

Inexistência do Limite de Funções de Várias Variáveis

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I



<https://material-didatico.github.io/cfvv1>

Conteúdo

Motivação

Inexistência do Limite

Exemplos

Lista Mínima

Exemplo 1

Analise o limite de $f(x, y) = \frac{y}{x}$ quando (x, y) se aproxima de $(0, 0)$

A reta $x = 0$ não faz parte do domínio de f

O ponto $(0, 0)$ não está no domínio de f

Não podemos usar as propriedades diretamente

Não existe manipulação que remova a indeterminação

Exemplo 1 – Solução

Calculando o limite f sobre a reta $y = x$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, x) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{x} \Big|_{y=x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

Calculando o limite f sobre a reta $y = 0$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, 0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{x} \Big|_{y=0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

Exemplo 1 – Solução

Para qualquer $\delta > 0$

dentro da bola de raio δ e centro em $(0, 0)$ sempre vai existir

um ponto da forma (x, x) onde a função vale 1 e

um ponto da forma $(x, 0)$ onde a função vale 0

Nenhum valor L atende as condições da definição de limite

O limite não existe

Conteúdo

Motivação

Inexistência do Limite

Exemplos

Lista Mínima

Teste dos Dois Caminhos

Se $f(x, y)$ tem limites diferentes ao longo de dois caminhos diferentes, no domínio de f , quando (x, y) se aproxima de (a, b) , então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) \quad \text{não existe}$$

Conteúdo

Motivação

Inexistência do Limite

Exemplos

Lista Mínima

Exemplo 2

Verifique a existência do limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

Exemplo 2 – Solução

Caminho $y = x$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \Big|_{y=x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xx}{x^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Caminho $y = -x$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \Big|_{y=-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(-x)}{x^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Como os limites nos caminhos são diferentes, o limite não existe

Exemplo 3

Verifique se a função $f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$ possui limite na origem.

O limite na origem leva a uma indeterminação do tipo $0/0$

Exemplo 3 – Solução

Fazendo $y = mx$, para $m \neq 0$ e $x \neq 0$, temos

$$f(x, mx) = \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2} \Big|_{y=mx} = \frac{2mx^3}{x^4 + m^2 x^2} = \frac{2mx x^2}{(x^2 + m^2) x^2} = \frac{2mx}{x^2 + m^2}$$

Calculando o limite $x \rightarrow 0$, que corresponde a $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2mx}{x^2 + m^2} = \frac{0}{m^2} = 0 \quad \forall m \neq 0$$

Portanto, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2} = 0$ **Falso!**

Exemplo 3 – Solução

Fazendo $y = kx^2$, para $x \neq 0$, temos

$$f(x, kx^2) = \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2} \Big|_{y=kx^2} = \frac{2kx^4}{x^4 + k^2 x^4} = \frac{2kx^4}{(1 + k^2) x^4} = \frac{2k}{1 + k^2}$$

Calculando os limites até o ponto $(0, 0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \Big|_{y=kx^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2k}{1 + k^2} = \frac{2k}{1 + k^2}$$

Para cada valor de k , a função f se aproxima da origem com um valor diferente

Portanto, o limite não existe

Exemplo 4

Mostre que o limite não existe

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

Exemplo 4 – Solução

Caminho $x = y^2$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \Big|_{x=y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 y^2}{y^4 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{2y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Caminho $x = 0$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \Big|_{x=0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 \times y^2}{0 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

Como os limites nos caminhos são diferentes, o limite não existe

Exemplo 5

Mostre que o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ não existe

Exemplo 5 – Solução

Caminho $x = y^2$

$$L_1 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \Big|_{x=y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 y^2}{y^4 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{2y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Caminho $x = 0$

$$L_2 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \Big|_{x=0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 \times y^2}{0 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

Como $L_1 \neq L_2$, o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ não existe

Conteúdo

Motivação

Inexistência do Limite

Exemplos

Lista Mínima

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12^a ed. – Seção 14.2

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 41, 43, 45, 47

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações