

Coordenadas Polares

Luis Alberto D'Afonseca

Cálculo de Funções de Várias Variáveis – I



<https://material-didatico.github.io/cfvv1>

Conteúdo

Revisão de Trigonometria

Sistema de Coordenadas Polares

Exemplos

Lista Mínima

Relações Trigonômétricas no Triângulo Retângulo

$$\text{sen}(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{r}$$

$$\text{cos}(\theta) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{r}$$

$$\text{tg}(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{y}{x}$$

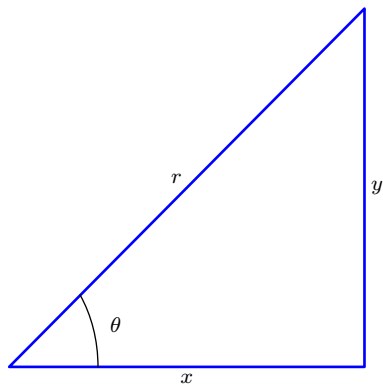


Tabela de Seno, Cosseno e Tangente

Graus	Radianos	$\text{sen}(\theta)$	$\text{cos}(\theta)$	$\text{tg}(\theta)$
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	$\nexists$

Conteúdo

Revisão de Trigonometria

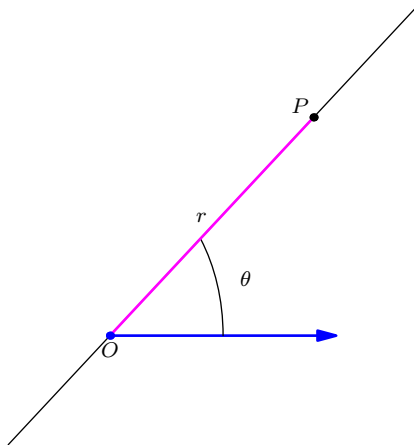
Sistema de Coordenadas Polares

Exemplos

Lista Mínima

Coordenadas Polares

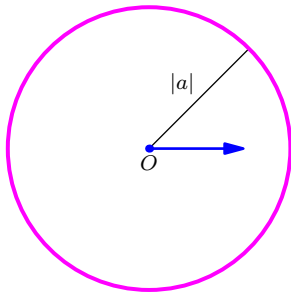
- ▶ Origem ou polo
- ▶ Raio inicial
- ▶ θ ângulo orientado
partindo do raio inicial
(em radianos) $\theta \in \mathbb{R}$
- ▶ r distância orientada
partindo da origem, $r \in \mathbb{R}$
- ▶ Coordenadas polares (r, θ)



Equações em Coordenadas Polares

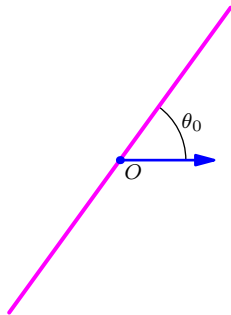
$$r = a \quad a \neq 0$$

Círculo centrado na origem e raio $|a|$



$$\theta = \theta_0$$

Reta passando pela origem



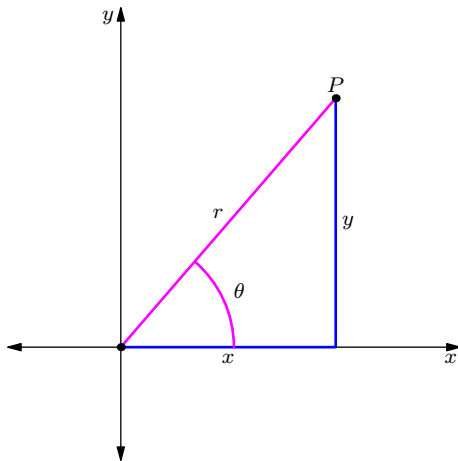
Relação Entre Coordenadas Polares e Cartesianas

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$



Conteúdo

Revisão de Trigonometria

Sistema de Coordenadas Polares

Exemplos

Lista Mínima

Exemplo 1

Encontre todas as coordenadas polares associadas ao ponto $(r, \theta) = \left(2, \frac{\pi}{6}\right)$

Exemplo 1 – Solução

O ponto $(r, \theta) = \left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ também pode ser escrito como

$$(r, \theta) = \left(2, \quad \frac{\pi}{6} + 2n\pi \right) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ou

$$(r, \theta) = \left(-2, -\frac{5\pi}{6} + 2n\pi \right) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Exemplo 2

Converta as seguintes coordenadas cartesianas em coordenadas polares (r, θ)

a) $(x, y) = (-2, 2\sqrt{3})$

b) $(x, y) = (3, 4)$

c) $(x, y) = (0, -5)$

Apresente as coordenadas com os valores “mais simples”

Exemplo 2 – Solução Item a

$$(x, y) = (-2, 2\sqrt{3})$$

$$r^2 = x^2 + y^2 = (-2)^2 + (2\sqrt{3})^2 = 4 + 4 \times 3 = 16$$

$$r = \pm 4$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$$

$$\theta = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) \pm n\pi = -\frac{\pi}{3} \pm n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$(r, \theta) = \left(4, -\frac{\pi}{3} + \pi\right) = \left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$$

Exemplo 2 – Solução Item a – Alternativa

$$(x, y) = (-2, 2\sqrt{3}) \quad r = 4$$

Podemos determinar θ resolvendo o sistema

$$\begin{cases} r \cos(\theta) = x \\ r \sin(\theta) = y \end{cases} \quad \begin{cases} 4 \cos(\theta) = -2 \\ 4 \sin(\theta) = 2\sqrt{3} \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Como } \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad (r, \theta) = \left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$$

Exemplo 2 – Solução Item b

$$(x, y) = (3, 4)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \qquad r = \pm 5$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{3}$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{4}{3} \right) \pm n\pi \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$$(r, \theta) = \left(5, \operatorname{arctg} \left(\frac{4}{3} \right) \right)$$

Exemplo 2 – Solução Item c

$$(x, y) = (0, -5)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 = 0^2 + 5^2 = 25 \qquad r = \pm 5$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = \frac{-5}{0} \quad \nexists$$

$$\begin{cases} r \cos(\theta) = x \\ r \operatorname{sen}(\theta) = y \end{cases} \quad \begin{cases} 5 \cos(\theta) = 0 \\ 5 \operatorname{sen}(\theta) = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(\theta) = 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) = -1 \end{cases}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2} \pm 2\pi n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$$(r, \theta) = \left(5, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Exemplo 3

Converta as coordenadas polares em coordenadas cartesianas (x, y)

a) $(r, \theta) = \left(4, \frac{\pi}{6}\right)$

b) $(r, \theta) = \left(3, \frac{3\pi}{4}\right)$

c) $(r, \theta) = (5, \pi)$

Exemplo 3 – Solução Item a

$$x = r \cos(\theta) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4 \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$y = r \sin(\theta) = 4 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4 \frac{1}{2} = 2$$

$$(x, y) = (2\sqrt{3}, 2)$$

Exemplo 3 – Solução Item b

$$x = r \cos(\theta) = 3 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -3 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-3\sqrt{2}}{2} = \frac{-3}{\sqrt{2}}$$

$$y = r \sin(\theta) = 3 \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$(x, y) = \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

Exemplo 3 – Solução Item c

$$x = r \cos(\theta) = 5 \cos(\pi) = 5(-1) = -5$$

$$y = r \sin(\theta) = 5 \sin(\pi) = 0$$

$$(x, y) = (-5, 0)$$

Exemplo 4

Encontre a equação polar para o círculo $x^2 + (y - 3)^2 = 9$

Exemplo 4 – Solução

Escrevendo a equação em coordenadas polares

$$x^2 + (y - 3)^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 6y + 3^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 6y = 0$$

$$r^2 - 6r \operatorname{sen}(\theta) = 0$$

$$r(r - 6 \operatorname{sen}(\theta)) = 0$$

Portanto

$$r = 0 \quad \text{ou} \quad r = 6 \operatorname{sen}(\theta)$$

Exemplo 5

Escreva a equação

$$r = \frac{4}{2 \cos(\theta) - \sin(\theta)}$$

em coordenadas cartesianas e identifique seu gráfico

Exemplo 5 – Solução

Sabemos que $x = r \cos(\theta)$ $y = r \sin(\theta)$

$$r = \frac{4}{2 \cos(\theta) - \sin(\theta)}$$

$$r (2 \cos(\theta) - \sin(\theta)) = 4$$

$$2r \cos(\theta) - r \sin(\theta) = 4$$

$$2x - y = 4$$

$$y = 2x - 4$$

O gráfico é uma reta

Exemplo 6

Mostre que a equação polar

$$r = \frac{4}{2 - \cos \theta}$$

representa uma cônica

Exemplo 6 – Solução

$$r = \frac{4}{2 - \cos \theta}$$

$$(2 - \cos \theta) r = 4$$

$$(2r - r \cos \theta) = 4$$

$$2r - x = 4$$

$$2r = 4 + x$$

$$4r^2 = (4 + x)^2$$

$$4(x^2 + y^2) = 16 + 8x + x^2$$

$$4x^2 + 4y^2 - 8x - x^2 = 16$$

$$3x^2 + 4y^2 - 8x = 16$$

Exemplo 7

Escreva a equação

$$r = 2 \cos(\theta) - \sin(\theta)$$

em coordenadas cartesianas e simplifique

Exemplo 7 – Solução

Sabemos que

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r}$$

$$\sin(\theta) = \frac{y}{r}$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$r = 2 \cos(\theta) - \sin(\theta)$$

$$r^2 = 2x - y$$

$$r = 2\frac{x}{r} - \frac{y}{r}$$

$$x^2 + y^2 = 2x - y$$

$$r = \frac{2x - y}{r}$$

$$x^2 + y^2 - 2x + y = 0$$

Exemplo 8

Escreva a equação

$$r = \frac{5}{\operatorname{sen}(\theta) - 2 \cos(\theta)}$$

em coordenadas cartesianas e simplifique

Exemplo 8 – Solução

Sabemos que

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$r = \frac{5}{\sin(\theta) - 2 \cos(\theta)}$$

$$r (\sin(\theta) - 2 \cos(\theta)) = 5$$

$$r \sin(\theta) - 2r \cos(\theta) = 5$$

$$y - 2x = 5$$

$$y = 2x + 5$$

Exemplo 9

Escreva a equação

$$x^2 + xy + y^2 = 1$$

em coordenadas polares e simplifique

Exemplo 9 – Solução

Sabemos que

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$x^2 + xy + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 + xy = 1$$

$$r^2 + r \cos \theta r \sin \theta = 1$$

$$r^2 + r^2 \cos \theta \sin \theta = 1$$

$$r^2 (1 + \cos \theta \sin \theta) = 1$$

$$r = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \cos \theta \sin \theta}}$$

Exemplo 9 – Solução Alternativa

$$r^2 (1 + \cos \theta \sin \theta) = 1$$

$$r^2 \left(1 + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right) = 1$$

$$r^2 (2 + \sin(2\theta)) = 2$$

$$r = \frac{\pm 2}{\sqrt{2 + \sin(2\theta)}}$$

Conteúdo

Revisão de Trigonometria

Sistema de Coordenadas Polares

Exemplos

Lista Mínima

Lista Mínima

Cálculo Vol. 2 do Thomas 12^a ed. – Seção 11.3

1. Estudar o texto da seção
2. Resolver os exercícios: 1, 2, 6, 7, 11-15, 27-31, 53-57, 68

Atenção: A prova é baseada no livro, não nas apresentações