Planos Tangentes

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I

23 de outubro de 2025

https://material-didatico.github.io/cfvv1

Conteúdo

Justificativa

Primeiro vamos verificar que o gradiente é normal a superfície de nível

Considere uma função $f(x, y)$ diferenciável e sua superfície de nível

$$f(x, y, z) = k$$

Assuma que a curva paramétrica

$$r(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} g(t) \\ h(t) \\ k(t) \end{pmatrix}$$

está contida na superfície de nível c da função f

Justificativa

$$f\big(g(t), h(t), k(t)\big) = k$$

$$\frac{d}{dt} f\big(g(t), h(t), k(t)\big) = \frac{dk}{dt}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dk}{dt} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dg}{dt} \\ \frac{dh}{dt} \\ \frac{dk}{dt} \end{pmatrix} = 0$$

$$\nabla f \cdot \frac{dr}{dt} = 0$$

Justificativa

Se tomarmos todas as curvas suaves que passam por um ponto (a, b)

Seus vetores tangentes são todos ortogonais ao vetor gradiente no ponto

Todos os vetores tangentes estão no plano tangente a superfície

Definições

O Plano Tangente ao ponto (a, b, c) na superfície de nível $f(x, y, z) = k$ de uma função diferenciável f é o plano passando pelo ponto (a, b, c) e normal a $\nabla f(a, b, c)$

A Reta Normal da superfície no ponto é a reta passando pelo ponto na direção do gradiente $\nabla f(a, b, c)$

Equação do Plano Tangente

$$\nabla f(a, b, c) \cdot (X - X_0) = 0$$

$$\nabla f(a, b, c) \cdot \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \\ z - c \end{pmatrix} = 0$$

$$f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c) = 0$$

Equação da Reta Normal

$$X = X_0 + t\,\nabla f(a, b, c) \qquad\qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} f_x(a, b, c) \\ f_y(a, b, c) \\ f_z(a, b, c) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = a + t\, f_x(a, b, c) \\ y = b + t\, f_y(a, b, c) \\ z = c + t\, f_z(a, b, c) \end{cases}$$

Exemplo 1

Encontre o plano tangente e a reta normal da superfície

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 9 = 0$$

no ponto $(1, 2, 4)$

Exemplo 1 – Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 + z - 9\right) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2 + z - 9\right) = 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2 + y^2 + z - 9\right) = 1$$

$$\nabla f = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \nabla f(1,2,4) &= \left(2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\right)\Big|_{(1,2,4)} \\ &= 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemplo 1 – Solução

Plano tangente

$$\nabla f(a, b, c) \cdot \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \\ z - c \end{pmatrix} = 0$$

$$f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c) = 0$$

$$f_x(1, 2, 4)(x - 1) + f_y(1, 2, 4)(y - 2) + f_z(1, 2, 4)(z - 4) = 0$$

$$2(x - 1) + 4(y - 2) + (z - 4) = 0$$

$$2x + 4y + z = 14$$

Exemplo 1 – Solução

Reta normal

$$X = X_0 + t\,\nabla f(a, b, c) \qquad\qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = a + t\,f_x(a, b, c) \\ y = b + t\,f_y(a, b, c) \\ z = c + t\,f_z(a, b, c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

Conteúdo

Justificativa

Queremos o Plano Tangente a superfície suave $z = f(x, y)$ em um ponto (a, b, c) onde $c = f(a, b)$

Podemos escrever $z = f(x, y)$ como $f(x, y) - z = 0$

Queremos o plano tangente a curva de nível zero da função

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$$

Justificativa

Derivadas de F

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}\big(f(x, y) - z\big) = f_x - 0 = f_x$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}\big(f(x, y) - z\big) = f_y - 0 = f_y$$

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}\big(f(x, y) - z\big) = 0 - 1 = -1$$

Justificativa

Equação do Plano Tangente ao gráfico da função $f(x, y)$

$$\nabla F(a, b, c) \cdot \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \\ z - c \end{pmatrix} = 0$$

$$F_x(a, b, c)(x - a) + F_y(a, b, c)(y - b) + F_z(a, b, c)(z - c) = 0$$

$$f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) - (z - c) = 0$$

Plano Tangente a superfície $z = f(x, y)$

O plano tangente à superfície $z = f(x, y)$

de uma função diferenciável f no ponto $\big(a, b, f(a, b)\big)$ é

$$f_x(a, b)(x - a) \; + \; f_y(a, b)(y - b) \; - \; (z - c) \; = \; 0$$

Conteúdo

Exemplo 2

Encontre o plano tangente ao gráfico da função

$$f(x, y) = x\cos(y) - ye^x$$

no ponto $(0, 0)$

Exemplo 2 – Avaliando o valor da função no ponto

$$z = f(0,0) = \left.\left(x\cos(y) - ye^{x}\right)\right|_{(0,0)} = 0 \times \cos(0) - 0 \times e^{0} = 0$$

Exemplo 2 – Solução

Derivadas parciais de $f(x, y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\cos(y) - ye^x\right) = \cos(y) - ye^x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x\cos(y) - ye^x\right) = -x\,\mathrm{sen}(y) - e^x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \left(\cos(y) - ye^x\right)\Big|_{(0,0)} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \left(-x\,\mathrm{sen}(y) - e^x\right)\Big|_{(0,0)} = -1$$

Exemplo 2 – Solução

Plano tangente

$$f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) - (z - c) = 0$$

$$f_x(0, 0)(x - 0) + f_y(0, 0)(y - 0) - (z - 0) = 0$$

$$1(x - 0) - 1(y - 0) - (z - 0) = 0$$

$$x - y - z = 0$$

Exemplo 3

Encontre o plano tangente ao gráfico da função

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy - x + 3y + 4$$

no ponto $(2, -3)$

Exemplo 3 – Solução

A equação do plano tangente ao gráfico da função f no ponto $(2, -3)$ é

$$f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) - (z - c) = 0$$

$$f_x(2, -3)(x - 2) + f_y(2, -3)(y + 3) - (z - c) = 0$$

Exemplo 3 – Calculando a derivada parcial em x

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 - 2xy - x + 3y + 4\right) = 2x - 2y - 1$$

$$f_x(2, -3) = (2x - 2y - 1)\Big|_{(2,-3)} = 2(2) - 2(-3) - 1 = 4 + 6 - 1 = 9$$

Exemplo 3 – Calculando a derivada parcial em y

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2 - 2xy - x + 3y + 4\right) = 2y - 2x + 3$$

$$f_y(2, -3) = (2y - 2x + 3)\Big|_{(2,-3)} = 2(-3) - 2(2) + 3 = -6 - 4 + 3 = -7$$

Exemplo 3 – Avaliando f no ponto $(2, -3)$

$$
\begin{aligned}
c &= f(2, -3) \\
&= \left(x^2 + y^2 - 2xy - x + 3y + 4\right)\Big|_{(2,-3)} \\
&= 2^2 + (-3)^2 - 2(2)(-3) - 2 + 3(-3) + 4 \\
&= 4 + 9 + 12 - 2 - 9 + 4 \\
&= 18
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 – Equação do Plano Tangente

$$f_x(2,-3)(x-2)+f_y(2,-3)(y+3)-(z-c)=0$$

$$9(x-2)-7(y+3)-(z-18)=0$$

$$9x-18-7y-21-z+18=0$$

$$9x-7y-z=21$$

Conteúdo

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12ª ed. – Seção 14.6

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 1-8

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações