Cilindros e Superfícies Quádricas

Luis Alberto D’Afonseca

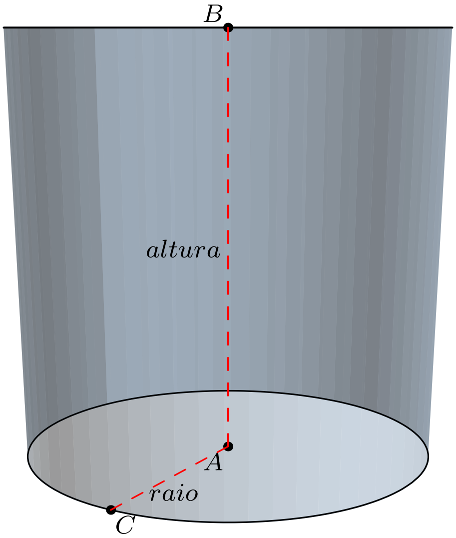
Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I

https://material-didatico.github.io/cfvv1

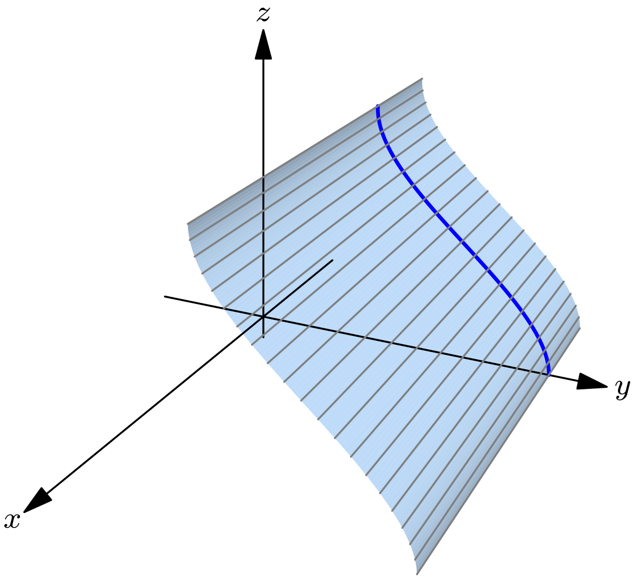
23 de outubro de 2025

Conteúdo

Cilindro Sólido



Cilindros



Conteúdo

Cônicas e Quádricas

Cônica: Gráfico de uma equação de segundo grau no plano

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

Quádrica: gráfico de uma equação de segundo grau em $\mathbb{R}^3$

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + G = 0$$

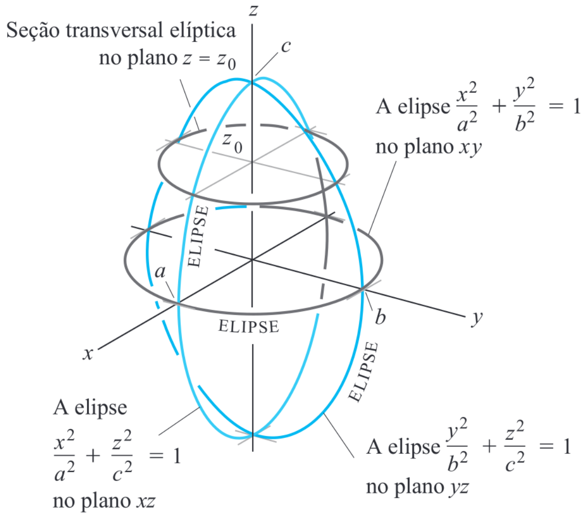
Quádricas

- Elipsoides
- Paraboloides
- Cones elípticos
- Hiperboloides

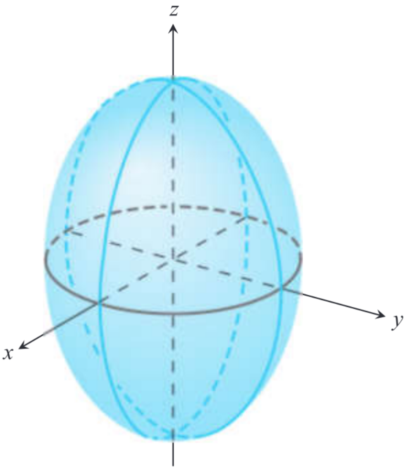
Elipsoides

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Elipsoides



Seção transversal elíptica
no plano $z = z_0$
z
c
z_0
A elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
no plano xy
ELIPSE
a
ELIPSE
b
y
x
ELIPSE
A elipse
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
no plano xz
A elipse $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
no plano yz



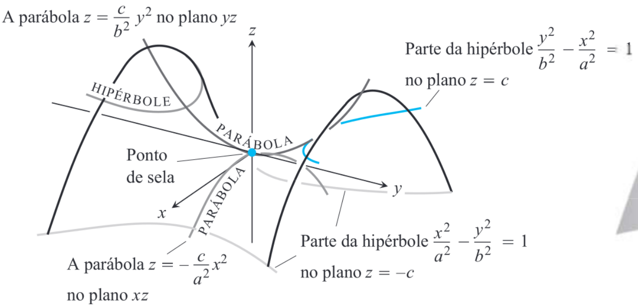
z
y
x

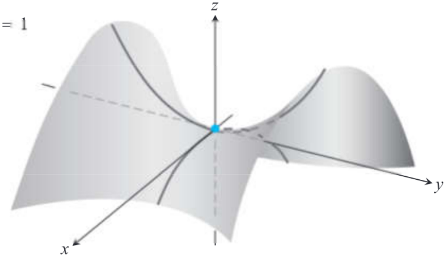
Paraboloide Hiperbólico

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$$

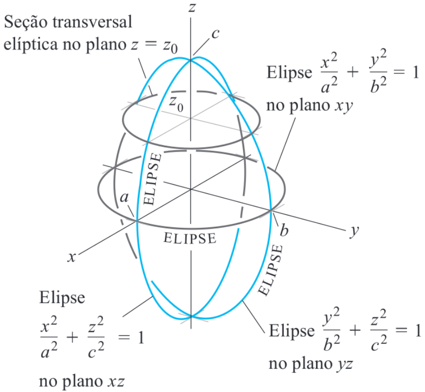
Ponto de sela

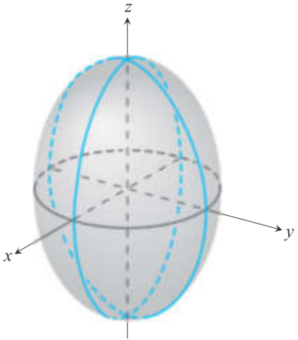
Elipsoides


A parábola $z = \frac{c}{b^2}y^2$ no plano yz
z
HIPÉRBOLE
PARÁBOLA
Ponto
de sela
PARÁBOLA
x
y
Parte da hipérbole $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$
no plano $z = c$
Parte da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
no plano $z = -c$
A parábola $z = -\frac{c}{a^2}x^2$
no plano xz


z
y
x

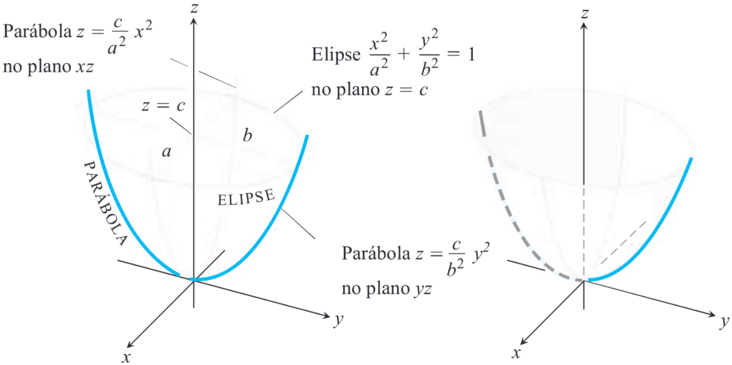
Elipsoide





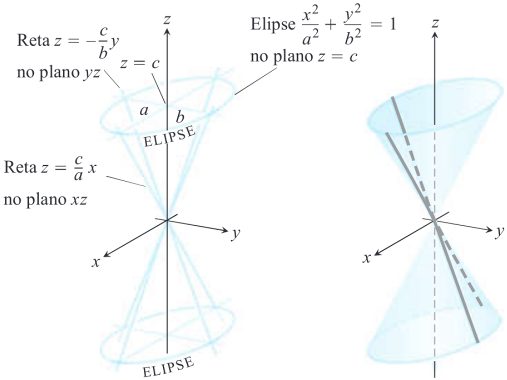
ELIPSOIDE $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Paraboloide Elíptico



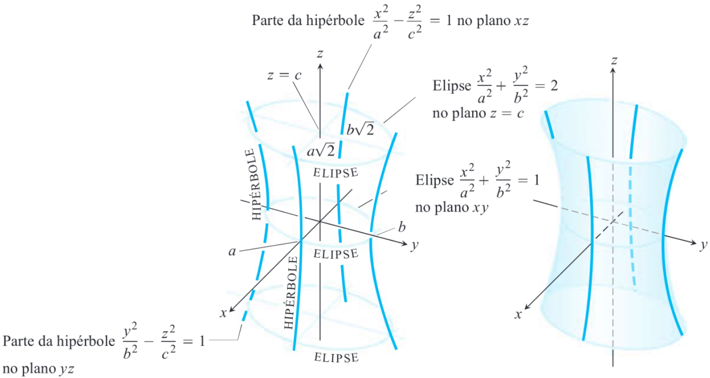
PARABOLOIDE ELÍPTICO $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z}{c}$

Cone Elíptico



CONE ELÍPTICO $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$

Hiperboloide de Uma Folha



HIPERBOLOIDE DE UMA FOLHA

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Exemplo 1

Encontre e esboce as curvas que representam o corte da superfície

$$4x^2 + y^2 = 16$$

pelos planos $z = 0$ e $y = 0$

Exemplo 1 – Solução

No plano $z = 0$ a equação

$$4x^2 + y^2 = 16$$

permanece inalterada, porém, agora representa a elipse

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

que intercepta o eixo x nos pontos $(2, 0)$ e $(-2, 0)$

e o eixo y nos pontos $(4, 0)$ e $(-4, 0)$

Exemplo 1 – Solução

No plano $y = 0$ a equação

$$4x^2 + y^2 = 16$$

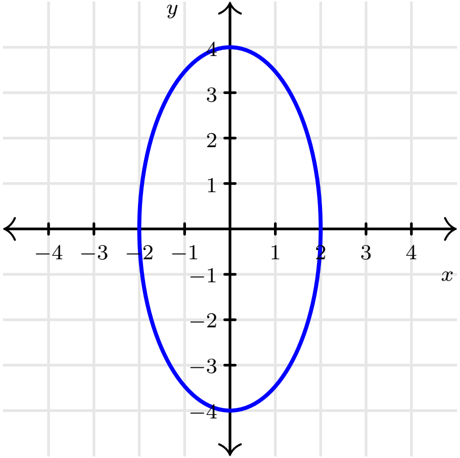
se reduz a

$$\begin{aligned} 4x^2 + 0 &= 16 \\ x^2 &= 4 \\ |x| &= 2 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

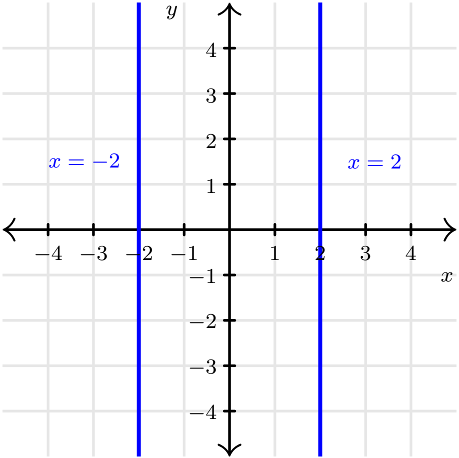
que representa as retas verticais $x = 2$ e $x = -2$

Exemplo 1 – Solução

$z = 0$



$y = 0$



Exemplo 2

Encontre e esboce as curvas que representam o corte da superfície

$$x^2 + y^2 = 4 - z^2$$

pelos planos $z = 0$ e $y = 0$

Exemplo 2 – Solução

No plano $z = 0$ a equação

$$x^2 + y^2 = 4 - z^2$$

se reduz a

$$x^2 + y^2 = 4 - 0$$

$$x^2 + y^2 = 2^2$$

que corresponde circunferência de raio 2 centrada na origem

Exemplo 2 – Solução

No plano $y = 0$ a equação

$$x^2 + y^2 = 4 - z^2$$

se reduz a

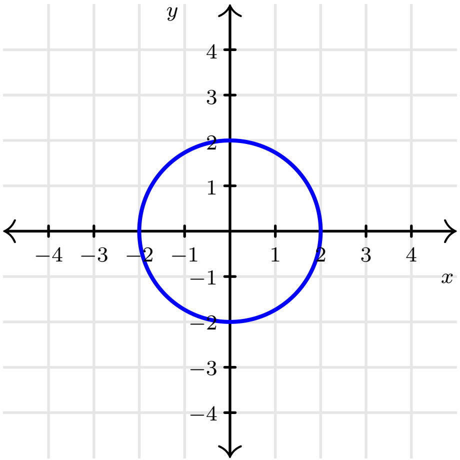
$$x^2 + 0 = 4 - z^2$$

$$x^2 + z^2 = 2^2$$

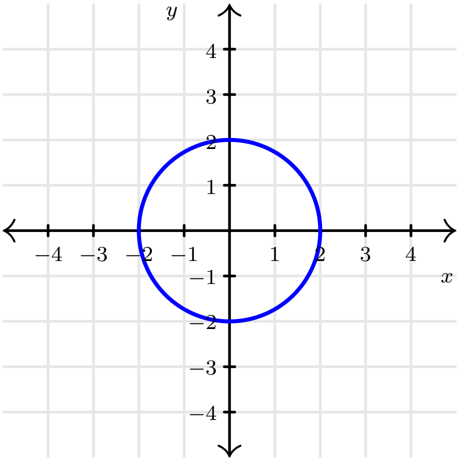
que corresponde circunferência de raio 2 centrada na origem

Exemplo 2 – Solução

$z = 0$



$y = 0$



Exemplo 3

Encontre e esboce as curvas que representam os cortes da superfície

$$y^2 - x^2 = z$$

pelos planos $z = 0$ e $y = 0$

Exemplo 3 – Solução

No plano $z = 0$ a equação

$$y^2 - x^2 = z$$

se reduz a

$$\begin{aligned} y^2 - x^2 &= 0 \\ y^2 &= x^2 \\ |y| &= |x| \\ y &= \pm x \end{aligned}$$

que corresponde as retas $y = x$ e $y = -x$

Exemplo 3 – Solução

No plano $y = 0$ a equação

$$y^2 - x^2 = z$$

se reduz a

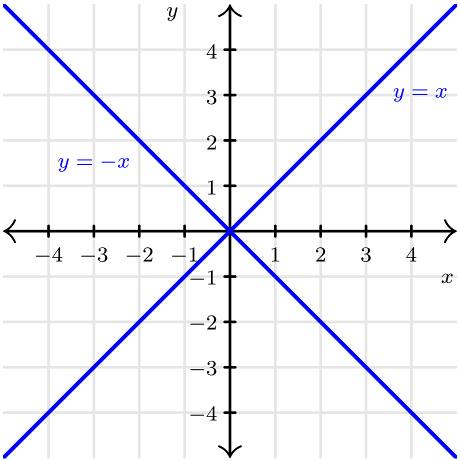
$$0 - x^2 = z$$

$$z = -x^2$$

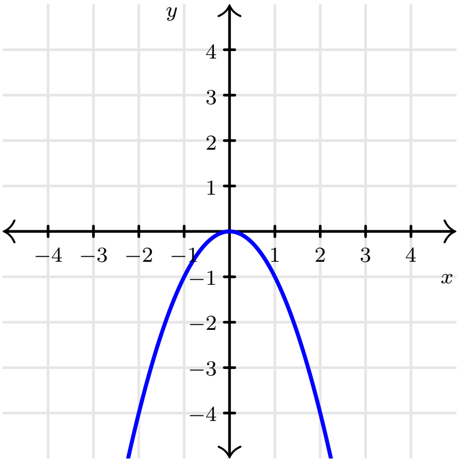
que corresponde uma parábola com vértice na origem
e apontando para baixo

Exemplo 3 – Solução

$z = 0$



$y = 0$



Exemplo 4

Considerando a esfera de raio 3 centrada na origem

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

e o plano horizontal

$$z = 2$$

Determine a curva de interseção das duas superfícies no espaço

Exemplo 4 – Solução

A equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

restrita ao plano $z = 2$, se reduz a

$$x^2 + y^2 + 2^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 = 5$$

que corresponde a uma circunferência de raio $\sqrt{5}$
contida no plano $z = 2$
e centrada no ponto $(0, 0, 2)$

Exemplo 5

Considerando a esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

e o plano

$$x + y + z = 0$$

Determine a projeção da interseção das superfícies no plano xy

Exemplo 5 – Solução

Isolamos z na equação do plano

$$x + y + z = 0$$

$$z = -x - y$$

Substituímos na equação da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 + (-x - y)^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 + x^2 + 2xy + y^2 = 9$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2xy = 9$$

$$x^2 + y^2 + xy = \frac{9}{2}$$

que é uma cônica rotacionada

Exemplo 6

Considere as quádricas

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \qquad \text{(esfera)}$$

$$z = x^2 + y^2 \qquad \text{(paraboloide circular)}$$

Encontre a equação da curva de interseção

Dica: use $u = x^2 + y^2$

Exemplo 6 – Solução

Substituímos a equação do paraboloide

$$z = x^2 + y^2$$

na da esfera

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 9 \\ x^2 + y^2 + \left(x^2 + y^2\right)^2 &= 9 \\ u + u^2 &= 9 \\ u^2 + u - 9 &= 0 \end{aligned}$$

Exemplo 6 – Solução

Resolvendo $u^2 + u - 9 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-9) = 37$$

$$u = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{37}}{2}$$

Como $u \geq 0$

$$u = \frac{-1 + \sqrt{37}}{2}$$

Exemplo 6 – Solução

Então

$$x^2 + y^2 = \frac{-1 + \sqrt{37}}{2}$$

Uma circunferência de raio $\sqrt{\dfrac{-1 + \sqrt{37}}{2}}$ centrada em $(0, 0, 0)$

Conteúdo

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12ª ed. – Seção 12.6

1. Estudar o texto da seção
2. Encontre a equação e esboce os gráficos dos cortes, nos planos $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, das quádricas dos exercícios: 1-12

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações