| = 3$

30) a) $|(-4x) \times (-6)| = 24|x|$

b) $\left|\dfrac{3x}{-6}\right| = \dfrac{|x|}{2}$

c) $\left|-\dfrac{-3}{6x}\right| = \dfrac{1}{2|x|}$

d) $|-4x| + |8x| = 12|x|$

e) $|2x| - |-2x| = 0$

f) $\left|\dfrac{2x}{3}\right| - \dfrac{|x|}{6} = \dfrac{|x|}{2}$

g) $\dfrac{|2x^2|}{|-4xy|} = \dfrac{|x|}{2|y|}$

h) $\dfrac{\sqrt{x^2}}{|x|} = 1$

i) $\sqrt{|-2x^2|} = |x|\sqrt{2}$

31) a) 3   c) 3,5

b) 20   d) 14

36) a) $x = -4$ ou $x = 4$

b) Não há solução

c) $x = 4$

d) $x = 4$

e) $x = -4$ ou $x = 4$

f) $x = -4$ ou $x = 4$

37) a) $x = -4$ ou $x = -2$ ou $x = 2$ ou $x = 4$

b) $x = -3/2$ ou $x = 3/2$

c) $x = -1$ ou $x = 7$ ou $x = 3-\sqrt{2}$ ou $x = 3+\sqrt{2}$

d) $x = 0$ ou $x = 4$

e) $x = -2/3$ ou $x = -1/2$ ou $x = 0$ ou $x = 2$

f) $x = -6$ ou $x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = 3$

g) $x = 3$ ou $x = -3-\sqrt{2}$

h) $x = -2$ ou $x = 2$

i) $x = -7$ ou $x = 2$ ou $x = 3$

j) $x = -\sqrt{13}$ ou $x = \sqrt{13}$

Seção 1.3

1) a) $\dfrac{x-1}{x-2}$ c) $\dfrac{3(2t+1)}{2t-1}$

b) $\dfrac{a-3b}{b^2}$ d) $-\dfrac{7}{(4x-1)^2}$

2) a) -8

b) $\dfrac{3}{2x-1}$

c) $\dfrac{3x}{2} - \dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{t+20}{3t+2}$

e) $\dfrac{x(13-2x)}{(2x-1)(2x+5)}$

f) $\dfrac{e^x}{x+1}$

g) $-\dfrac{x+27}{x^3-3x^2-9x+27}$

h) $\dfrac{-x^2+x+3}{x^2-1}$

i) $\dfrac{x+1}{x-1}$

j) $\dfrac{7+6x^2}{\sqrt{2x^2+7}}$

k) $\dfrac{(1+2x)^2\left(1+16x+16x^2\right)}{2\sqrt{x(x+1)}}$

l) $\dfrac{x-1}{x^2\sqrt{x+1}}$

m) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

n) $\dfrac{x-1}{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}$

7) a) 4   b) $\pi - 6$ c) $8-3\sqrt{3}$

8) a) $27/8$ b) 25   c) $1/4$ d) $3\sqrt[3]{3}$

9) a) $4\left(x^2+y\right)^2$ c) $\dfrac{2x}{3z}$

b) $\dfrac{a^{15}}{B^5b^6}$ d) $6xy^7$

10) a) $2\pi r^2\left(-\pi r+50\right)$ c) $6t\left(2t^2-t-3\right)$

b) $2vw\left(u^2+v^2+11w^2\right)$

11) a) $\dfrac{15x^2+24x+2}{4\left(x+2\right)\left(3x^2+2\right)}$ b) $\dfrac{78x^2-8x-27}{3\left(3x-1\right)\left(2x^2-1\right)}$

c) $\dfrac{2\left(x+2\right)}{\sqrt{x+1}}$

Seção 1.4

1) a) 9 f) 729 k) $\dfrac{2\sqrt[3]{-1}}{3}$

b) $\dfrac{1}{16}$ g) 7 l) 2

c) 1 h) $\dfrac{1}{5}$ m) 36

d) 49 i) 4

e) 4 j) 2

11) a) $\log x+4\log(x+1)$

b) $\dfrac{1}{2}\log(x+1)-\log\left(x^2+1\right)$

c) $x-\ln\left(1+e^x\right)$

d) $\ln x-x^2$

e) $\ln x+\ln(x+1)+\ln(x+2)$

f) $\dfrac{1}{2}\ln x-2\ln x-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$

g) $x\ln x$

12) a) $t=\dfrac{5}{2}\ln\left(8\right)$

b) $t=-\dfrac{1}{3}\ln(2{,}7)$

c) $t=-\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{6}{5}\right)$

d) $t=1$

e) $t=5\ln\left(\dfrac{3}{8}\right)$

f) $t=\dfrac{10}{3}\ln(3)$

g) $t=-2\ln\left(\dfrac{A}{B}\right)$

h) $t=2\ln\left(\dfrac{A-C}{CB}\right)$

Seção 1.5

2) a) $x_1=-4$ $x_2=3$

b) $x_1=-1$ $x_2={}^4\!/_3$

c) $x_1=2$

3) a) $x_1=-2$ $x_2={}^4\!/_3$

b) $x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{10}}{4}$

c) $x_{1,2}=3\pm\sqrt{3}$

d) $x_{1,2}=-2\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

4) $x_{1,2}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

5) a) $x\leq-5$ ou $x\geq2$

b) $-4<x<1/3$

c) $x\neq1/2$

d) Não há solução.

6) a) $q(x)=2x-3,\ r(x)=4x$

b) $q(x)=2x+2,\ r(x)=7$

c) $q(x)=x^3-2x^2+4x-6,\ r(x)=0$

d) $q(x)=2x+1,\ r(x)=5x-3$

e) $q(x)=2x^3+3x^2+2x+2/3,\ r(x)=4/3$

f) $q(x)=2x^2+4x+11,\ r(x)=34$

g) $q(x)=x-2,\ r(x)=2$

h) $q(x)=3,\ r(x)=-5$

i) $q(x)=x^3+x^2+x+1,\ r(x)=-1$

j) $q(x)=12x^2+6x+1,\ r(x)=0$

k) $q(x)=2x^2+x+3/2,\ r(x)=12$

l) $q(x)=x^2+x+8,\ r(x)=27$

m) $q(x)=2x^2-4x+8,\ r(x)=15-15x$

n) $q(x)=x^2-4x-2,\ r(x)=-18x-3$

o) $q(x)=x^2-4,\ r(x)=0$

p) $q(x)=3x^2+7,\ r(x)=10x$

q) $q(x)=3,\ r(x)=22x+6$

7) a) $p(x)=(x^2-2)(2x-3)+4x$

b) $p(x)=(3x-5)(2x+2)+7$

c) $p(x)=(x+2)(x^3-2x^2+4x-6)$

d) $p(x)=(2x^2+3)(2x+1)+5x-3$

e) $p(x)=(3x-2)(2x^3+3x^2+2x+2/3)+4/3$

f) $p(x)=(2x-4)(2x^2+4x+11)+34$

g) $p(x)=(x-3)(x-2)+2$

h) $p(x)=(x+4)3-5$

i) $p(x) = (x-1)(x^3+x^2+x+1)-1$

j) $p(x) = (2x-1)(12x^2+6x+1)$

k) $p(x) = (4x-8)(2x^2+x+3/2)+12$

l) $p(x) = (x-4)(x^2+x+8)+27$

m) $p(x) = (x^2-4)(2x^2-4x+8)-15x+15$

n) $p(x) = (x^2-2x-3)(x^2-4x-2)-18x-3$

o) $p(x) = (x^2-1)(x^2-4)$

p) $p(x) = (x^3-3x)(3x^2+7)+10x$

q) $p(x) = (2x^2-5x+1)3+22x+6$

8) a) $q(x) = x^3-2x^2+4x-6$, $r(x) = 0$

b) $q(x) = 3x+8$, $r(x) = 11$

c) $q(x) = 4x^3-6x^2+10x-8$, $r(x) = 0$

d) $q(x) = -2x^2-5x-8$, $r(x) = -7$

e) $q(x) = x^4+3x^3+2$, $r(x) = 6$

f) $q(x) = -6x^2+2x-1/3$, $r(x) = 17/9$

g) $q(x) = 2x^2-6x-3$, $r(x) = 1/2$

h) $q(x) = x-6$, $r(x) = 0$

i) $q(x) = -4x-5$, $r(x) = 6$

j) $q(x) = 6x-10$, $r(x) = -4$

k) $q(x) = x^2-6x-18$, $r(x) = -54$

l) $q(x) = 5x^3+10x^2+20x+40$, $r(x) = 79$

m) $q(x) = 8x^3+10x^2+8x+4$, $r(x) = 3$

n) $q(x) = x^3+5x^2+5x+25$, $r(x) = 75$

o) $q(x) = x^3+3x^2+9x+27$, $r(x) = 81$

p) $q(x) = 2x^4-2x^3+7x^2+2x+3$, $r(x) = 0$

9) a) $p(x)/d(x) = x^3-2x^2+4x-6$

b) $p(x)/d(x) = 3x+8+11/(x-2)$

c) $p(x)/d(x) = 4x^3-6x^2+10x-8$

d) $p(x)/d(x) = -2x^2-5x-8-7/(x-4)$

e) $p(x)/d(x) = x^4+3x^3+2+6/(x-3)$

f) $p(x)/d(x) = -6x^2+2x-1/3+17/(9x-3)$

g) $p(x)/d(x) = 2x^2-6x-3+1/(2x-3)$

h) $p(x)/d(x) = x-6$

i) $p(x)/d(x) = -4x-5+6/(x-4)$

j) $p(x)/d(x) = 6x-10-4/(x+12)$

k) $p(x)/d(x) = x^2-6x-18-54/(x-3)$

l) $p(x)/d(x) = 5x^3+10x^2+20x+40+79/(x-2)$

m) $p(x)/d(x) = 8x^3+10x^2+8x+4+3/(x-1/2)$

n) $p(x)/d(x) = x^3+5x^2+5x+25+75/(x-5)$

o) $p(x)/d(x) = x^3+3x^2+9x+27+81/(x-3)$

p) $p(x)/d(x) = 2x^4-2x^3+7x2+2x+3$

10) a) Nenhum valor é um zero da função.

b) Só -1/2 é um zero de f

c) -4 e 0 são zeros de f

d) Nenhum valor é um zero da função.

e) Só 3 é um zero de f

f) Só -1 é um zero de f

g) -4 e 3 são zeros de f

h) Nenhum valor é um zero da função.

i) Só 4/3 é um zero de f

j) Só 5 é um zero de f

11) a) $c = 8$ c) $c = 10$ e) $c = -15$

b) $c = 18$ d) $c = 7$ f) $c = 4$

12) a) Raízes: 0, 2 e -2,
$p(x) = x(x-2)(x+2)$

b) Raízes: 0, -3 e 7,
$p(x) = x(x+3)(x-7)$

c) Raízes: 0, 1/2 e -6,
$p(x) = 2x(x-1/2)(x+6)$

d) Raízes: 0, 3 e -1,
$p(x) = -3x(x-3)(x+1)$

e) Raízes: 5, -4 e 0 (mult. 2),
$p(x) = x^2(x-5)(x+4)$

f) Raízes: 4 (mult. 2) e 0 (mult. 2),
$p(x) = x^2(x-4)^2$

g) Raízes: 3/5, 1 e 0 (mult. 2),
$p(x) = 5x^2(x-3/5)(x-1)$

h) Raízes: 3/2, -1/4 e 0 (mult. 2),
$p(x) = 8x^2(x-3/2)(x+1/4)$

13) a) $p(x) = (x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$,
Raízes: -1, $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$

b) $p(x) = (x-1)(x-2)(x-8)$,
Raízes: 1, 2 e 8

c) $p(x) = (x+3)(x-1)(x-3)(x-8)$,
Raízes: -3, 1, 3 e 8

d) $p(x) = (x+3)(x-2)(x-4)$,
Raízes: -3, 2 e 4

e) $p(x) = (x+4)(x-3)(x-5)$,
Raízes: -4, 3 e 5

f) $p(x) = 4(x+1/4)x(x+1)(x-6)$,
Raízes: -1, 0, 1/4 e 6

g) $p(x) = 4(x-3/2)(x-1)$,
Raízes: 1 e 3/2

h) $p(x) = (x+5)(x2+2x+3)$,
Raiz: -5

i) $p(x) = 3(x-1/3)(x^2+x+6)$,
Raiz: 1/3

j) $p(x) = (x+4)(x^2+3x+8)$,
Raiz: -4

k) $p(x) = (x-3)(x^2+9)$,
Raiz: 3

l) $p(x) = (x-7)(2x^2+4x+15)$,
Raiz: 7

m) $p(x) = (x-2)^2(x^2+6x+15)$,
Raiz: 2 (multiplicidade 2)

n) $p(x) = x(x-6)(x^2+25)$,
Raízes: 0 e 6

o) $p(x) = 6(x+1/2)(x-1/3)(x^2+x+1)$,
Raízes: -1/2 e 1/3

14) a) $8x-2$
b) $-2y+2$
c) y^3-7y^2+5
d) $14x-2z$
e) $2ab+8a-5b$
f) $2a\left(7b-5\right)$
g) $\frac{3x}{2}-3$
h) 2
i) $\frac{x}{6}+2y+1$
j) $\frac{a\left(-b+5\right)}{6}$

15) a) $\frac{2x\left(-3x+1\right)}{15}$
b) $\frac{x\left(3x-8\right)}{8}$
c) $10x^2+14x-12$
d) $-3x^3+8x^2-18x+48$
e) x^2+5x-6
f) $-0{,}42x^2+2{,}92x-0{,}8$
g) $-x^2+\frac{5x}{6}-\frac{1}{6}$
h) $x^2-\frac{43x}{8}-\frac{15}{4}$
i) $-\frac{2x^2}{9}+x-\frac{9}{8}$
j) $144x^2-25$
k) $9x^2+24x+16$
l) $x^2-2\sqrt{3}x+3$

16) a) $3x+7+\frac{2}{x}$
b) $-3x^{\frac{5}{2}}-2\sqrt{x}+18x^2+12$
c) $x-81$
d) $-5\sqrt{x}+7-\frac{2}{\sqrt{x}}$
e) $-4+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$
f) $3x^2\left(x^3-2x^2-4x+5\right)$
g) $4x^3\left(-x^2-2x+1\right)$
h) $xy^2\left(3xy+2x+4y\right)$
i) $9x^4+27x^3+20x^2+6x+10$
j) $x\left(-3x^4-6x^3+7x^2+12x-2\right)$
k) $2x^4+\frac{11x^2}{2}-\frac{3}{2}$
l) $x^7-3x^5+x^4+2x^3-3x^2+2$
m) $2y^4-4y^3+6y^2-5y+4$
n) $2x^2-6xy+8x+4y^2-10y+6$
o) $-2x^3y+3x^3-x^2y-4xy^2+6xy-2y^2$
p) $8x^3-12x^2+6x-1$
q) $x^3-2x^2-9x+18$
r) $6w^3-11w^2-w+6$
s) $2x^6-3x^4-17x^2+30$
t) $6a^3+19a^2b+11ab^2-6b^3$
u) a^4-b^4

17) a) x^2+4x+4
b) $9x^2+48x+64$
c) $x^4-2\sqrt{5}x^2+5$
d) $4u^2+28uv+49v^2$
e) $y^2-8y+16$
f) $4y^2-12y+9$
g) x^2+4x+4
h) $\frac{x^2}{4}+2x+4$
i) $2\sqrt{2x}+2x+1$
j) $9-\frac{30}{x}+\frac{25}{x^2}$
k) $4x^2-4+\frac{1}{x^2}$
l) x^4-8x^2+16
m) $x^4-2x^3+x^2$
n) $4x^4-4x^2y+y^2$
o) $2x^{\frac{5}{2}}+x^4+x$
p) $x^4-10x^3+37x^2-60x+36$
q) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-2x+1}$
r) $8x^3+12x^2+6x+1$
s) $-y^3+9y^2-27y+27$
t) $-36x^{\frac{2}{3}}+54\sqrt[3]{x}+8x-27$

18) a) x^2-16
b) $25x^2-36$
c) $4x^2-49y^2$
d) $-x^2+4$
e) $\frac{9x^2}{4}-\frac{1}{9}$
f) $\frac{x^4-1}{x^2}$
g) y^4-16
h) z^2-3
i) $x-25$
j) $4x-5$

22) a) $(x-3)(x+3)$
b) $(4x-1)(4x+1)$
c) $-\frac{(x-6)(x+6)}{4}$
d) $(x-8y)(x+8y)$
e) $(2y-5)(2y+5)$
f) $4(3x-5)(3x+5)$
g) $-(7x-4)(7x+4)$
h) $(3u-v)(3u+v)$
i) $-\left(x^4-5\right)\left(x^4+5\right)$
j) $x^2(x-1)(x+1)$
k) $\frac{(9x-2)(9x+2)}{36}$
l) $(x-4)(x+4)$
m) $-\frac{(y-18)(y+18)}{9y^2}$
n) $(x-9)(x-5)$
o) $(x+5)^2$
p) $(2x-3)^2$
q) $3(x+2)^2$
r) $\frac{(2x-1)^2}{4}$
s) $(4x+5y)^2$
t) $(xy-1)^2$
u) $\left(x-\sqrt{3}\right)^2$
v) $\frac{(3x+2)^2}{36}$

23) a) $x_1={}^3/_4$ $x_2=6$
b) $x_1=9$
c) $x_1=2$ $x_2=5$
d) $x_1=-8$ $x_2=0$
e) $x_1=-{}^1/_2$ $x_2=4$
f) $x_1=-{}^7/_2$ $x_2=-{}^3/_5$
g) $x_1=6$ $x_2=12$
h) $x_1=\sqrt{2}$ $x_2=-\sqrt{2}$

24) a) $4x^2-27x+18=0$
b) $x^2-18x+81=0$
c) $-x^2+7x-10=0$
d) $4x^2+32x=0$
e) $8x^2-28x-16=0$
f) $10x^2+41x+21=0$
g) $-\frac{x^2}{16}+\frac{9x}{8}-\frac{9}{2}=0$
h) $x^2-2=0$

25) a) $x_1=\sqrt{10}$ $x_2=-\sqrt{10}$
b) $x_1=-5$ $x_2=5$
c) Não há soluções
d) $x_1=-4$ $x_2=4$
e) $x_1=-2$ $x_2=6$
f) $x_1=-2$ $x_2=3$
g) $x_1=-{}^{10}/_3$ $x_2=-{}^8/_3$
h) $x_1=-5$ $x_2=1$

26) a) $x_1=0$ $x_2=4$
b) $x_1=-{}^1/_5$ $x_2=0$
c) $x_1=-7$ $x_2=0$
d) $x_1=0$ $x_2={}^3/_2$
e) $x_1=-{}^1/_6$ $x_2=0$
f) $x_1=0$ $x_2={}^1/_2$
g) $x_1=0$ $x_2=\sqrt{2}$
h) $x_1=0$ $x_2=3$

27) a) $x_1=2$ $x_2=4$
b) $x_1=-3$ $x_2=5$
c) $x_1=-3$
d) $x_1=-6$ $x_2=-2$
e) $x_1=-5$ $x_2=1$
f) Não há soluções
g) $x_1=-{}^1/_2$ $x_2=4$
h) $x_1={}^1/_3$ $x_2={}^1/_2$
i) Não há soluções
j) $x_1={}^2/_5$
k) $x_1=\sqrt{5}$
l) $x_1=-2\sqrt{2}$ $x_2=3\sqrt{2}$
m) $x_1=-0{,}3$ $x_2=0{,}4$
n) Não há soluções
o) Não há soluções
p) $x_1=-16$ $x_2=-4$
q) $x_1=-{}^9/_4$ $x_2=0$
r) $x_1={}^7/_6$ $x_2=2$

28) a) $n=1$ $x_1=-3$
b) $n=0$
c) $n=2$ $x_1=\frac{-5\pm\sqrt{97}}{4}$
d) $n=0$
e) $n=1$ $x_1=8$
f) $n=2$ $x_1={}^1/_3$ $x_2=1$

33) a) $x_1=\sqrt{2}$ $x_2=-\sqrt{2}$ $x_3=-\frac{\sqrt{2}}{3}$ $x_4=\frac{\sqrt{2}}{3}$
b) $x_1=-1$ $x_2=1$
c) $x_1=-2$ $x_2=2$

d) Não há soluções

e) $x_1 = -3 \quad x_2 = -\frac{1}{2} \quad x_3 = \frac{1}{2} \quad x_4 = 3$

f) $x_1 = -5 \quad x_2 = 5$

35) a) 2

b) -2

c) $\frac{x}{4}$

d) $\frac{y-4}{2(y-3)}$

e) $\frac{2}{3}$

f) $-x(x-1)$

g) $\frac{x^2+1}{3x}$

h) $x - y$

i) xy

j) $\frac{x+3}{x}$

k) $\frac{2(x-5)}{x^2}$

l) $x - 1$

36) a) $2x + 1$

b) $\frac{x+4}{2}$

c) 14

d) $\frac{15x}{2}$

e) $\frac{u(u+3)}{v^2}$

f) $\frac{3w^3}{2y^2}$

g) $\frac{2(2x+5)}{5x}$

h) $-\frac{2(10x-3)}{15x}$

i) $\frac{15x+11}{7(5x-1)}$

j) $-\frac{2dx+x+1}{dx-1}$

k) $\frac{5x^2+8x-12}{(x-4)(x+1)}$

l) $-\frac{3x^2+7x-3}{(x-3)(x+3)}$

38) a) $x_1 = 2$

b) $x_1 = 8$

c) $x_1 = 1/2$

d) $x_1 = 4/5$

e) $x_1 = 2/3$

f) $x_1 = 8$

g) $x_1 = 0$

h) $x_1 = -5/2 \qquad x_2 = 5$

i) $x_1 = 2/5 \qquad x_2 = 1$

j) $x_1 = 1$

k) $x_1 = -8/3 \qquad x_2 = 8/3$

l) $x_1 = \sqrt{5} \qquad x_2 = -\sqrt{5}$

m) $x_1 = 0 \qquad x_2 = 3/4$

n) $x_1 = 5/3$

o) $x_1 = 1 \qquad x_2 = 9/2$

p) $x_1 = -3$

q) $x_1 = 8/5$

r) $x_1 = -1/3 \qquad x_2 = 2$

s) $x_1 = 3 \qquad x_2 = 16/3$

t) $x_1 = 7/2 \qquad x_2 = 9$

u) $x_1 = 10$

v) $x_1 = -1/12 \qquad x_2 = 2$

w) $x_1 = -1/2$

x) $x_1 = -9/4 \qquad x_2 = 1$

y) Não há soluções

z) $x_1 = 3/2$

39) a) $x_1 = 14$

b) $x_1 = 20$

c) $x_1 = 5/4$

d) $x_1 = 4$

e) $x_1 = 7$

f) $x_1 = 11/9$

g) $x_1 = 1/3$

h) $x_1 = 2/5$

i) $x_1 = 0$

j) $x_1 = 8$

k) $x_1 = -3/2$

l) $x_1 = -11/9 \qquad x_2 = -1$

m) $x_1 = 2$

n) $x_1 = 6$

o) $x_1 = 3$

p) $x_1 = -5/2$

q) $x_1 = -4/3 \qquad x_2 = 4/3$

r) $x_1 = 11/5$

s) $x_1 = 1/2$

t) $x_1 = -3/4$

u) $x_1 = 25$

v) Não há soluções

w) Não há soluções

x) $x_1 = 1 \qquad x_2 = 20736$

y) $x_1 = 1$

z) $x_1 = 64$

40) a) $9x^2 + 3x + 1$

b) $x^2 + 2xy + 2y + 4$

c) $-x - 1$

d) $\dfrac{2}{3} + e - \dfrac{1}{e}$

e) $\dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{2} - 20$

f) $\dfrac{\sqrt{x}}{2} - \dfrac{11\sqrt{y}}{4} + 8 + 6\sqrt{2}$

g) $\dfrac{56x^2}{9} - \dfrac{20x}{3} + 2$

h) $x^2 + 6x - 16$

i) $9a^2 - 24ab + 16b^2$

j) $x^2 + 4xy + 4y^2$

k) $4x^2 - y^2$

l) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

m) $4t^{\frac{3}{2}} + 2t$

41) a) $2x^3\left(2x^2 - 6x - 3\right)$

b) $-2x^2y^2\left(x^3 - 3xz^2 - 2z\right)$

c) $\sqrt[3]{x}\left(3\sqrt[3]{x} - 2\right)$

d) $-e^{-x}(x-1)$

e) $2ye^{xy^2}\left(xy^2 + 1\right)$

f) $\dfrac{-3 + \frac{4}{x}}{2x^{\frac{3}{2}}}$

g) $\dfrac{\sqrt{u}\,(u-3)}{3}$

42) a) $(2a+b)(3c-2d)$

b) $(2a-b)(2a+b)$

c) $3(2x-y)(2x+y)$

d) $-2(2x-1)(3x+5)$

e) $3(x-4)(x+2)$

f) $2(2x+3)(3x-5)$

g) $(x+y-1)(x+y+1)$

h) $2(a-b)(4a+3b)$

i) $\left(x^2+5\right)\left(x^4 - 5x^2 + 25\right)$

43) a) $x(x-y)(x+y)$

b) $-kr(-2R+3r)$

c) $32(x-1)(x+1)^3(3x-1)$

d) $2x\left(3x^2+1\right)^4\left(18x^2+1\right)$

e) $32(x-1)(x+1)^3(3x-1)$

f) $2x\left(x^2+2\right)^2\left(5x^4+20x^2+17\right)$

g) $-2\left(x^5 + 12x^4 - 8x^3 + 16x + 64\right)$

Capítulo 2

Seção 2.2

1) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

3) a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6) a) $A + B = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$

b) $A - B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

c) $2A + 3B = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 23 & 16 \end{bmatrix}$

d) $AB = \begin{bmatrix} 30 & 19 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$

e) $BA = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 41 & 38 \end{bmatrix}$

f) $A^t = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

g) $A^t + B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 11 & 6 \end{bmatrix}$

7) a) $A + B + C = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 8 \\ 12 & 23 & 30 \end{bmatrix}$

b) $A - B + C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 \\ -4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

c) $A - B - C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 \\ -6 & -5 & -8 \end{bmatrix}$

d) $-A + B - C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & -3 & -6 \end{bmatrix}$

e) AB Não pode ser calculada

f) BC Não pode ser calculada

g) $AB^t = \begin{bmatrix} 64 & 142 \\ 108 & 246 \end{bmatrix}$

h) $CB^t = \begin{bmatrix} -34 & -70 \\ 60 & 132 \end{bmatrix}$

i) $A^tB = \begin{bmatrix} 26 & 34 & 42 \\ 82 & 110 & 138 \\ 102 & 138 & 174 \end{bmatrix}$

j) A^tB^t Não pode ser calculada

8) a) $\begin{bmatrix} 50 \\ 122 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 5 & 14 \\ -14 & 13 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 30 & 13 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 16 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

9) a) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

10) a) $AB = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{bmatrix}$

b) $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $B^2 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

11)

$ABC = \begin{bmatrix} 32 & 4 \\ 43 & 2 \end{bmatrix}$

12) a) $C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -4 \end{bmatrix}$

b) $D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -8 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

c) $E = \begin{bmatrix} -4 & 7 & 9 \\ 6 & 17 & -12 \end{bmatrix}$

d) $F = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

e) $G = \begin{bmatrix} -15 & 18 \\ -2 & 12 \end{bmatrix}$

f) $H = \begin{bmatrix} -2 & 10 & -7 \\ -4 & 14 & -6 \\ 6 & -3 & -15 \end{bmatrix}$

13) a) $C = \begin{bmatrix} -17 & 19 & 0 \\ -6 & 15 & 0 \end{bmatrix}$

b) $D = \begin{bmatrix} -51 & 57 & 0 \\ -18 & 45 & 0 \end{bmatrix}$

c) $E = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ -10 & -7 & 0 \end{bmatrix}$

d) $F = \begin{bmatrix} -8 & 7 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 20 & -31 & 0 \end{bmatrix}$

e) $G = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -14 \\ 3 & 9 & -12 \\ -14 & -12 & 41 \end{bmatrix}$

f) $H = \begin{bmatrix} 10 & 14 & -3 \\ 14 & 20 & -6 \\ -3 & -6 & 9 \end{bmatrix}$

g) $J = \begin{bmatrix} 14 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix}$

14) a) $AB - BA = \begin{bmatrix} -24 & -20 \\ 58 & 24 \end{bmatrix}$

b) $2C - D$ Não pode ser calculada

c) $(2D^t - 3E^t)^t = \begin{bmatrix} -30 & -19 & 27 \\ 5 & 2 & 20 \\ 6 & 0 & 15 \end{bmatrix}$

d) $D^2 - DE = \begin{bmatrix} 80 & 34 & -22 \\ -10 & -4 & 45 \\ 72 & 30 & -12 \end{bmatrix}$

15) a) $(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

b) $(A+B)(A-B) = \begin{bmatrix} 0 & 19 \\ 5 & 85 \end{bmatrix}$

c) $A^2 - 2I_2A + I_2^2 = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}$

d) $A^3 - I_2^3 = \begin{bmatrix} 54 & 189 \\ 42 & 54 \end{bmatrix}$

31) a) $X = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

b) $Y = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 6 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

Seção 2.3

1) a) -10

b) -12

c) 1

d) $\log \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{b}}$

e) $-m^2$

2) a) 1 c) 20 e) $b\,(a-c)\,(a+c)$

b) -9 d) 121 f) $4m+8n-26$

3) a) -208 c) 48 e) $x^2y^2z^2$

b) a^2+b^2 d) $abcd$

4) $a^2\,(1-a)$

5) $A = 12$

6) a) $x_1 = -1/2$ $x_2 = 2$

b) $x_1 = -1$ $x_2 = 1/2$

7) a) $x_1 = 1/2$

b) $x_1 = 0$ $x_2 = 1$

c) $x_1 = -2$ $x_2 = 0$

d) $x_1 = -\sqrt{3}/3$ $x_2 = \sqrt{3}/3$

8) $a \neq 0$

9) $x \neq 0$ e $x \neq 3/2$

10) e^{2rt}

11) a) 9 b) -27 c) $(-3)^t$

19) $x = 1$

21) $x_1 = -1$ $x_2 = 1$

Seção 2.5

23) $x = 1$ $y = 2$

24) $x = 1$ $y = 2$ $z = -3$

25) $w = -1$ $x = 0$ $y = 1$ $z = 2$

26) $x = -11$ $y = -6$ $z = -3$

27) $x = 2$ $y = 7/4$ $z = 13/6$

28) $A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

29) Sistema possui infinitas soluções.

30) Sistema não possui solução.

31) $x = 0{,}1$ $y = 1$ $z = 3{,}3$

32) $x = -7$ $y = 79$ $z = 50$

33) $x = 7/3$ $y = 4/3$ $z = -1/3$

34) $x = -1/4$ $y = 7/4$ $z = -19/4$

35) Sistema possui infinitas soluções

36) Sistema não possui solução

37) Sistema possui infinitas soluções

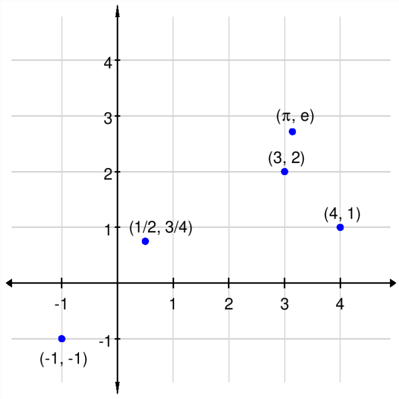
38) $x = -1/5$ $y = 1$ $z = -1/5$ $t = 2/5$

39) Sistema não possui solução

Capítulo 3

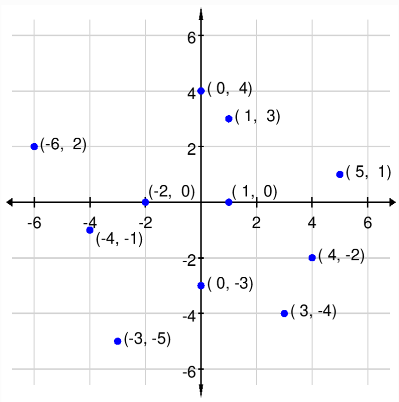
Seção 3.1

1)

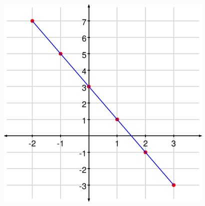


2) a) $A = (1{,}8)$
b) $B = (-8{,}8)$
c) $C = (-5{,}6)$
d) $D = (-8{,}3)$
e) $E = (-6, -2)$
f) $F = (2, -3)$
g) $G = (6, -5)$
h) $H = (7{,}4)$
i) $I = (5, -2)$
j) $J = (4{,}2)$
k) $K = (7{,}7)$
l) $L = (-3, -4)$
m) $M = (-7, -6)$
n) $N = (7, -2)$
o) $P = (7{,}0)$
p) $Q = (-1{,}0)$
q) $R = (0{,}3)$
r) $S = (0, -8)$

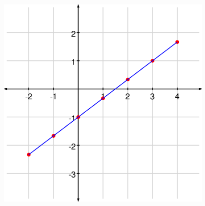
3)



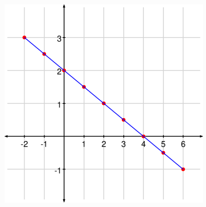
9) a)



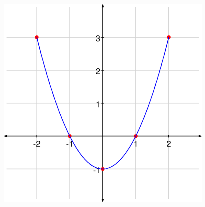
b)



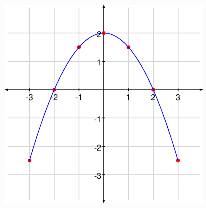
c)



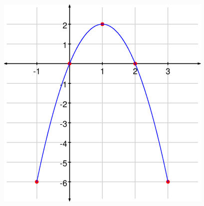
d)



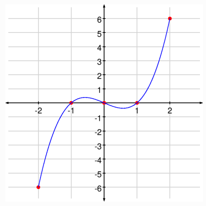
e)



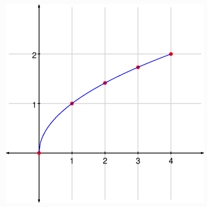
f)



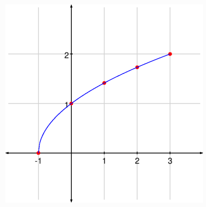
g)



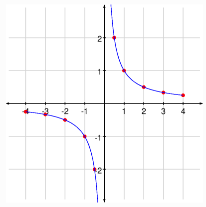
h)



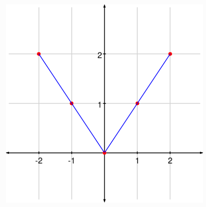
i)



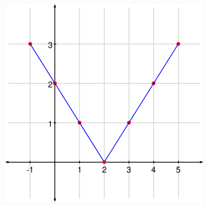
j)

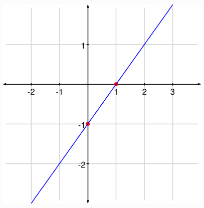
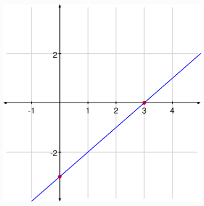
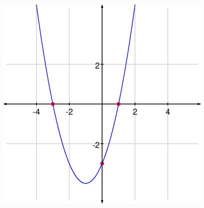
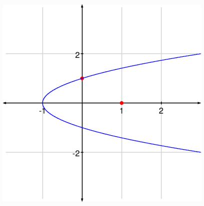
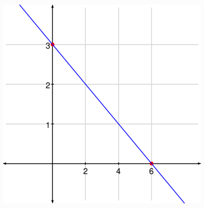
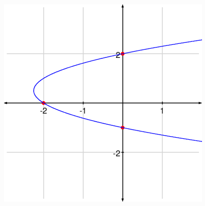
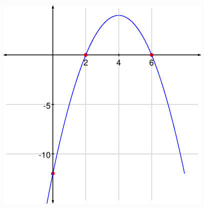
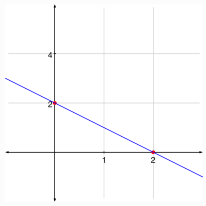


k)

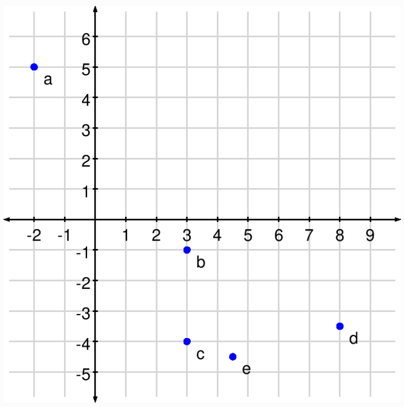


l)



10) a)

e)

b)

f)

c)

g)

d)

h)


11)



Seção 3.2

1) a) $2\sqrt{2}$ d) $5\sqrt{10}$ g) $5\sqrt{2}$
b) $3\sqrt{5}$ e) $3\sqrt{10}$ h) $7\sqrt{5}$
c) 8 f) $2\sqrt{26}$

2) a) $\sqrt{17}$ d) $\sqrt{101}$ g) $\sqrt{2}$
b) $2\sqrt{5}$ e) $2\sqrt{13}$ h) $\sqrt{29}$
c) $\sqrt{29}$ f) 5

3) a) 5 d) $5\sqrt{5}$ f) $\sqrt{13}$
b) $\sqrt{26}$ e) $\sqrt{58}$ g) $3\sqrt{5}$
c) 5

4) a) 5 b) $\sqrt{61}$

12)
$14x - 8y + 33 = 0$

Seção 3.3

1) $(x-3)^2 + (x-6)^2 = 16$

5) a) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$
b) $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 9$
c) $x^2 + y^2 = 25$
d) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 34$
e) $(x+a)^2 + (y-a)^2 = 4a^2$

8) $(x-3)^2 + (y-8)^2 = 49$

9) $b = -1$ ou $b = 7$

10)
$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$

11) a) $x^2 + y^2 = 9$
b) $(x-2)^2 + y^2 = 16$
c) $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 25$
d) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 1$
e) $x^2 + (y+3)^2 = 4$
f) $(x - {}^1\!/_2)^2 + (y - {}^3\!/_2)^2 = 16$

13) a) $C(2, -1)$ $r = 6$
b) $C(-2, 0)$ $r = 3$
c) $C(0, 0)$ $r = 4$
d) $C(-4, -3)$ $r = 5$
e) $C(3, -2)$ $r = 5$

Seção 3.4

5) a) $m = -1$
b) $m = 2$
c) $m = 0$
d) $m = -3$
e) $m = \frac{1}{3}$
f) $m = -\frac{1}{5}$
g) $m = 7$
h) $m = -\frac{1}{2}$

6) a) $y = {}^{4x}/_{5} - 1$
b) $y = {}^{-3x}/_{4} + 2$
c) $y = -3x + 4$
d) $y = {}^{x}/_{3} - 3$
e) $y = 2x + {}^{1}/_{2}$
f) $y = -x$

7) a) $y = 3x - 7$
b) $y = -3x + 8$
c) $y = {}^{x}/_{3} + {}^{5}/_{3}$
d) $y = -{}^{x}/_{3} - 2$
e) $y = -2x$
f) $y = {}^{3x}/_{2} + {}^{5}/_{2}$

9) a) $y + 2 = 0$
b) $2y - x = 0$
c) $6y + 9x + 20 = 0$

Seção 3.7

11) $3 + \sqrt{2} + \sqrt{5}$

Capítulo 4

Seção 4.1

1) a) $f(3) = 21$
b) $f(-3) = -9$
c) $f(a) = 5a + 6$
d) $f(-a) = 6 - 5a$
e) $f(a+3) = 5a + 21$

2) a) $g(0) = -3$
b) $g(-1) = 6$
c) $g(a) = 3a^2 - 6a - 3$
d) $g(-a) = 3a^2 + 6a - 3$
e) $g(a+1) = 3a^2 - 6$

3) a) $h(-5) = -154$
b) $h(0) = 1$
c) $h(a) = a^3 - a^2 + a + 1$
d) $h(-a) = -a^3 - a^2 - a + 1$

4) a) $s(4) = {}^{8}/_{15}$
b) $s(0) = 0$
c) $s(a) = \dfrac{2a}{a^2 - 1}$
d) $s(2+a) = \dfrac{2a+4}{a^2 + 4a + 3}$
e) $s(t+1) = \dfrac{2(t+1)}{t(t+2)}$

5) a) $f(-4) = 8$
b) $f(1) = 6$
c) $f({}^{11}/_{4}) = 5$
d) $f(x+5) = 2\left(\sqrt{-x} + 1\right)$

6) a) $f(-2) = 5$
b) $f(0) = 1$
c) $f(1) = 1$

7) a) $f(-1) = {}^{5}/_{2}$
b) $f(0) = 0$
c) $f(1) = 3$
d) $f(2) = 9$

8) a) sim b) sim c) sim

9) a) $\mathbb{R}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 0\}$
c) $\mathbb{R}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq 5\}$
e) $\mathbb{R}$
f) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq -1 \text{ e } x \neq 1\}$
g) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq -2 \text{ e } x \neq 1\}$
h) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x > -3\}$
i) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq 1 \text{ e } x \neq -2\}$
j) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq 1 \text{ e } x \neq 3\}$

10) a) $f(1) = 3$
b) $f(0) = 1$
c) $f(-1) = 3$
d) $f(\sqrt{2}) = 5$
e) $f(-\sqrt{2}) = 5$
f) $f(u+v) = 2u^2 + 4uv + 2v^2 + 1$

11) a) 2; 0; -2; -4; -2-a; -2+a

b) 48; 27; 12; 3; 0

c) -1; $-\frac{1}{3}$; -2; $\frac{1+a}{a-1}$; $\frac{1}{a-2}$

d) 1; $-{}^{7}2$; $x-\frac{2}{x}$; $-2x+\frac{1}{x}$; $2z-\frac{1}{z}$

e) 1; $\frac{1}{9}$; 25; $\frac{1}{4x^2}$; x^4

f) 5; 7; $\frac{15}{2}$; $5+\sqrt{x}$

g) 1; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{1+3\sqrt{x}}$; $\frac{1}{1+\sqrt{x-1}}$

h) -5; $\frac{1}{3}$; 0; $\frac{|2-x|}{2+x}$; $\frac{|x|}{4-x}$

12) a) sim
b) sim
c) não
d) sim
e) sim
f) não
g) sim
h) sim
i) sim
j) não

13) a) $\mathbb{R}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 2\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq -5/2\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq -9\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq 5/2\}$

f) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq 3/4\}$

g) $\mathbb{R}$

h) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 13/5\}$

i) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq -3/2\}$

j) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq 1/2\}$

k) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq 3 \text{ e } x \neq -1\}$

l) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq 1/5\}$

m) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq 0 \text{ e } x \neq 9\}$

n) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq 7/2\}$

o) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq -6 \text{ e } x \neq 6\}$

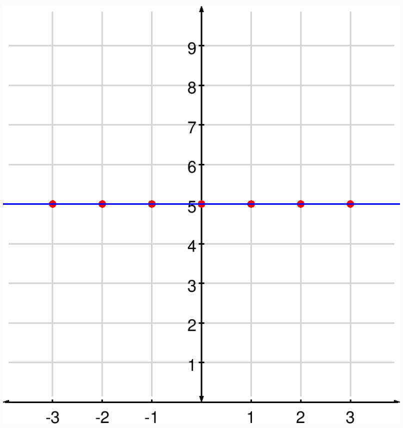
p) $\mathbb{R}$

q) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ -4 \leq x \leq 4\}$

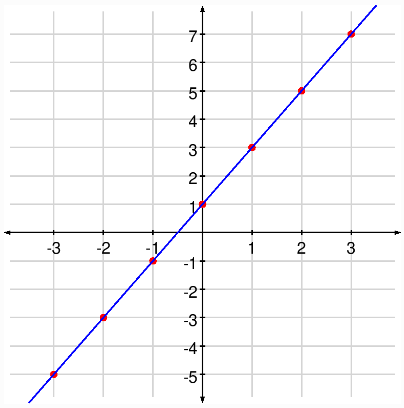
r) $\{x \in \mathbb{R} \ / \ 1 \leq x \leq 5\}$

14) a) não
b) não
c) sim
d) sim

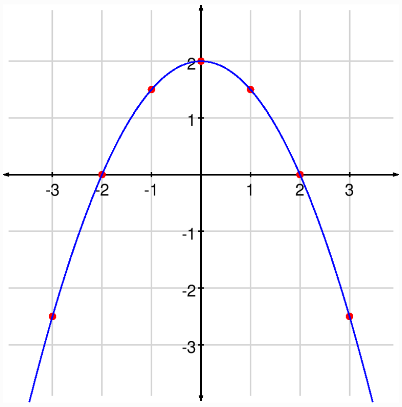
15) a)



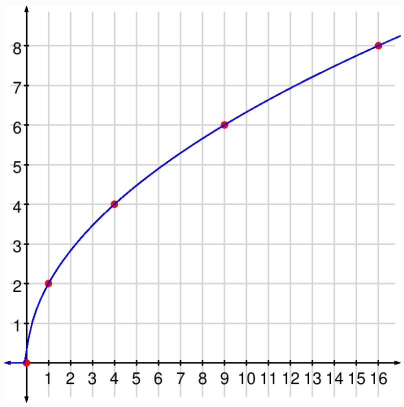
b)



c)



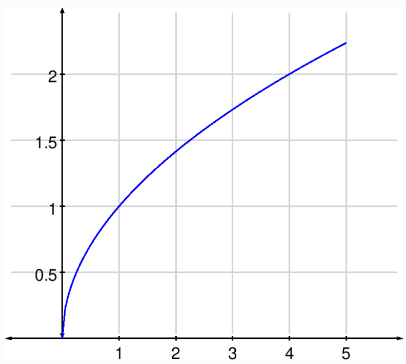
d)



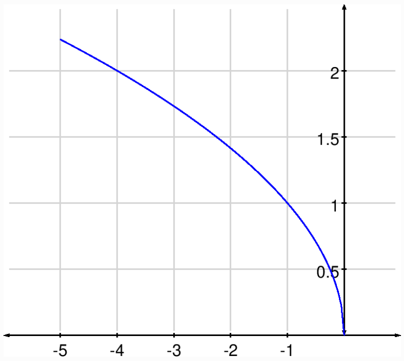
16) a) 3 b) $x+4$

17) a) 2 b) $h-1$

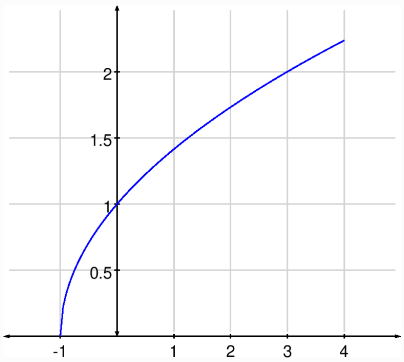
19) a) $D_f = [0,\infty)$ $I_f = [0,\infty)$



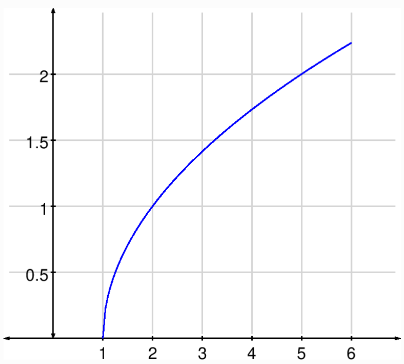
b) $D_f = (-\infty,0]$ $\quad I_f = [0,\infty)$



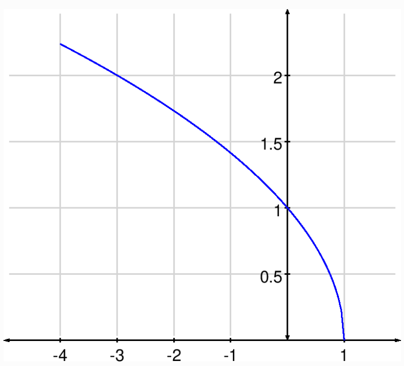
c) $D_f = [-1,\infty)$ $\quad I_f = [0,\infty)$



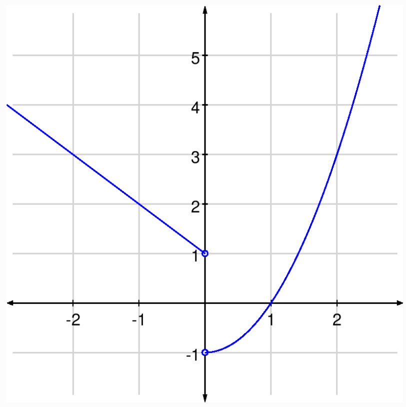
d) $D_f = [1,\infty)$ $\quad I_f = [0,\infty)$



e) $D_f = (-\infty,1]$ $\quad I_f = [0,\infty)$



f) $D_f = (-\infty,0) \cup (0,\infty)$ $\quad I_f = (-1,\infty)$



20) a) Intercepto-y: $y = 3$. Intercepto-x: $x = 3/2$.

b) Intercepto-y: $y = 3$. Interceptos-x: $x = -\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3}$.

Seção 4.2

1) a) $f(-2) = 6$ $\qquad f(0) = 2$ $\qquad f(4) = 1{,}5$

b) Intervalo $[0,\infty]$

c) $x = 0$ e $x = 5$

d) Intervalo $(0{,}5; 3)$

e) Não possui máximo; mínimo em $x = 1$

f) f cresce em $[1,\infty]$ e decresce em $[-\infty,1]$

19) a) par

b) ímpar

c) nada

d) par

e) nada

f) ímpar

g) ímpar

h) par

i) par

j) ímpar

k) nada

l) par

Seção 4.3

14) a) $f(-2) = 1$; $f(-1) = 2$; $f(0) = 2$; $f(0{,}5) = 0{,}5$; $f(1) = -1$; $f(2) = -4$

b) $f(-2) = -2$; $f(-1) = -1$; $f(0) = 0$; $f(0{,}5) = 0{,}5$; $f(1) = 1$; $f(2) = 4$

Seção 4.4

11) a) A curva não corresponde ao gráfico de uma função polinomial, pois não é suave.

b) A curva não corresponde ao gráfico de uma função polinomial, pois não é contínua.

c) A curva pode corresponder ao gráfico de uma função polinomial.

d) A curva não corresponde ao gráfico de uma função polinomial, pois não é contínua.

12) a) 4 b) 2 c) 1 d) 3

13) a) Cresce quando $x \to -\infty$
Decresce quando $x \to \infty$

b) Decresce quando $x \to -\infty$
Cresce quando $x \to \infty$

c) Decresce quando $x \to -\infty$ e $x \to \infty$

d) Cresce quando $x \to -\infty$ e $x \to \infty$

e) Decresce quando $x \to -\infty$
Cresce quando $x \to \infty$

f) Cresce quando $x \to -\infty$
Decresce quando $x \to \infty$

g) Decresce quando $x \to -\infty$ e $x \to \infty$

h) Cresce quando $x \to -\infty$ e $x \to \infty$

14) a) $x = -3$, $x = 3$, $x = -2$ e $x = 2$
$p(x) = (x+3)(x-3)(x+2)(x-2)$

b) $x = -2/1$, $x = 2/1$, $x = -4$ e $x = 4$
$p(x) = 4(x+1/2)(x-2/1)(x+4)(x-4)$

c) $x = -3/1$, $x = 3/1$, $x = -1$ e $x = 1$
$p(x) = 9(x+1/3)(x-3/1)(x+1)(x-1)$

d) $x = -5$ e $x = 5$
$p(x) = (x+5)(x-5)(x^2+1)$

e) $x = -4$ e $x = 4$
$p(x) = (x+4)(x-4)(2x^2+5)$

f) $x = -6$ e $x = 6$
$p(x) = (x+6)(x-6)(x^2+4)$

17) a) $x \leq -2$ ou $1 \leq x \leq 4$

b) $-1 \leq x \leq 0$ ou $x \geq 2$

c) $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$ ou $x \geq 2$

d) $x \leq -3$ ou $0 \leq x \leq 3$

Capítulo 5

Seção 5.4

1) a) $\lim_{x\to 2} 3 = 3$

b) $\lim_{x\to 2} -3 = -3$

c) $\lim_{x\to 3} x = 3$

d) $\lim_{x\to 1} -2x^2+1 = -1$

e) $\lim_{x\to 1} 2x^3 - 3x^2 + x + 2 = 2$

f) $\lim_{s\to 0} (2s+4)\left(2s^2-1\right) = -4$

g) $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x+1}{x+2} = \dfrac{5}{4}$

h) $\lim_{x\to 2} \sqrt{x+2} = 2$

i) $\lim_{x\to -2} \sqrt[3]{5x+2} = 2\sqrt[3]{-1}$

j) $\lim_{x\to -3} \sqrt{2x^4+x^2} = 3\sqrt{19}$

k) $\lim_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+8}}{2x+4} = \dfrac{3}{2}$

l) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x\sqrt{x^2+7}}{2x-\sqrt{2x+3}} = 4$

3) a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ não existe

b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$

c) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x+2} = -4$

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x^2-3x}{x} = -3$

e) $\lim_{x\to -5} \dfrac{x^2-25}{x+5} = -10$

f) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x}{x-1}$ não existe

g) $\lim_{s\to 2} \dfrac{z^3-8}{z-2} = \dfrac{z^3-8}{z-2}$

h) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^3+x^2-2x} = \dfrac{1}{3}$

4) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \dfrac{1}{2}$

5) a) $\lim_{x\to 0} -5x^2 - 7x + 3 = 3$

b) $\lim_{x\to 3} 3x^2 - 7x + 2 = 8$

c) $\lim_{x\to -1} -x^5 + 6x^4 + 2 = 9$

d) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} 2x + 7 = 8$

e) $\lim_{x\to 1} \dfrac{(x+4)^3}{x+2} = \dfrac{125}{3}$

f) $\lim_{x\to 0} (x+4)(x-2)^4 = 64$

g) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x+4}{3x-1} = \dfrac{6}{5}$

h) $\lim_{t\to 2} \dfrac{t+3}{t+2} = \dfrac{5}{4}$

i) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$

j) $\lim_{t\to 2} \dfrac{t^2+5t+6}{t+2} = 5$

6) a) $\lim_{t\to 2} \dfrac{t^2-5t+6}{t-2} = -1$

b) $\lim_{s\to \frac{1}{2}} \dfrac{s+4}{2s} = \dfrac{9}{2}$

c) $\lim_{x\to 4} \sqrt[3]{2x+3} = \sqrt[3]{11}$

d) $\lim_{x\to 7} (3x+2)^{\frac{2}{3}} = 23^{\frac{2}{3}}$

e) $\lim_{x\to \sqrt{2}} \dfrac{2x^2-x}{3x} = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

f) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}x-\sqrt{2}}{3x-4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

g) $\lim_{x\to 4} 4x + e^x = 16 + e^4$

h) $\lim_{x\to -\frac{1}{3}} (2x+3)^{\frac{1}{4}} = \dfrac{3^{\frac{3}{4}}\sqrt[4]{7}}{3}$

7) a) $\lim_{x\to -3^+} \dfrac{x+2}{x+3} = -\infty$

b) $\lim_{x\to -3^-} \dfrac{x+2}{x+3} = \infty$

c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{-x+2}{(x-1)^2} = \infty$

d) $\lim_{x\to 5^-} \dfrac{e^x}{(x-5)^3} = -\infty$

e) $\lim_{x\to 3^+} \ln\left(x^2-9\right) = -\infty$

f) $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4} = -\infty$

g) $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-2x-8}{x^2-5x+6} = \infty$

8) a) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{h+4}-4}{h}$ não existe

b) $\lim_{h\to 0} \dfrac{-x^2+(h+x)^2}{h} = 2x$

c) $\lim_{x\to 5} \dfrac{x^2-5x+6}{x-5}$ não existe

d) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-4x}{x^2-4} = 2$

e) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^4-x^2+1}{x^3-1}$ não existe

f) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{h+4}-2}{h} = \dfrac{1}{4}$

g) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-4x}{x^2-4} = 2$

h) $\lim_{h\to 0} \dfrac{-2x^2+(2h+2x)^2}{h}$ não existe

i) $\lim_{t\to 0} \dfrac{-\sqrt{-t+1}+\sqrt{t+1}}{t} = 1$

j) $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{2x^2+7x+3} = \dfrac{6}{5}$

k) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x}{x-1}$ não existe

l) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x\sqrt{x^2+7}}{2x-\sqrt{2x+3}} = 4$

m) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^3+x^2-2x} = \dfrac{1}{3}$

n) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x} = \dfrac{1}{6}$

o) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\sqrt{x^2+7}}{2x-\sqrt{2x+4}} = 0$

p) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x-1} = 4$

Capítulo 6

Seção 6.1

17) a) $f'(a) = 6a - 4$

b) $f'(a) = 6a^2 + 1$

c) $f'(a) = \dfrac{5}{(a+3)^2}$

d) $f'(a) = -\dfrac{2}{a^3}$

e) $f'(a) = -\dfrac{1}{\sqrt{-2a+1}}$

f) $f'(a) = \dfrac{2}{(-a+1)^{\frac{3}{2}}}$

Seção 6.2

6) a) $f'(x) = \dfrac{1}{2}$

b) $f'(x) = m$

c) $f'(t) = -18t + 5$

d) $f'(x) = 3.0x - 1$

e) $f'(t) = -\dfrac{1}{2t^{\frac{3}{2}}}$

f) $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{-x+9}}$

g) $f'(x) = \dfrac{2\left(x^2 - 3x + 1\right)}{4x^2 - 12x + 9}$

h) $f'(t) = -\dfrac{7}{(t+3)^2}$

i) $f'(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$

j) $f'(x) = 4x^3$

27) a) $f'(x) = -8x$

b) $f'(x) = 4x - 1$

c) $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+2)^2}$

d) $f'(x) = -\dfrac{4}{(x+3)^2}$

e) $f'(x) = -\dfrac{1}{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{3(x+3)^{\frac{2}{3}}}$

Seção 6.5

3) a) $f'(x) = e^x + 1$

b) $f'(x) = -2x + 2e^x$

c) $f'(x) = x\left(2\ln(x) + 1\right)$

d) $f'(x) = \dfrac{2\left(-\ln(x) + 1\right)}{x^2}$

e) $f'(x) = \dfrac{3}{x-2}$

f) $f'(x) = \dfrac{\left(x\ln(x) + 1\right)e^x}{x}$

4) a) $f'(x) = \left(3x^2 + x\left(x^2+2\right) + 2\right)e^x$

b) $g'(x) = \dfrac{\left(x + {}^1\!/_2\right)e^x}{\sqrt{x}}$

c) $y'(x) = (-x+1)\,e^{-x}$

d) $y'(x) = \dfrac{1}{\left(e^{x/2} - e^{-x/2}\right)^2}$

e) $g'(x) = \dfrac{10}{(-4x+3)^2}$

f) $G'(x) = \dfrac{2\left(x^2 + x + 2\right)}{4x^2 + 4x + 1}$

g) $y'(x) = \dfrac{x^2\left(-x^2 + 3\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2}$

h) $y'(x) = \dfrac{x^3 + x - (x+1)\left(3x^2+1\right) - 2}{\left(x^3 + x - 2\right)^2}$

i) $y'(t) = -\dfrac{2t\left(t^4 + 4t^2 - 7\right)}{t^8 - 6t^6 + 11t^4 - 6t^2 + 1}$

5) a) $y'(t) = -\dfrac{t+1}{(t-1)^3}$

b) $y'(p) = \left(p^{\frac{3}{2}} + \dfrac{3\sqrt{p}}{2} + p + 1\right)e^p$

c) $y'(s) = -\dfrac{ke^s + 1}{(ke^s + s)^2}$

d) $y'(v) = 2v - \dfrac{1}{\sqrt{v}}$

e) $z'(w) = \dfrac{\sqrt{w}\left(2cwe^w + 3ce^w + 5w\right)}{2}$

f) $f'(t) = \dfrac{\sqrt{t} + 4}{4\sqrt{t} + t + 4}$

g) $g'(t) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{t}} - \dfrac{1}{6t^{\frac{5}{6}}}$

h) $f'(x) = -\dfrac{ACe^x}{(B + Ce^x)^2}$

i) $f'(x) = \dfrac{-(x+1)(x+e^x)e^x + (xe^x - 1)(e^x + 1)}{(x+e^x)^2}$

j) $f'(x) = \dfrac{2cx}{\left(c + x^2\right)^2}$

k) $f'(x) = \dfrac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2}$

6) a) $f'(x) = \dfrac{2(x-1)e^x}{x^2}$

b) $f'(w) = -e^{-w}$

c) $f'(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1}$

7) a) $H'(u) = 2u - 1$

b) $J'(v) = \dfrac{v^4 + v^2 + 6}{v^4}$

c) $F'(y) = 5 + \dfrac{14}{y^2} + \dfrac{9}{y^4}$

d) $f'(z) = -ze^z - 2e^{2z} + 1$

8) a) $f'(x) = 18x^2 + 6x + 12$

b) $f'(x) = 14x + 27$

c) $f'(x) = x^3\left(-24x^4 + 28\right)$

d) $f'(x) = 2x$

e) $f'(u) = 8au + 2a - 24u^2$

f) $f'(x) = -\dfrac{14}{(3x-1)^2}$

g) $f'(t) = \dfrac{2}{(t+1)^2}$

h) $f'(t) = \dfrac{3t^2 - 6t - 4}{t^2 - 2t + 1}$

i) $f'(t) = \dfrac{t^2 - 2t(t-2) - 2}{(t-2)^2}$

j) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x(x-4) - 5}{(x^2-5)^2}$

k) $f'(x) = -\dfrac{6}{(x-1)^2}$

l) $f'(t) = \dfrac{(a-t)\left((a-t)(-b+t) + 2(b-t)^2\right)}{(b-t)^3}$

m) $f'(x) = -\dfrac{12x + 25}{x^6}$

n) $f'(x) = \dfrac{2\left(x^{10} - 6\right)}{x^7}$

9) a) $f'(x) = -\dfrac{20}{(5x-3)^2}$

b) $f'(s) = 90s^5 - 25s^4 - 36s^3 + 9s^2 - 12s + 2$

c) $f'(x) = 6x + 3$

10) a)

$$p'(x) = 3x^2\ln(x) + x^2 + 6x\ln(x) + 3x - 2\ln(x) - 2 + \frac{3}{x}$$

b) $f'(x) = -\dfrac{x^4 + 4x^2 + 2x + 4}{(x^3 + 2x - 1)^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 8x + 4}{(x^2 + x - 1)^2}$

11) a)

$f'(x) = x^3(x+4)e^x$

$f''(x) = x^2(x+2)(x+6)e^x$

b)

$f'(x) = x^{\frac{3}{2}}\left(x + \dfrac{5}{2}\right)e^x$

$f''(x) = \sqrt{x}\left(x^2 + 5x + \dfrac{15}{4}\right)e^x$

c)

$f'(x) = \dfrac{2x(x+1)}{(2x+1)^2}$

$f''(x) = \dfrac{2}{(2x+1)^3}$

d)

$f'(x) = -\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2(x+1)^2}$

$f''(x) = \dfrac{2x\left(x^2+3\right)}{(x-1)^3(x+1)^3}$

Seção 6.6

1) a) $f'(x) = 0$

b) $f'(x) = 0$

c) $f'(x) = 5x^4$

d) $f'(x) = 2.1x^{1.1}$

e) $f'(x) = 6x$

f) $f'(x) = -6x^2$

g) $f'(r) = 2\pi r$

h) $f'(x) = \dfrac{3}{x^{\frac{2}{3}}}$

i) $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

j) $f'(u) = -\dfrac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$

k) $f'(x) = -\dfrac{84}{x^{13}}$

l) $f'(x) = -\dfrac{0.36}{x^{2.2}}$

m) $f'(x) = 10x - 3$

n) $f'(x) = x(-3x + 4)$

2) a) $f'(x) = -\dfrac{15x^{\frac{3}{2}}}{2} + 16x^3$

b) $f'(x) = -\dfrac{3x + 8}{x^3}$

c) $f'(x) = \dfrac{2x^9 + 1}{x^4}$

d) $f'(t) = \dfrac{-2t^3 + 9t - 16}{t^5}$

e) $f'(x) = 2 - \dfrac{5}{2\sqrt{x}}$

f) $f'(x) = 4x + \dfrac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$

g) $f'(x) = 0.006x - 0.4$

h) $f'(x) = 0.6x^2 - 1.0x + 0.1$

i) $f'(x) = 2x - 4 - \dfrac{3}{x^2}$

j) $f'(x) = 2x - 2 + \dfrac{1}{x^2}$

k) $y'(v) = ae^v - \dfrac{b}{v^2} - \dfrac{2c}{v^3}$

l) $u'(t) = \dfrac{10\sqrt{t^5}}{t} + \dfrac{1}{5t^{\frac{4}{5}}}$

m) $v'(x) = 1 - \dfrac{2}{3x^{\frac{5}{3}}} + \dfrac{1}{3x^{\frac{5}{6}}}$

n) $z'(y) = -\dfrac{10A}{y^{11}} + Be^y$

o) $y'(x) = e^{x+1}$

3) a) $f'(r) = 2\pi r$

b) $f'(x) = 6x + 6$

c) $f'(w) = 2aw$

d) $f'(x) = \dfrac{3}{2x^4}$

e) $f'(x) = 14ax + 7b$

4) a) $f'(x) = 40x^{39}$

b) $f'(x) = e^x$

c) $f'(x) = 0$

d) $f'(t) = -\dfrac{2}{5}$

e) $f'(x) = 6x^7$

f) $f'(x) = 3x^2 - 4$

g) $f'(t) = 10t\left(t^3 - 1\right)$

h) $g'(x) = 2x\,(-3x + 1)$

i) $h'(x) = 4x - 1$

j) $g'(t) = -\dfrac{3}{2t^{\frac{7}{4}}}$

k) $B'(y) = -\dfrac{6c}{y^7}$

l) $A'(s) = \dfrac{60}{s^6}$

m) $y'(x) = \dfrac{5x - 2}{3\sqrt[3]{x}}$

n) $R'(a) = 18a + 6$

o) $h'(t) = -4e^t + \dfrac{1}{4t^{\frac{3}{4}}}$

5) a) $S'(p) = -1 + \dfrac{1}{2\sqrt{p}}$

b) $y'(x) = \dfrac{3x - 1}{2\sqrt{x}}$

c) $S'(R) = 8\pi R$

d) $h'(u) = 3Au^2 + 2Bu + C$

e) $y'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{3}{2x^{\frac{5}{2}}}$

f) $y'(x) = \dfrac{3x^2 + 4x - 3}{2x^{\frac{3}{2}}}$

g) $g'(u) = \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{u}}$

h) $j'(x) = 2{,}4x^{1{,}4}$

i) $k'(r) = er^{e-1} + e^r$

j) $H'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^3}$

Seção 6.7

3) a) $f'(x) = \dfrac{5}{x}$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{x + 1}$

d) $f'(x) = \dfrac{10}{x}$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{2x}$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{2\left(\sqrt{x} + x\right)}$

g) $f'(x) = -\dfrac{1}{x}$

h) $f'(x) = \dfrac{2\,(4x - 3)}{4x^2 - 6x + 3}$

i) $f'(x) = \dfrac{1}{x\,(x + 1)}$

j) $f'(x) = -\dfrac{2}{x^2 - 1}$

k) $f'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}$

l) $f'(x) = \dfrac{3\ln(x)^2}{x}$

m) $f'(x) = \dfrac{3\sqrt{\ln(x)}}{x}$

n) $f'(x) = \dfrac{3x^2}{x^3 + 1}$

o) $f'(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

p) $f'(x) = \dfrac{((x + 3)\ln(x + 3) + 1)\,e^x}{2\,(x + 3)}$

q) $f'(x) = \dfrac{(2\,(x + 1)\ln(x + 1) + 1)\,e^{2x}}{x + 1}$

r) $f'(x) = \dfrac{\ln(x) - 1}{\ln x^2}$

4) a) $f'(x) = 3e^{3x}$

b) $g'(t) = -e^{-t}$

c) $f'(u) = (-u+1)\,e^{-u}$

d) $f'(x) = 3(e^{x} - e^{-x})$

e) $f'(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

f) $f'(t) = 12e^{3t+2}$

g) $h'(x) = -2xe^{-x^2}$

h) $f'(x) = \dfrac{3e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$

i) $f'(x) = -\dfrac{e^{\frac{1}{2x}}}{2x^2}$

j) $f'(x) = 25\,(e^{x}+1)^{24}\,e^{x}$

k) $f'(x) = 9\left(-4e^{3x}+1\right)^2 e^{-9x}$

l) $f'(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

m) $f'(t) = \dfrac{\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}$

n) $f'(s) = -2s^3e^{-s^2}$

o) $f'(x) = \dfrac{2e^{x}}{(e^{x}+1)^2}$

5) a) $g'(x) = \dfrac{(\sqrt{x}+x^2)^6\left(14x^{\frac{3}{2}}+\frac{7}{2}\right)}{\sqrt{x}}$

b) $f'(x) = (2x+1)\,e^{2x}$

c) $f'(x) = \dfrac{3}{2x}$

d) $g'(x) = \dfrac{\left(x^3+\ln(x)\right)^6\left(21x^3+7\right)}{x}$

e) $f'(x) = \left(2x^2+4x+1\right)e^{2x+1}$

f) $f'(x) = \dfrac{\ln(x)+2}{2x\ln(x)}$

6) a) $f'(x) = \dfrac{(x^8+3)^4\left(\frac{800x^8}{3}-480\right)}{x^{16}}$

b) $f'(x) = \dfrac{160(x^8+3)^4(5x^8-9)}{3x^{16}}$

c) $f'(x) = (3x-1)^2\,(5x-2)^5\,(135x-48)$

d) $f'(x) = 8\,(2x-5)^3 - \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

e) $f'(t) = \dfrac{-8t+5}{3\left(4t^2-5t+2\right)^{\frac{4}{3}}}$

f) $f'(x) = -\dfrac{21x^2}{10\,(3x+1)^{\frac{6}{5}}} + \dfrac{7x}{\sqrt[5]{3x+1}} + \dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

g) $f'(x) = 12\,(x+1)\,e^{3x^2+6x+7}$

h) $f'(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

i) $f'(x) = \dfrac{2^{\ln(2x)}\ln(2)}{x}$

j) $f'(t) = -\dfrac{\left(2t^2+e^{t^2}+1\right)e^{-t^2}}{t^2}$

k) $f'(t) = \dfrac{e^{t}}{\sqrt{e^{t}-1}\,(e^{t}+1)^{\frac{3}{2}}}$

l) $f'(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{2bx}{a}$

m) $f'(x) = \dfrac{7x}{7x^2-4}$

n) $f'(x) = -\dfrac{2}{x^2-1}$

o) $f'(t) = \dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\sqrt{t}}\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{2\sqrt{t}}$

p) $f'(x) = \left[4x^2e^{x^2} + \left(e^{x^2}+4\right)\ln\left(e^{x^2}+4\right)\right]\dfrac{\left(e^{x^2}+4\right)^{\sqrt{x}-1}}{2\sqrt{x}}$

7) a) $F'(x) = 10x\left(2x^2+3\right)\left(x^4+3x^2-2\right)^4$

b) $F'(x) = 200x^{99}\,(x-4)^{99}\,(x-2)$

c) $F'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{-2x+1}}$

d) $f'(z) = -\dfrac{2z}{(z^2+1)^2}$

e) $y'(x) = e^{-kx}$

f) $f'(x) = (2x-3)^3\left(x^2+x+1\right)^4 \left[8x^2+8x+5\,(2x-3)\,(2x+1)+8\right]$

g) $g'(x) = 6x\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+2\right)^5\left(3x^2+4\right)$

h) $h'(t) = \dfrac{2\left(2t^2-1\right)^2\left(2t^2+18t\,(t+1)-1\right)}{3\sqrt[3]{t+1}}$

i) $F'(t) = \dfrac{2\left(243t^4-54t^3-108t^2+54t-7\right)}{4t^2+4t+1}$

j) $y'(x) = -\dfrac{12x\left(x^2+1\right)^2}{\left(x^2-1\right)^4}$

k) $f'(s) = \dfrac{3s\sqrt{\dfrac{s^2+1}{s^2+4}}}{(s^2+1)\,(s^2+4)}$

l) $y'(x) = \dfrac{3e^{3x}}{\sqrt{2e^{3x}+1}}$

m) $y'(x) = -2xe^{-x^2+1}$

n) $y'(x) = \dfrac{5^{-\frac{1}{x}}\ln(5)}{x^2}$

o) $G'(y) = \dfrac{(y-1)^3\,(4y\,(y+2)+10\,(-y-1)\,(y-1))}{y^6\,(y+2)^6}$

p) $y'(r) = \dfrac{1}{(r^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

q) $y'(u) = \dfrac{4e^{2u}}{e^{4u}+2e^{2u}+1}$

r) $F'(v) = \dfrac{v^5\left(-12v^3+6\right)}{(v^3+1)^7}$

s) $y'(x) = (2x+1)\,e^{-\frac{1}{x}}$

t) $y'(x) = \dfrac{\left(-x+\frac{1}{2}\right)e^{-2x}}{\sqrt{xe^{-2x}+1}}$

u) $y'(x) = \dfrac{4\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}+x}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}+x}\sqrt{x+\sqrt{\sqrt{x}+x}}}$

v) $g'(x) = 2pr^2\left(n+2re^{rx}\right)^{p-1}e^{rx}$

w) $y'(x) = 2^{3^{x^2}}3^{x^2}x\ln\left(3^{\ln(4)}\right)$

Capítulo 7

Seção 7.5

1) a)

b) Mínimo relativo: $f(2) = -4$

c)

d) Mínimo relativo: $f(2) = 2$

e) Mínimo relativo: $f(0) = 2$

f) Máximo relativo: $g(0) = 4$; mínimo relativo: $g(2) = 0$

g) Mínimo relativo: $F(3) = -5$; máximo relativo: $F(-1) = {}^{17}/_{3}$

h) Mínimo relativo: $g(3) = -19$

i) Mínimo relativo: $f({}^{1}/_{2}) = {}^{63}/_{16}$

j)

k) Nenhum.

l)

m) Máximo relativo: $f(-3) = -4$; mínimo relativo: $f(3) = 8$

n) Máximo relativo: $f(1) = {}^{1}/_{2}$; mínimo relativo: $f(-1) = -{}^{1}/_{2}$

o) Máximo relativo: $f(0) = 0$

p)

q) Mínimo relativo: $f(1) = 0$

2) a) Falso. c) Falso. e) Falso.
b) d) f)

3) a)
$$f'(x) = \begin{cases} -3, & \text{se } x < 0 \\ 2, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

b) Não.

9) a) Valor mínimo absoluto: $-{}^{41}/_{8}$

b)

c) Nenhum extremo absoluto.

d) Valor máximo absoluto: 1

e) Valor máximo absoluto: 5
mínimo absoluto: -4

f) Valor máximo absoluto: 10
mínimo absoluto: 1

g) Valor máximo absoluto: 19
mínimo absoluto: -1

h)

i) Valor máximo absoluto: 16
mínimo absoluto: -1

j)

k) Valor máximo absoluto: 3
mínimo absoluto: ${}^{5}/_{3}$

l) Valor máximo absoluto: ${}^{37}/_{3}$
mínimo absoluto: 5

m)

n) Valor máximo absoluto: $\approx 1{,}04$
mínimo absoluto: $-1{,}5$

o)

p) Nenhum extremo absoluto.

q)

r) Valor máximo absoluto: 1
mínimo absoluto: 0

s)

t) Valor máximo absoluto: 0
mínimo absoluto: -3

u)

v) Valor máximo absoluto: $\sqrt{2}/4 \approx 0{,}35$
mínimo absoluto: $-{}^{1}/_{3}$

w) Valor máximo absoluto: $\sqrt{2}/2$
mínimo absoluto: $-\sqrt{2}/2$

x)

Seção 7.8

3) a) Gráfico de $f(x) = 2x - 1$

$f'(x) = 2$

$f''(x) = 0$

$f'(x)$ não possui zeros.

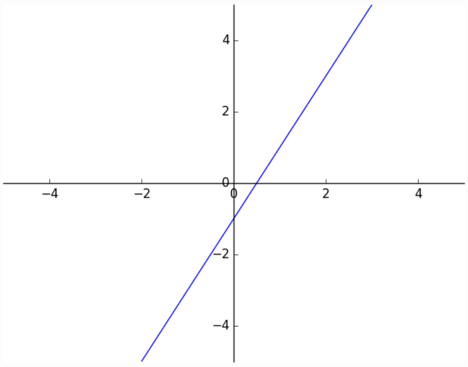
f cresce: $x \in \mathbb{R}$

f decresce: $x \in \emptyset$

$f''(x)$ não possui zeros.

f concav. para cima: $x \in \emptyset$

f concav. para baixo: $x \in \emptyset$



b) Gráfico de $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$

$f'(x) = 3x\,(-x + 2)$

$f''(x) = -6x + 6$

Zeros de $f'(x)$: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

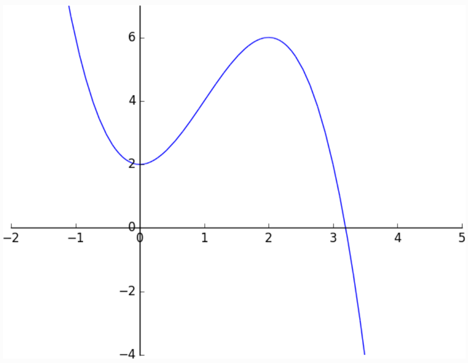
f cresce: $x \in (0, 2)$

f decresce: $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

Zeros de $f''(x)$: $x_1 = 1$

f concav. para cima: $x \in (-\infty, 1)$

f concav. para baixo: $x \in (1, \infty)$



c) Gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2}$

$f'(x) = -\dfrac{x + 2}{x^3}$

$f''(x) = \dfrac{2\,(x + 3)}{x^4}$

Zeros de $f'(x)$: $x_1 = -2$

$f'(x)$ não existe em: $x_1 = 0$

f cresce: $x \in (-2, 0)$

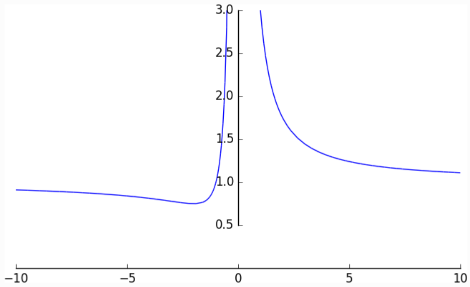
f decresce: $x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$

Zeros de $f''(x)$: $x_1 = -3$

$f''(x)$ não existe em: $x_1 = 0$

f concav. para cima: $x \in (-3, 0) \cup (0, \infty)$

f concav. para baixo: $x \in (-\infty, -3)$



d) Gráfico de $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$

$f'(x) = 3\,(x - 6)\,(x - 2)$

$f''(x) = 6x - 24$

Zeros de $f'(x)$: $x_1 = 2$, $x_2 = 6$

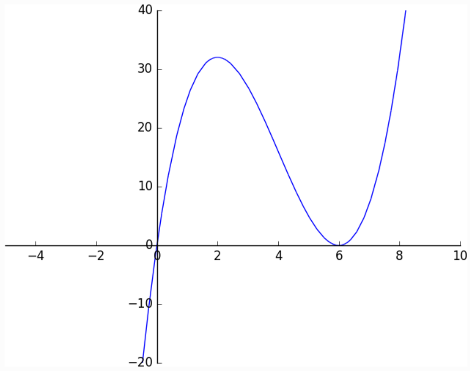
f cresce: $x \in (-\infty, 2) \cup (6, \infty)$

f decresce: $x \in (2, 6)$

Zeros de $f''(x)$: $x_1 = 4$

f concav. para cima: $x \in (4, \infty)$

f concav. para baixo: $x \in (-\infty, 4)$



e) Gráfico de $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$

$f'(x) = -\dfrac{x^2 + 9}{(x-3)^2\,(x+3)^2}$

$f''(x) = \dfrac{2x\,\left(x^2 + 27\right)}{(x-3)^3\,(x+3)^3}$

$f'(x)$ não possui zeros.

$f'(x)$ não existe em: $x_1 = -3$, $x_2 = 3$

f cresce: $x \in \emptyset$

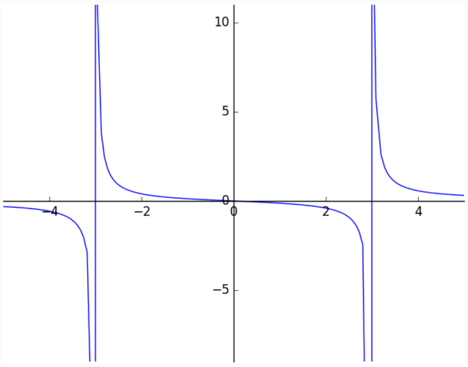
f decresce: $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$

Zeros de $f''(x)$: $x_1 = 0$

$f''(x)$ não existe em: $x_1 = -3$, $x_2 = 3$

f concav. para cima: $x \in (-3, 0) \cup (3, \infty)$

f concav. para baixo: $x \in (-\infty, -3) \cup (0, 3)$



f) Gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-9}$

$f'(x) = -\dfrac{18x}{(x-3)^2\,(x+3)^2}$

$f''(x) = \dfrac{54\left(x^2+3\right)}{(x-3)^3\,(x+3)^3}$

Zeros de $f'(x)$: $x_1 = 0$

$f'(x)$ não existe em: $x_1 = -3$, $x_2 = 3$

f cresce: $x \in (-\infty,-3) \cup (-3,0)$

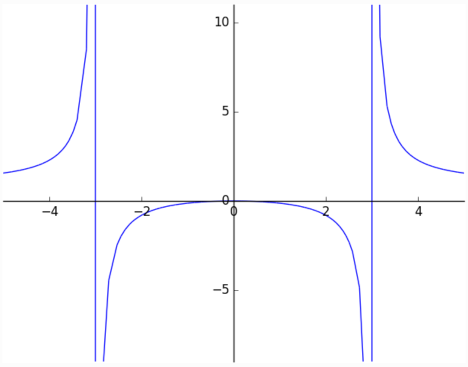
f decresce: $x \in (0,3) \cup (3,\infty)$

$f''(x)$ não possui zeros.

$f''(x)$ não existe em: $x_1 = -3$, $x_2 = 3$

f concav. para cima: $x \in (-\infty,-3) \cup (3,\infty)$

f concav. para baixo: $x \in (-3,3)$



g) Gráfico de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+9}$

$f'(x) = -\dfrac{(x-3)\,(x+3)}{\left(x^2+9\right)^2}$

$f''(x) = \dfrac{2x\left(x^2-27\right)}{\left(x^2+9\right)^3}$

Zeros de $f'(x)$: $x_1 = -3$, $x_2 = 3$

Não há pontos onde $f'(x)$ não exista.

f cresce: $x \in (-3,3)$

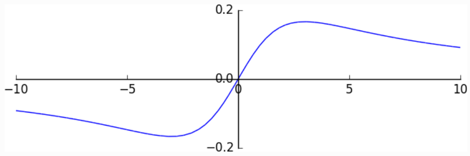
f decresce: $x \in (-\infty,-3) \cup (3,\infty)$

Zeros de $f''(x)$: $x_1 = 0$, $x_2 = -3\sqrt{3}$, $x_3 = 3\sqrt{3}$

Não há pontos onde $f''(x)$ não exista.

f concav. para cima: $x \in \left(-3\sqrt{3},0\right) \cup \left(3\sqrt{3},\infty\right)$

f concav. para baixo: $x \in \left(-\infty,-3\sqrt{3}\right) \cup \left(0,3\sqrt{3}\right)$



h) Gráfico de $f(x) = x\,(x-4)^3$

$f'(x) = 4\,(x-4)^2\,(x-1)$

$f''(x) = 12\,(x-4)\,(x-2)$

Zeros de $f'(x)$: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$

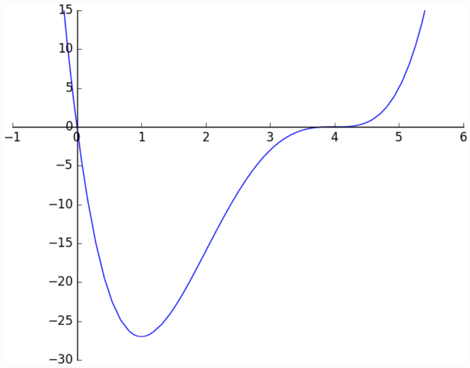
f cresce: $x \in (1,4) \cup (4,\infty)$

f decresce: $x \in (-\infty,1)$

Zeros de $f''(x)$: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$

f concav. para cima: $x \in (-\infty,2) \cup (4,\infty)$

f concav. para baixo: $x \in (2,4)$



i) Gráfico de $f(x) = x^4 - 8x^2 + 8$

$f'(x) = 4x\left(x^2-4\right)$

$f''(x) = 12x^2 - 16$

Zeros de $f'(x)$: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$

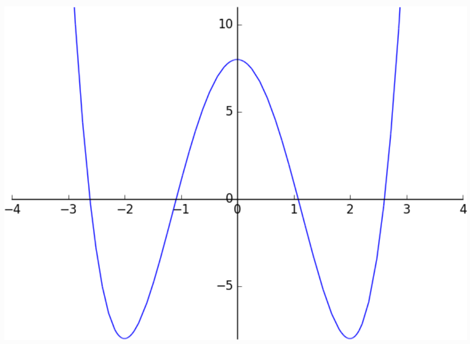
f cresce: $x \in (-2,0) \cup (2,\infty)$

f decresce: $x \in (-\infty,-2) \cup (0,2)$

Zeros de $f''(x)$: $x_1 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

f concav. para cima: $x \in \left(-\infty,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\infty\right)$

f concav. para baixo: $x \in \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$



Referências

1 GOMES, F. M. *Matemática básica: Operações, equações, funções e sequências.* IMECC – UNICAMP, 2017. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~chico/ma091/page14.html>.

2 IEZZI, G. *Fundamentos de matemática elementar, 6: complexos, polinômios, equações.* Atual, 2013. v. 6. ISBN 9788535717525. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=I1iZDAEACAAJ>.

3 IEZZI, G. *Fundamentos de matemática elementar, 7: geometria analítica.* Atual, 2005. v. 7. ISBN 9788535705461. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=nFByPgAACAAJ>.

4 IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de matemática elementar, 2: logaritmos.* Atual, 2013. v. 2. ISBN 9788535716825. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=rZkGkAEACAAJ>.

5 STEWART, J. *Cálculo: Volume I.* 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014. v. 1.

6 THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. *Cálculo Volume 1.* 12. ed. São Paulo, 2012. v. 1.

Índice Remissivo

Matemática I

Luis A. D'Afonseca

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET-MG

11 de março de 2023

Essa apostila foi escrita para apresentar de forma integrada o conteúdo da disciplina de Matemática I do CEFET-MG.

A versão mais recente desta apostila pode ser baixada clicando ou escaneando o código QR.

Arte da capa: Fotografia de Fauxels baixada de Pexels