

Derivadas Parciais

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I



<https://material-didatico.github.io/cfvv1>

Conteúdo

Derivadas Parciais

Exemplos

Lista Mínima

Derivada Ordinária – Uma variável

Variação da função com relação a uma variável

Derivada da função $f: R \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no ponto a

$$\frac{df}{dx}(a) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Derivada Parcial

Variação da função com relação a **uma** das variáveis
considerando as demais **fixas**

Definição – Derivada Parcial em x

A derivada parcial, com relação a x , da função $f: R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x, y)$, no ponto (a, b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x,y)=(a,b)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

Desde que o limite exista

Definição – Derivada Parcial em y

A derivada parcial, com relação a y , da função $f: R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x, y)$, no ponto (a, b)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x,y)=(a,b)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$$

Desde que o limite exista

Notações

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

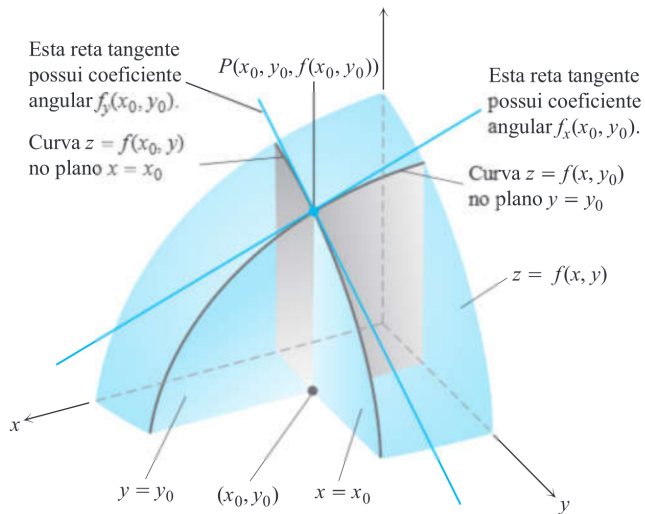
$$f_y(x, y)$$

$$f_y$$

$$\partial_y f(x, y)$$

$$\partial_y f$$

Retas Tangentes



Retas Tangentes

Temos duas retas tangentes, uma na direção x e uma na direção y

Nem sempre o plano gerado por elas é plano tangente da superfície

Conteúdo

Derivadas Parciais

Exemplos

Lista Mínima

Exemplo 1

Encontre os valores de $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ no ponto $(4, -5)$ para a função

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + y - 1$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + 3xy + y - 1) \\&= \frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial 3xy}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial 1}{\partial x} \\&= 2x + 3y \frac{\partial x}{\partial x} + 0 - 0 \\&= 2x + 3y\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x}(4, -5) = (2x + 3y) \Big|_{(x,y)=(4,-5)} = 2 \cdot 4 + 3(-5) = -7$$

Exemplo 1 – Solução

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + 3xy + y - 1) \\&= \frac{\partial x^2}{\partial y} + \frac{\partial 3xy}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\partial 1}{\partial y} \\&= 0 + 3x \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial y} - 0 \\&= 3x + 1\end{aligned}$$

Cadê o y ?

Exemplo 1 – Solução

$$\frac{\partial f}{\partial y}(4, -5) = (3x + 1) \Big|_{(x,y)=(4,-5)} = 3 \cdot 4 + 1 = 13$$

Exemplo 2

Encontre $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ para $f(x, y) = y \sin(xy)$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(y \operatorname{sen}(xy)) \\ &= y \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{sen}(xy) \\ &= y \cos(xy) \frac{\partial}{\partial x}(xy) \\ &= y \cos(xy) y \\ &= y^2 \cos(xy)\end{aligned}$$

Exemplo 2 – Solução

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(y \operatorname{sen}(xy)) \\&= \frac{\partial y}{\partial y} \operatorname{sen}(xy) + y \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{sen}(xy) \\&= \operatorname{sen}(xy) + y \cos(xy) \frac{\partial}{\partial y}(xy) \\&= \operatorname{sen}(xy) + y \cos(xy)x \\&= \operatorname{sen}(xy) + xy \cos(xy)\end{aligned}$$

Exemplo 3

Encontre as funções f_x e f_y sendo que $f(x, y) = \frac{2y}{y + \cos(x)}$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2y}{y + \cos(x)} \right) \\&= \frac{\partial}{\partial x} \left[2y(y + \cos(x))^{-1} \right] \\&= 2y \frac{\partial}{\partial x} (y + \cos(x))^{-1} \\&= 2y(-1)(y + \cos(x))^{-2} \frac{\partial}{\partial x} (y + \cos(x)) \\&= -2y(y + \cos(x))^{-2} (-\sin(x)) \\&= \frac{2y \sin(x)}{(y + \cos(x))^2}\end{aligned}$$

Exemplo 3 – Solução

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2y}{y + \cos(x)} \right) \\&= 2 \frac{\frac{\partial y}{\partial y} (y + \cos(x)) - y \frac{\partial}{\partial y} (y + \cos(x))}{(y + \cos(x))^2} \\&= 2 \frac{(y + \cos(x)) - y(1 + 0)}{(y + \cos(x))^2} \\&= \frac{2 \cos(x)}{(y + \cos(x))^2}\end{aligned}$$

Exemplo 4

Encontre $\frac{\partial z}{\partial x}$ se a equação

$$yz - \ln(z) = x + 1$$

define z como uma função de x e y

Vamos derivar os dois lados por x , assumindo $z = z(x, y)$

Exemplo 4 – Solução

$$yz - \ln(z) = x + 1$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(yz - \ln(z)) = \frac{\partial}{\partial x}(x + 1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(yz) - \frac{\partial}{\partial x}(\ln(z)) = 1$$

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \left(y - \frac{1}{z} \right) = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \left(y - \frac{1}{z} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{yz - 1}{z} \right)^{-1} \\ &= \frac{z}{yz - 1} \end{aligned}$$

Exemplo 5

Calcule as derivadas parciais de primeira ordem da função

$$f(x,y) = \text{sen}(x^2y) + e^{xy^2}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\sin(x^2 y) + e^{xy^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\sin(x^2 y) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{xy^2} \right) \\ &= \cos(x^2 y) \frac{\partial}{\partial x} (x^2 y) + e^{xy^2} \frac{\partial}{\partial x} (xy^2) \\ &= \cos(x^2 y) 2xy + e^{xy^2} y^2 \\ &= 2xy \cos(x^2 y) + y^2 e^{xy^2}\end{aligned}$$

Exemplo 5 – Solução

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\sin(x^2 y) + e^{xy^2} \right) \\&= \frac{\partial}{\partial y} \left(\sin(x^2 y) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{xy^2} \right) \\&= \cos(x^2 y) \frac{\partial}{\partial y} (x^2 y) + e^{xy^2} \frac{\partial}{\partial y} (xy^2) \\&= \cos(x^2 y) x^2 + e^{xy^2} 2xy \\&= x^2 \cos(x^2 y) + 2xye^{xy^2}\end{aligned}$$

Exemplo 6

Calcule as derivadas parciais de primeira ordem da função

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{d}{du} \operatorname{arctg}(u) = \operatorname{arctg}'(u) = \frac{1}{1+u^2}$$

Exemplo 6 – Solução

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} \right) \right) \\ &= \operatorname{arctg}' \left(\frac{x}{y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y} \right)^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{y} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y} \right)^2} \left(\frac{1}{y} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \left(\frac{1}{y} \right) \\ &= \frac{1}{\frac{y^2 + x^2}{y^2}} \left(\frac{1}{y} \right) \\ &= \frac{y^2}{y^2 + x^2} \left(\frac{1}{y} \right) \\ &= \frac{y}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

Exemplo 6 – Solução

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} \right) \right) \\&= \operatorname{arctg}' \left(\frac{x}{y} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{y} \right) \\&= \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y} \right)^2} \frac{\partial}{\partial y} (xy^{-1}) \\&= \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y} \right)^2} (-xy^{-2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} (-xy^{-2}) \\&= \frac{1}{\frac{y^2 + x^2}{y^2}} (-xy^{-2}) \\&= \frac{y^2}{y^2 + x^2} (-xy^{-2}) \\&= \frac{-x}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

Conteúdo

Derivadas Parciais

Exemplos

Lista Mínima

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12^a ed. – Seção 14.3

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 4, 10, 37-40

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações