

Vetor Tangente

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I



<https://material-didatico.github.io/cfvv1>

Conteúdo

Vetor Tangente

Exemplos

Lista Mínima

Curva Paramétrica

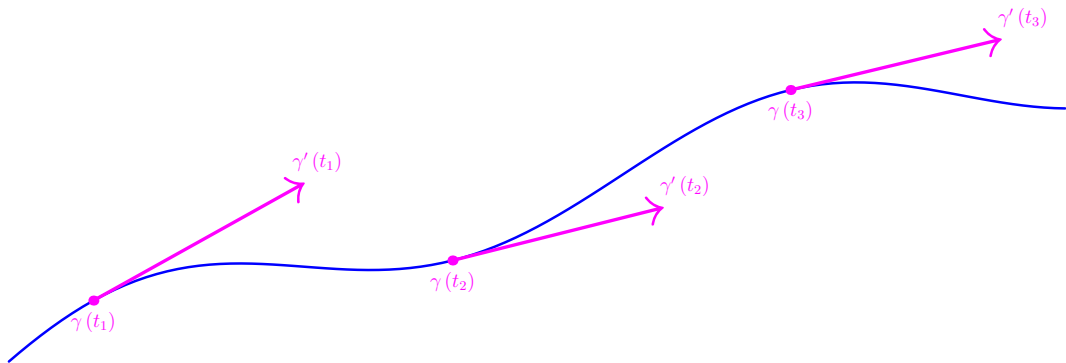
x e y são dados como funções

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad t \in I$$

Vetorialmente

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$$

Vetor Tangente



Vetor Tangente

Se

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} \quad t \in I$$

e f e g forem deriváveis em t , o **vetor tangente** é

$$\gamma'(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{df}{dt} \\ \frac{dg}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}$$

Conteúdo

Vetor Tangente

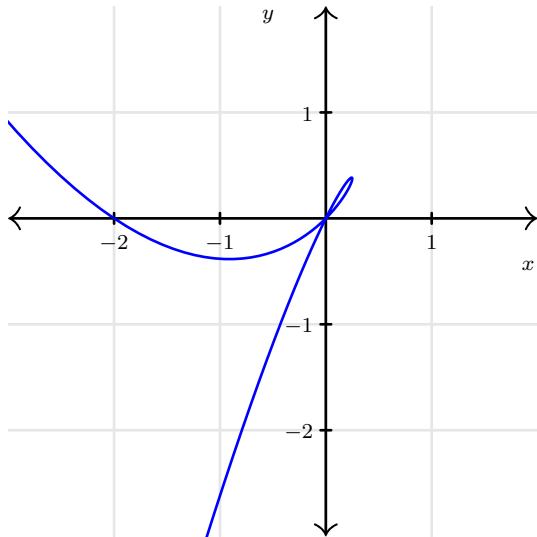
Exemplos

Lista Mínima

Exemplo 1

Calcule o vetor tangente à curva

$$x = t - t^2 \quad y = t - t^3$$



Exemplo 1 – Solução

Calculando $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} (t - t^2) = 1 - 2t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} (t - t^3) = 1 - 3t^2$$

Vetor tangente

$$v(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2t \\ 1 - 3t^2 \end{pmatrix}$$

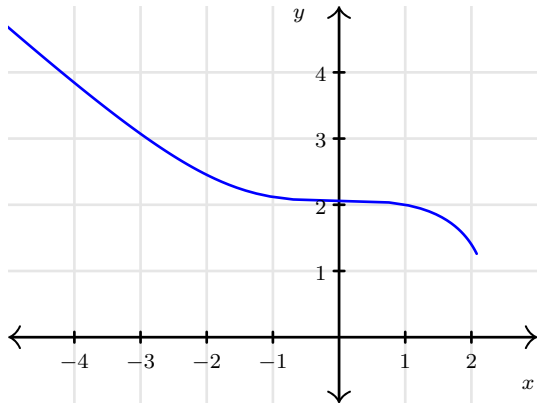
Exemplo 2

Use derivação implícita para calcular o vetor tangente da curva paramétrica

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

definida pelas equações

$$x^3 + 2t^2 = 9 \quad 2y^3 - 3t^2 = 4$$



Exemplo 2 – Derivação Explícita ou Implícita

Nesse caso podemos isolar x e y

$$x = \sqrt[3]{9 - 2t^2} \quad y = \sqrt[3]{\frac{4 + 3t^2}{2}}$$

Como resolver se não fosse possível?

Exemplo 2 – Solução

$$x^3 + 2t^2 = 9$$

$$x^3 = 9 - 2t^2$$

$$\frac{d}{dt}(x^3) = \frac{d}{dt}(9 - 2t^2)$$

$$3x^2 \frac{dx}{dt} = 0 - 2 \times 2t$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-4t}{3x^2}$$

$$2y^3 - 3t^2 = 4$$

$$2y^3 = 4 + 3t^2$$

$$\frac{d}{dt}(2y^3) = \frac{d}{dt}(4 + 3t^2)$$

$$2 \times 3y^2 \frac{dy}{dt} = 0 + 3 \times 2t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{6t}{6y^2} = \frac{t}{y^2}$$

Exemplo 2 – Solução

Vetor tangente

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \frac{-4t}{3x^2} \\ t \\ \frac{t}{y^2} \end{pmatrix}$$

Exemplo 3

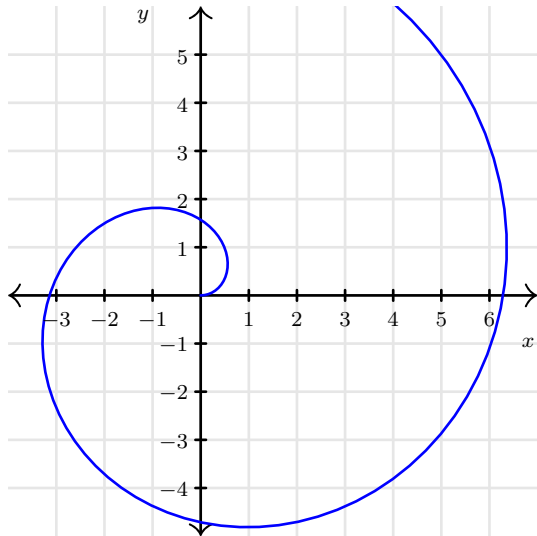
Calcule o vetor tangente à curva

$$x = t \cos(t)$$

$$y = t \sin(t)$$

$$0 \leq t < \infty$$

quando $t = \frac{\pi}{2}$



Exemplo 3 – Solução

Derivada da coordenada x

$$\begin{aligned}x'(t) &= \frac{dx}{dt} \\&= \frac{d}{dt} t \cos(t) \\&= 1 \times \cos(t) + t(-\sin(t)) \\&= \cos(t) - t \sin(t)\end{aligned}$$

Derivada da coordenada y

$$\begin{aligned}y'(t) &= \frac{dy}{dt} \\&= \frac{d}{dt} t \sin(t) \\&= 1 \times \sin(t) + t \cos(t) \\&= \sin(t) + t \cos(t)\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

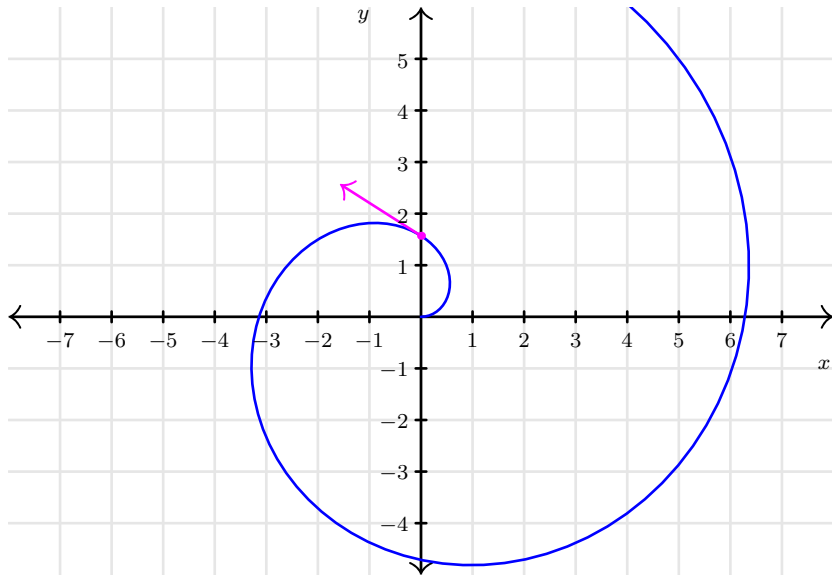
Avaliando as funções derivada em $t = \frac{\pi}{2}$

$$x' \left(\frac{\pi}{2} \right) = (\cos(t) - t \sin(t)) \Big|_{\frac{\pi}{2}} = \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) - \frac{\pi}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0 - \frac{\pi}{2} \times 1 = -\frac{\pi}{2}$$

$$y' \left(\frac{\pi}{2} \right) = (\sin(t) + t \cos(t)) \Big|_{\frac{\pi}{2}} = \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1 + \frac{\pi}{2} \times 0 = 1$$

O vetor tangente é $\begin{bmatrix} -\pi/2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Exemplo 3 – Solução

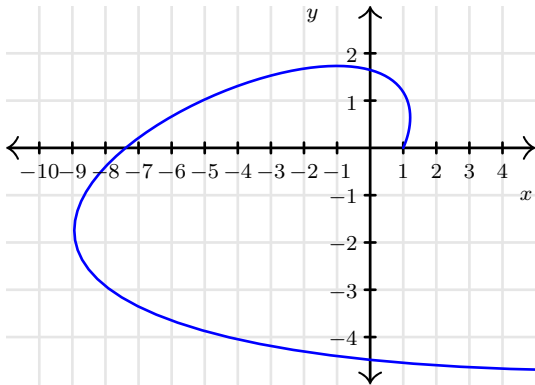


Exemplo 4

Calcule o vetor tangente à curva

$$\begin{cases} x = e^{2t} \cos(\pi t) \\ y = e^t \sin(\pi t) \end{cases}$$

em $t = \frac{3}{4}$



Exemplo 4 – Solução

Derivada da coordenada x

$$\begin{aligned}x'(t) &= \frac{dx}{dt} \\&= \frac{d}{dt} (e^{2t} \cos(\pi t)) \\&= \frac{d}{dt} (e^{2t}) \cos(\pi t) + e^{2t} \frac{d}{dt} (\cos(\pi t)) \\&= e^{2t} \frac{d}{dt} (2t) \cos(\pi t) - e^{2t} \sin(\pi t) \frac{d}{dt} (\pi t) \\&= 2e^{2t} \cos(\pi t) - \pi e^{2t} \sin(\pi t)\end{aligned}$$

Exemplo 4 – Solução

Derivada da coordenada y

$$\begin{aligned}y'(t) &= \frac{dy}{dt} \\&= \frac{d}{dt} (e^t \operatorname{sen}(\pi t)) \\&= \frac{d}{dt} (e^t) \operatorname{sen}(\pi t) + e^t \frac{d}{dt} (\operatorname{sen}(\pi t)) \\&= e^t \operatorname{sen}(\pi t) + e^t \cos(\pi t) \frac{d}{dt} (\pi t) \\&= e^t \operatorname{sen}(\pi t) + \pi e^t \cos(\pi t)\end{aligned}$$

Exemplo 4 – Solução

Avaliando a derivada de $x(t)$ em $t = 3/4$

$$\begin{aligned}x' \left(\frac{3}{4} \right) &= \left[2e^{2t} \cos(\pi t) - \pi e^{2t} \sin(\pi t) \right] \Big|_{t=3/4} \\&= 2e^{2\frac{3}{4}} \cos \left(\pi \frac{3}{4} \right) - \pi e^{2\frac{3}{4}} \sin \left(\pi \frac{3}{4} \right) \\&= 2e^{3/2} \cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) - \pi e^{3/2} \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \\&= 2e^{3/2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \pi e^{3/2} \frac{\sqrt{2}}{2} \\&= -\sqrt{2} \left(1 + \frac{\pi}{2} \right) e^{3/2}\end{aligned}$$

Exemplo 4 – Solução

Avaliando a derivada de $y(t)$ em $t = 3/4$

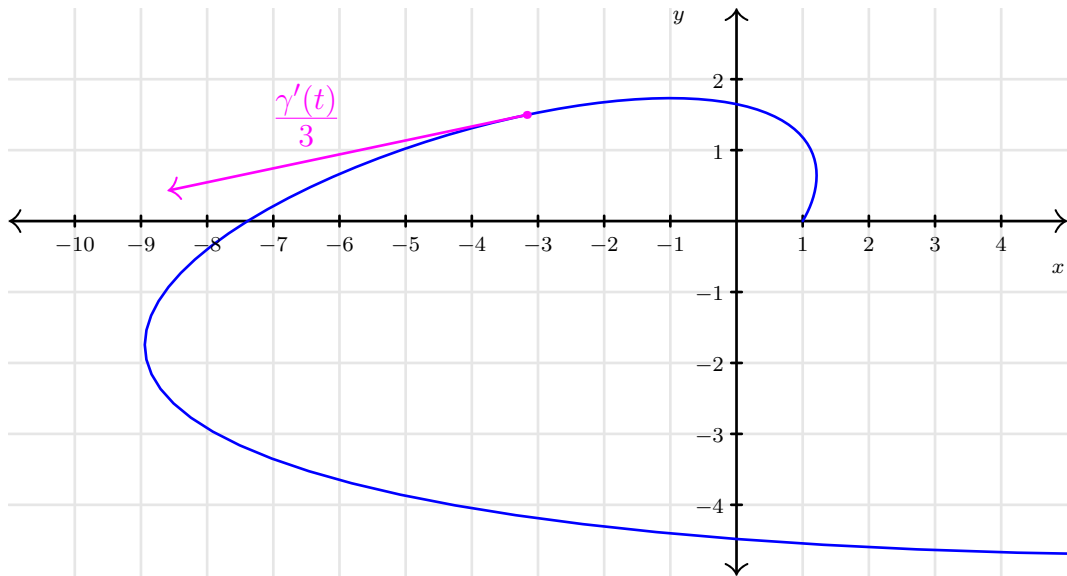
$$\begin{aligned}y' \left(\frac{3}{4} \right) &= \left(e^t \sin(\pi t) + \pi e^t \cos(\pi t) \right) \Big|_{t=3/4} \\&= e^{3/4} \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) + \pi e^{3/4} \cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) \\&= \frac{e^{3/4}}{\sqrt{2}} - \pi \frac{e^{3/4}}{\sqrt{2}} \\&= \frac{1 - \pi}{\sqrt{2}} e^{3/4}\end{aligned}$$

Exemplo 4 – Solução

O vetor tangente no ponto $t = 3/4$ é

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) e^{3/2} \\ \frac{1 - \pi}{\sqrt{2}} e^{3/4} \end{pmatrix}$$

Exemplo 4 – Solução



Exemplo 5

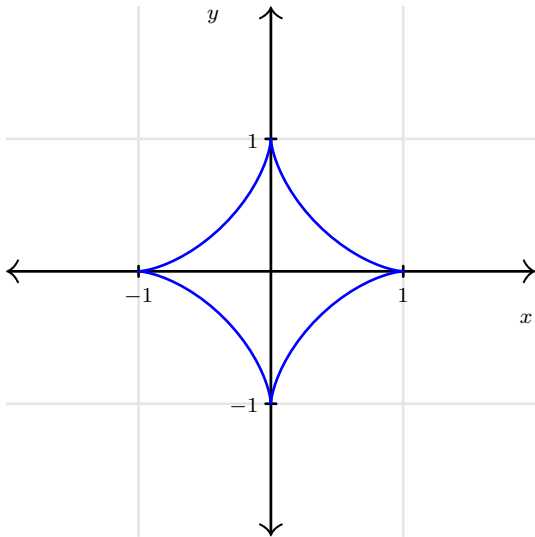
Encontre o vetor tangente ao astroide

$$x = \cos^3(t)$$

$$y = \sin^3(t)$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\text{no ponto } t = \frac{\pi}{6}$$



Exemplo 5 – Solução

Avaliando as derivadas das componentes

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \cos^3(t) = 3 \cos^2(t) \frac{d}{dt} \cos(t) = -3 \cos^2(t) \sin(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \sin^3(t) = 3 \sin^2(t) \frac{d}{dt} \sin(t) = 3 \sin^2(t) \cos(t)$$

Exemplo 5 – Solução

Avaliando a derivada de x no ponto $t = \frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} \left(\frac{\pi}{6} \right) &= \left[-3 \cos^2(t) \sin(t) \right] \Big|_{\frac{\pi}{6}} = -3 \cos^2 \left(\frac{\pi}{6} \right) \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \\ &= -3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right) = -3 \frac{3}{4} \frac{1}{2} = \frac{-9}{8}\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Solução

Avaliando a derivada de y no ponto $t = \frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} \left(\frac{\pi}{6} \right) &= \left[3 \sin^2(t) \cos(t) \right] \Big|_{\frac{\pi}{6}} = 3 \sin^2 \left(\frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) \\ &= 3 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 3 \frac{1}{4} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Solução

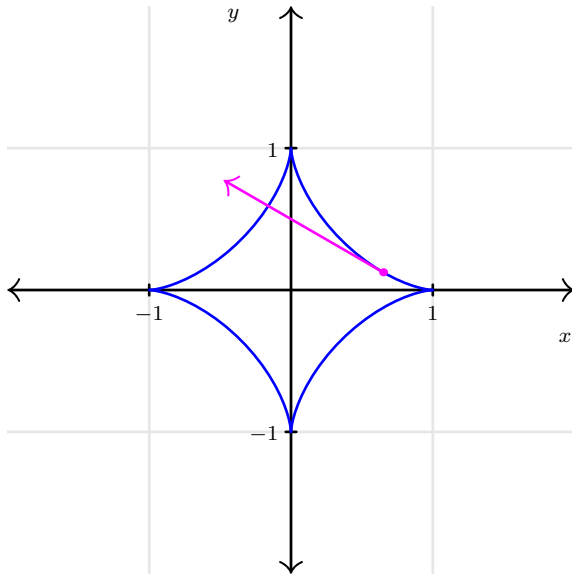
Função vetor tangente

$$v(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cos^2(t) \sin(t) \\ 3 \sin^2(t) \cos(t) \end{pmatrix}$$

No ponto $t = \frac{\pi}{6}$

$$v\left(\frac{\pi}{6}\right) = \begin{pmatrix} \frac{-9}{8} \\ \frac{3\sqrt{3}}{8} \end{pmatrix} = \frac{3}{8} \begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Exemplo 5 – Solução



Conteúdo

Vetor Tangente

Exemplos

Lista Mínima

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12^a ed. – Seção 11.2

1. Estudar todo o texto da seção
2. Calcule o vetor tangente das funções dos exercícios: 2, 8, 12, 16, 18, 20
(Ignore o enunciado original dos exercícios)

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações