

Diferenciabilidade

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I



<https://material-didatico.github.io/cfvv1>

Conteúdo

Diferenciabilidade

Lista Mínima

Derivada Ordinária – Uma variável

Variação da função com relação à variável

Derivada da função $f: R \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no ponto a

$$\frac{df}{dx}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Diferenciabilidade em 1D

Se a derivada de f existe em a então f é diferenciável em a

Existe uma reta tangente a f no ponto $(a, f(a))$

Podemos aproximar a função pela reta em uma vizinhança de a

$$\Delta x = x - a$$

$$\Delta y = f(x) - f(a)$$

$$= f'(a)\Delta x + \varepsilon\Delta x$$

$$\varepsilon \rightarrow 0 \text{ quando } \Delta x \rightarrow 0$$

Definição – Derivadas Parciais

As derivadas parciais, com relação a x e y , da função $f: R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, no ponto $(x, y) = (a, b)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

Desde que os limites existam

Diferenciabilidade em n Dimensões

A existência das derivadas parciais **não** garante diferenciabilidade

Diferenciabilidade está associada a existência do **plano tangente**

Definição: Diferenciabilidade em 2D

Uma função $z = f(x, y)$ é diferenciável em (a, b)

se $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ existem

e $\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$

satisfaz

$$\Delta z = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0 \text{ quando } \Delta x, \Delta y \rightarrow 0$$

Teorema do Incremento

Suponha que as derivadas parciais de primeira ordem de $f(x, y)$ sejam definidas em uma região aberta R , que contém o ponto (a, b) e que f_x e f_y sejam contínuas em (a, b) , então a variação

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

com $(a + \Delta x, b + \Delta y) \in R$, satisfaz

$$\Delta z = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0 \text{ quando } \Delta x, \Delta y \rightarrow 0$$

Corolário do Teorema do Incremento

Se $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ existem

e são **contínuas** em uma região aberta R

então f é **diferenciável** em R

Diferenciabilidade em 2D

Dizemos que f é **diferenciável** se ela é diferenciável em todos os pontos do seu domínio

Nesse caso dizemos que seu gráfico é uma **superfície lisa**

Teorema Diferenciabilidade e Continuidade

Se uma função $f(x, y)$ é diferenciável em (a, b)

então ela é contínua em (a, b)

Conteúdo

Diferenciabilidade

Lista Mínima

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12^a ed. – Seção 14.3

1. Estudar o texto da seção

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações