

Limites de Funções de Várias Variáveis

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I



<https://material-didatico.github.io/cfvv1>

Conteúdo

Límites Iterados

Límites

Propriedades

Exemplos

Lista Mínima

Exemplo 1

Considere a função

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Calcule os limites $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right)$ e $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right)$

Exemplo 1 – Limite em y depois em x

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)$$

Para x fixo diferente de zero

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Logo

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

Exemplo 1 – Limite em x depois em y

$$L_2 = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)$$

Para y diferente de zero

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

Logo

$$L_2 = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (-1) = -1$$

Não podemos definir o limite em várias variáveis dessa forma

Conteúdo

Límites Iterados

Límites

Propriedades

Exemplos

Lista Mínima

Definição

Uma função $f: R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y)$,

se aproxima do **limite** L a medida que (x, y) se aproxima de (a, b)

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que, para todo (x, y) no domínio de f

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta(\varepsilon)$$

Obs: (a, b) não precisa estar no domínio de f

Notação

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

$$f(x,y) \rightarrow L \quad \text{quando} \quad (x,y) \rightarrow (a,b)$$

Exemplo 2

Encontre os limites

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} k$

2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x$

3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} y$

4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} xy$

Respostas

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} k = k$

2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a$

3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} y = b$

4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} xy = ab$

Conteúdo

Límites Iterados

Límites

Propriedades

Exemplos

Lista Mínima

Teorema – Unicidade do Limite

Se uma função $f(x, y)$ possui um limite L
quando (x, y) se aproxima de (a, b) ,
então L é único

Teorema – Propriedades dos limites de várias variáveis

As propriedades a seguir são verdadeiras se

► L, M e k forem números reais

► $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$

► $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = M$

Regra da Soma e Diferença

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y) + g(x,y)] = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) + \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = L + M$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y) - g(x,y)] = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) - \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = L - M$$

Regra da Multiplicação por Constante e do Produto

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [kf(x,y)] = k \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = kL$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y)g(x,y)] = \left[\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \right] \left[\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) \right] = LM$$

Regra do Quociente (Divisão)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \left[\frac{f(x,y)}{g(x,y)} \right] = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y)} = \frac{L}{M}$$

Desde que $M \neq 0$

Regra da Potência e da Raiz

Para n inteiro positivo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x, y)]^n = \left[\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) \right]^n = L^n$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \sqrt[n]{f(x, y)} = \sqrt[n]{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)} = \sqrt[n]{L}$$

Se n for par L precisa ser positivo

Teorema do Confronto

Se

$$g(x, y) \leq f(x, y) \leq h(x, y)$$

para todo $(x, y) \neq (a, b)$, em um disco centrado em (a, b) e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} h(x, y) = L$$

então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$$

Conteúdo

Límites Iterados

Límites

Propriedades

Exemplos

Lista Mínima

Exemplo 3

Calcule o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3}$, se ele existir

Assumindo que todos os limites necessários para aplicar as propriedades existam
(Isso pode não ser verdade)

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} &= \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} (x - xy + 3)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} (x^2y + 5xy - y^3)} \\&= \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} x - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} xy + \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} 3}{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} x^2y + \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} 5xy - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} y^3} \\&= \frac{0 - 0 \times 1 + 3}{0^2 \times 1 + 5 \times 0 \times 1 - 1^3} \\&= \frac{3}{-1} = -3\end{aligned}$$

Exemplo 4

Calcule o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ se ele existir

Assumindo que todos os limites necessários para aplicar as propriedades existam
(Isso pode não ser verdade)

Exemplo 4 – Solução

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 - xy)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (\sqrt{x} - \sqrt{y})} \\&= \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy}{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x} - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{y}} \\&= \frac{0 - 0}{0 - 0} = \frac{0}{0} = 1\end{aligned}$$

Não existe divisão por zero !!!

Exemplo 4 – Solução

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 - xy)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (\sqrt{x} - \sqrt{y})} \\&= \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy}{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x} - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{y}} \\&= \frac{0 - 0}{0 - 0} = \frac{0}{0} \quad \nexists\end{aligned}$$

Então o limite não existe?

Exemplo 4 – Solução

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 - xy)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (\sqrt{x} - \sqrt{y})} \\&= \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy}{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x} - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{y}} \\&= \frac{0 - 0}{0 - 0} = \frac{0}{0}\end{aligned}$$

Não podemos aplicar a propriedade do quociente

Precisamos remover a indeterminação

Exemplo 4 – Solução

Ao calcular o limite consideramos apenas os pontos dentro do domínio da função

Para $x \neq y$

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\ &= \frac{x(x - y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y} \\ &= x(\sqrt{x} + \sqrt{y})\end{aligned}$$

Exemplo 4 – Solução

Calculando o limite

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \\&= \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \right) \left[\left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x} \right) + \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{y} \right) \right] \\&= 0 (\sqrt{0} + \sqrt{0}) \\&= 0\end{aligned}$$

Exemplo 5

Calcule o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,3)} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y+1}}{x - y - 1}$

Exemplo 5 – Manipulando a Função

No interior do domínio da função

Multiplicando pelo conjugado

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y+1}}{x - y - 1} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y+1}}{x - y - 1} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y+1}}{\sqrt{x} + \sqrt{y+1}} \\ &= \frac{x - (y+1)}{(x - y - 1)(\sqrt{x} + \sqrt{y+1})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y+1}}\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Calculando o Limite

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (4,3)} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y+1}}{x - y - 1} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (4,3)} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3+1}} \\ &= \frac{1}{2+2} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Exemplo 6

Calcule o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\ln(y) \operatorname{sen}(x)}{x}$

Exemplo 6 – Solução

Limite fundamental

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\ln(y) \text{sen}(x)}{x} &= \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \ln(y) \right) \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\text{sen}(x)}{x} \right) \\ &= \ln(1) \times 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

Exemplo 7

Calcule o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$

Exemplo 7 – Multiplicando pelo conjugado

No domínio da função

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2} &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2} \times \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1} \\ &= \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1}\end{aligned}$$

Exemplo 7 – Calculando o Limite

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1} + 1} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Conteúdo

Límites Iterados

Límites

Propriedades

Exemplos

Lista Mínima

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12^a ed. – Seção 14.2

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 1, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 23, 27, 55, 57

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações